Theorie der Abel'schen Functionen

von

Dr. H. Stahl



M. W. Haskell

Berkeley California, Nov. 15, 1898.



THEORIE

DER

ABEL'SCHEN FUNCTIONEN

VON

DR. HERMANN STAHL,
PROFESSOR DER MATHEMATIK IN TÜBINGEN.

MIT FIGUREN IM TEXT.

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1896.

Vorwort.

Der grossartige Entwurf, den Riemann[1]) im Jahre 1857 von der Theorie der Abel'schen Functionen gegeben hat[2]), ist seitdem ununterbrochen weiter ausgebaut worden. Nächst den grösseren, allgemein bekannten Werken über die Abel'schen Functionen von C. Neumann[3]), Clebsch und Gordan[4]), Briot[5]), die in engerem oder weiterem Anschluss an Riemann das Verständniss von dessen Theorie vermitteln, waren es besonders die Untersuchungen der Herren F. Prym[6]) über die hyperelliptischen Functionen und H. Weber[7]) über die Abel'schen Functionen vom Geschlecht $p = 3$, die auf die weiteren Ausführungen der Riemann'schen Theorie anregend und fördernd gewirkt haben.

Es fehlt indess augenblicklich an einem Lehrbuch, das nicht nur eine Uebersicht über die von Riemann selber geschaffene Theorie, sondern auch über die seither hinzugekommenen Ausführungen der-

1) B. Riemann, Ges. Werke, hrsggb. von H. Weber, Leipzig. 1. A. 1876. 2. A. 1892. S. 81—135.

2) Kurz vor Riemann's Veröffentlichung fallen die ersten Mittheilungen von Herrn Weierstrass über seine Theorie der hyperelliptischen Functionen. Herr W. hat seitdem seine Methoden auf die Abel'schen Functionen und schliesslich auf die allgemeinsten $2p$-fach periodischen Functionen von p Variabeln ausgedehnt. Der dritte Band der ges. Werke soll die Untersuchungen bringen. Das vorliegende Werk hat es nur mit den Methoden von Riemann zu thun.

3) C. Neumann, Vorl. üb. Riemann's Theorie der Abel'schen Integrale, Leipzig. 1. A. 1865. 2. A. 1884.

4) Clebsch u. Gordan, Theorie der Abel'schen Functionen. Leipzig 1866. (Citirt: Ab. F.)

5) Briot, Théorie des fonctions Abéliennes. Paris 1879.

6) F. Prym, Neue Theorie der ultraelliptischen Functionen, Wiener Denkschriften. Bd. 24. 1864. 2. A. Berlin 1885. Zum Theil schon als Dissertation Berlin 1863. Prym, Zur Theorie der Functionen in einer zweiblättr. Fläche. Zürich 1866. Bez. der Untersuchungen über Thetafunctionen s. S. 282.

7) H. Weber, Theorie der Abel'schen Functionen vom Geschlecht 3. Berlin 1876. (Citirt: Ab. F. $p = 3$.)

selben gibt. Das vorliegende, aus Vorlesungen erwachsene Werk soll versuchen, hier einzutreten. Die Darstellung schliesst sich im Grossen und Ganzen eng an die Riemann'sche Abhandlung an und zerfällt wie diese in zwei Theile, von denen der erste die algebraischen Functionen und Abel'schen Integrale, der zweite das Jacobi'sche Umkehrproblem zum Gegenstand hat. Indess bin ich von der Riemann'schen Behandlung besonders in zwei Punkten abgewichen, worüber ich kurz Rechenschaft geben muss.

Der erste Punkt betrifft die Behandlung der algebraischen Functionen. Diese ist von Riemann selber in rein algebraischer Form nur bis zu einem gewissen Grade und unter beschränkenden Voraussetzungen durchgeführt, dann aber, der grösseren Allgemeinheit halber, durch functionentheoretische Betrachtungen auf Grund des Dirichlet'schen Principes ergänzt worden. In ihrer ganzen Allgemeinheit ist die Theorie der algebraischen Functionen noch heute Gegenstand ausgedehnter Untersuchungen; sie hat sich mehr und mehr zu einer besonderen Disciplin entwickelt, die noch keineswegs abgeschlossen ist[1]). Zunächst aber bedurften die von Riemann mit transcendenten Mitteln gewonnenen Sätze einer rein algebraischen Beweisführung. Eine solche wurde im Anschluss an Clebsch und Gordan zuerst von den Herren Brill und Nöther in einer wichtigen Arbeit (Mathem. Ann. Bd. 7. 1873) gegeben unter der Voraussetzung, dass die zu Grunde liegende, algebraische Gleichung von singulären Punkten nur mehrfache Punkte mit getrennten Tangenten besitze, auf welchen Fall sich die allgemeinste, algebraische Gleichung durch eindeutige Transformation zurückführen lässt. An diese algebraisch-geometrische Theorie von Brill und Nöther schliesst sich unsere Darstellung (Abschn. II § 7—11) an mit der weiteren Beschränkung, dass von singulären Punkten nur Doppelpunkte vorkommen, auf welche sich wiederum die mehrfachen Punkte mit getrennten Tangenten durch eindeutige Transformation zurückführen lassen. Doch sind die Entwicklungen unter Voraussetzung von Doppelpunkten so gegeben, dass eine Ausdehnung auf den allgemeineren Fall der mehrfachen Punkte den Gedankengang im Wesentlichen ungeändert lässt. Es schien aus didactischen Gründen zweckmässig, den algebraischen Theil der Theorie

---

1) Vgl. Brill u. Nöther, die Entwickelung der Theorie der algebraischen Functionen. Sonderabdruck aus dem Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung. Berlin 1894. In diesem Bericht ist u. A. besonders auch auf die algebraische Theorie von Herrn Weierstrass (Vorlesungen von 1869 an) eingegangen, während die mehr arithmetischen Untersuchungen von Kronecker und Dedekind-Weber von dem Bericht ausgeschlossen waren.

nicht zu weit auszudehnen, sondern mehr nur die leitenden Gedanken hervortreten zu lassen.

Der zweite Punkt betrifft die Einführung der Thetafunction. Diese geschieht bei Riemann rein historisch und ohne Vermittelung mit dem Umkehrproblem, zu dessen Lösung sie doch dienen soll. Ein erster Weg, vom Umkehrproblem ausgehend, zur Thetafunction zu gelangen, ist von Herrn Weierstrass und im Anschluss daran von Clebsch und Gordan eingeschlagen worden. Man gewinnt hier die Thetafunction, indem man eine Formel aus der Theorie der elliptischen Functionen, welche das Integral 3. Gattung durch den Logarithmus der Thetafunction darstellt, für den Fall der Abel'schen Functionen und für p Variable erweitert. Indess führt diese Herleitung nur durch eine längere, nicht leicht zu übersehende Rechnung zur Thetafunction und ihren Eigenschaften und die mannigfachen Darstellungen der algebraischen Functionen und Abel'schen Integrale durch die Thetafunction lassen sich, da sie entsprechend ebenfalls rechnerisch durchzuführen sind, nur schwer im voraus übersehen. Ein zweites Verfahren, vom Umkehrproblem zur Thetafunction zu gelangen, ist von Herrn Hermite für die elliptischen Functionen angegeben und von Herrn Weber auf die Abel'schen Functionen ausgedehnt worden. Dasselbe geht von der Bemerkung aus, dass die darzustellenden Umkehrungsfunctionen $2p$-fach periodische Functionen von p Variabeln sind, und zeigt, dass solche Functionen sich durch Quotienten von p-fach unendlichen Reihen in den p Variabeln darstellen lassen. Diese Reihen sind die Thetafunctionen. Die Riemann'sche Theorie, die sich an diese Herleitung der Thetafunctionen unmittelbar und natürlich anschliesst, bietet nunmehr den grossen Vortheil, dass man alle möglichen Darstellungen von algebraischen Functionen und Abel'schen Integralen durch die Thetafunction von vornherein übersieht und beherrscht und dass man dadurch einen tieferen Einblick in die innere Natur der Probleme und ihre Lösung gewinnt. Aus diesen Gründen habe ich die zweite Herleitung der Thetafunction vorgezogen (§ 25).

Im Uebrigen war ich bestrebt, die Entwicklungen möglichst in Riemann's Sinn zu geben und aus der neueren Litteratur das auszuwählen, was sich enger an die Riemann'sche Theorie anschliesst. Bei der Lösung des Umkehrproblems habe ich frühere, eigene Arbeiten benutzt, welche mir einerseits zur Einführung in die allgemeine Theorie am geeignetsten schienen (Abschnitt VI) und andrerseits die allgemeinsten Bildungen enthalten dürften (Abschnitt VII). Die vor Allem wichtigen invarianten Darstellungen lassen sich für allgemeines p noch

nicht durchführen. Die neueren Untersuchungen in dieser Richtung beschäftigen sich noch mit den Fällen $p = 3$ und $p = 4$.

Auf specielle Fälle ist nicht eingegangen, weil solche in den erwähnten Arbeiten der Herren Prym, Neumann, Weber und Thomae[1]) eingehend in Riemann'schem Sinne behandelt sind. Dagegen habe ich in der Einleitung zum ersten und zweiten Theil die wichtigsten Sätze und Formeln aus der Theorie der elliptischen Functionen vorausgeschickt und auf ihre Analogie mit den Sätzen und Formeln in der Theorie der Abel'schen Functionen hingewiesen. Von Litteratur ist nur das angeführt, was in näherer Beziehung zum Texte steht. Es wird dies umsomehr genügen, als die Grundgedanken doch sämmtlich auf Riemann zurückgehen. Zur Ergänzung der Litteraturangaben kann, wenigstens für einen Theil des behandelten Stoffes, der bereits erwähnte Bericht von Brill und Nöther dienen. An manchen Stellen, wie z. B. bei der Besprechung des Zusammenhanges einer Fläche (§ 2) und bei der Formulirung des Jacobi'schen Umkehrproblems (§ 25) habe ich mich mit der historischen Anführung von Erklärungen und Sätzen begnügt, um längere Einschaltungen, welche die Uebersicht über die Haupttheile erschweren konnten, zu vermeiden.

Ich bin meinem Freunde, Herrn F. Prym, zu besonderem Danke verpflichtet für die Bereitwilligkeit, mit der er mir die Einsicht in zwei Vorlesungen von Riemann gestattet hat. Die erste Vorlesung (Sommer 1861, angezeigt unter dem Titel: Ueber Functionen einer veränderlichen, complexen Grösse, insbesondere elliptische und Abel'sche, 4 St. wöch.) behandelt den ersten Theil der Riemann'schen Theorie (Ges. W. S. 81—120) und gibt wesentlich Ausführungen derselben. Von besonderem Interesse in ihr ist ein Abriss der Theorie der elliptischen Functionen nach Riemann's Methoden. Die zweite Vorlesung (Winter 1861/62, angezeigt als Fortsetzung der ersten, 3 St. wöch.) enthält in ihrer ersten Hälfte den zweiten Theil der Riemann'schen Theorie (Ges. W. S. 120—135), in ihrer zweiten Hälfte nach einigen weiteren, allgemeinen Sätzen eine Reihe von Ausführungen für den Fall $p = 3$. Die erste Vorlesung und die erste Hälfte der zweiten Vorlesung sind von Herrn Prym ausgearbeitet und, autographirt, in engerem Kreise verbreitet. Die zweite Hälfte der zweiten Vorlesung ist nur in einer Nachschrift von Herrn Prym und der Abschrift eines Theiles derselben von G. Roch vorhanden und aus dieser zum grösseren Theil in Riemann's Ges. W. (S. 456—472) aufgenommen. Man darf wohl dem Wunsche

1) Thomae, Ueber eine specielle Klasse Abel'scher Functionen. Halle 1877; und: Ueber eine specielle Klasse Abel'scher Functionen vom Geschlecht 3. Halle 1879.

Ausdruck geben, dass die noch unbenutzten Theile jener Vorlesung bei einer erneuten Auflage von Riemann's Werken Verwendung finden möchten. Ich hebe aus ihnen folgende, in der Zwischenzeit von anderen Autoren gefundenen und veröffentlichten Formeln hervor. Erstens die in § 31 mitgetheilte Formel (21); zweitens eine Gleichung für $p = 3$, die übereinstimmt mit der Gleichung, die Herr Weber (Ab. F. $p = 3$. S. 107. Gl. (11)) aufgestellt hat und die für allgemeines p in unsrer Darstellung in der ersten Gleichung (26) § 33 enthalten ist; drittens eine Formel für $p = 3$ (ohne Beweis), die sich mit der von Herrn Frobenius (Journ. für Math. Bd. 98. S. 260. 1884) gegebenen Formel (7) deckt und die zu den in unserer Darstellung S. 279 erwähnten Formeln (P) gehört.

Zum Schluss ist es mir ein Bedürfniss, meinen Freunden und Collegen, die mich bei der Arbeit unterstützt haben, auch an dieser Stelle meinen wärmsten Dank auszusprechen, Herrn A. Brill für die Hilfe, die er mir bei Bearbeitung der Abschnitte II und IV durch Rath und That so eingehend gewährt hat, und Herrn O. Hölder für eine Reihe sehr werthvoller Bemerkungen allgemeiner Art.

Tübingen, Juli 1896.

H. Stahl.

Druckfehler.

S. 142, Z. 7 v. u. in (8a) zu lesen: N_i und M_i statt N_i und M_i.

S. 190, Z. 17 v. o. zu lesen: in (30) und (31) § 33 statt in (12) § 31 und (29) § 33.

S. 281, Z. 5 v. o. zu lesen: (20—26) statt (2—26).

S. 281, Z. 21 v. o. zu lesen: so dass die statt so dass.

Inhalt.

I. Theil. Die rationalen Functionen und Abel'schen Integrale.

II. Theil. Das Jacobi'sche Umkehrproblem.

Erster Theil.

Die rationalen Functionen und Abel'schen Integrale.

Einleitung.

Die Theorie der Abel'schen Functionen und Integrale bildet eine Verallgemeinerung der Theorie der elliptischen Functionen und Integrale. Zum leichteren Verständniss der ersteren dürfte eine kurze Uebersicht über die Hauptpunkte der letzteren Theorie zweckmässig sein.

In der Theorie der elliptischen Functionen geht man aus von einer Gleichung zwischen zwei complexen Variabeln (x, y) vom Grade $n = 3$ und vom Geschlecht $p = 1$ von der Form[1])

$$y^2 = R(x) = 4x^3 - g_2 x - g_3 = 4(x - e_1)(x - e_2)(x - e_3), \quad (1)$$

wo g_2 und g_3 beliebige, reelle oder complexe Grössen sind.

Die erste Aufgabe ist die Untersuchung der Gleichung (1); sie führt zu zwei geometrischen Vorstellungen, die beide von Wichtigkeit sind. Die erste derselben betrachtet als Ort der complexen Variabeln x nicht eine einfache Ebene, sondern eine zweiblättrige, im Unendlichen geschlossene Fläche T, in welcher die zweiwerthige Function $y = \sqrt{Rx}$ eindeutig ist, so dass jedem Werthepaar (x, y) oder $(x, \sqrt{Rx})$ eindeutig ein Punkt dieser Fläche entspricht und umgekehrt. Die Fläche T heisst die Riemann'sche Verzweigungsfläche der Function $y = \sqrt{Rx}$; sie hat vier Verzweigungspunkte e_1, e_2, e_3, ∞. Ihre beiden Blätter gehen in einander über längs zweier Verzweigungsschnitte, die zwischen e_3 und e_2 und zwischen e_1 und ∞ verlaufen mögen. Die Fläche T ist nicht einfach zusammenhängend, sondern wird erst durch $2p = 2$ Querschnitte a und b einfach zusammenhängend gemacht. Wir denken uns b im oberen Blatt um die Punkte e_3 und e_2, a theils im oberen theils im unteren Blatt um die Punkte e_2 und e_1 gelegt. Die

---

1) Diese Uebersicht schliesst sich in der Behandlung an Riemann, in der Bezeichnung an das Werk: Weierstrass, Formen und Lehrsätze zum Gebrauche der elliptischen Functionen, bearbeitet u. hggb. von Schwarz (2. A. 1893) an.

zweite geometrische Vorstellung betrachtet (1) als Gleichung einer Curve vom Grade $n = 3$ und vom Geschlecht $p = 1$ mit complexen Coefficienten und complexen Coordinaten (x, y) und wendet auf sie alle Bezeichnungen an, die bei reellen Curven gebräuchlich sind. Sie spricht von einer Ebene, der (x, y)-Ebene, in der die Curve liegt (die aber keine reelle Existenz hat), und nennt ein Werthepaar (x, y), das der Gleichung (1) genügt, einen Punkt dieser Curve u. s. f. Die letztere Deutung von (1) als Curve lässt eine besonders einfache Ausdrucksweise zu bei algebraischen Fragen und geometrischen Anwendungen, die Darstellung von y durch die Verzweigungsfläche T bietet dagegen besondere Vorzüge bei transcendenten Fragen.

Eine functionentheoretische Untersuchung zeigt, dass jede in T eindeutige oder wie T verzweigte Function des Ortes, die regulär ist, d. h. nur in einer endlichen Zahl von Punkten in T und in jedem derselben nur in endlicher Ordnung unendlich wird, eine rationale Function von (x, y) oder von $(x, \sqrt{Rx})$ ist.

Diese Untersuchung der Gleichung (1) findet ihre Verallgemeinerung in den Betrachtungen des Abschnittes I.

Eine zweite Aufgabe ist die algebraische Untersuchung der rationalen Functionen von (x, y) oder von $(x, \sqrt{Rx})$. Diese Functionen sind, wenn $f(x)$ und $\varphi(x)$ rationale, gebrochene Functionen von x allein darstellen, von der Form

$$\frac{f(x) + \varphi(x)\sqrt{Rx}}{\sqrt{Rx}}. \tag{2}$$

Für diese Function gilt, im Gegensatz zu den rationalen Functionen von x allein, Folgendes:

Die Function (2) ist eindeutig und stetig in der zweiblättrigen Fläche T mit Ausnahme einer endlichen Anzahl von Punkten, in welchen die Function in endlicher Ordnung unendlich wird. Diese Eigenschaft ist nach dem Obigen charakteristisch für die rationalen Functionen von (x, y) und kann zur Definition derselben dienen.

Ferner ist die Zahl ϱ der Punkte, in welchen die rationale Function (2) unendlich in erster Ordnung $(= \infty^1)$ und Null in erster Ordnung $(= 0^1)$ wird, die gleiche; diese Zahl heisst die Ordnung der Function. Aber die Ordnung ϱ ist nicht willkürlich, sie hat eine untere Grenze $p + 1 = 2$ und die ϱ ∞^1 Punkte und die ϱ 0^1 Punkte der Function sind nicht unabhängig von einander, sondern von diesen 2ϱ Punkten ist einer $(p = 1)$ durch die $2\varrho - 1$ übrigen bestimmt.

Hieraus ergeben sich für die Bildung der rationalen Function von $(x, \sqrt{Rx})$ die Sätze:

Die Function ist bis auf einen constanten Factor bestimmt, wenn von ihren ∞^1 Punkten und 0^1 Punkten alle bis auf einen gegeben sind; der letzte Punkt ist dann eindeutig bestimmt.

Die Function ist ferner bis auf eine additive Constante bestimmt, wenn ihre ϱ ∞^1 Punkte und $\varrho - 1$ von den zugehörigen Residuen gegeben sind. Das letzte Residuum ist dann eindeutig bestimmt.

Diese Untersuchungen über die rationalen Functionen finden ihre Verallgemeinerung in den Betrachtungen des Abschnittes II.

Eine dritte Frage gilt den Integralen der rationalen Functionen (2), den sog. elliptischen Integralen, die sich (abgesehen von Integralen rationaler Functionen von x allein) darstellen in der Form:

$$\int_c^x \frac{f(x)\,dx}{\sqrt{Rx}}, \tag{3}$$

wo $f(x)$ eine gebrochene, rationale Function von x ist.

Die charakteristischen Eigenschaften der Integralfunction (3) von x sind folgende:

Die Function (3) wird im Allgemeinen nicht nur algebraisch sondern auch logarithmisch unendlich; sie ist ferner in der Fläche T eine unendlich vieldeutige Function des Ortes, derart, dass sie um gewisse Constanten A und B, die sog. Periodicitätsmoduln, wächst, wenn der Integrationsweg die Querschnitte a und b überschreitet.

Das allgemeine elliptische Integral (3) lässt sich in einfachere Integrale zerlegen, die wesentlich verschiedenen Charakter haben, nämlich in Integrale der 1., 2. und 3. Gattung. Ein Integral 1. Gattung bleibt in allen Punkten von T endlich; es gibt (entsprechend dem Geschlecht $p = 1$ der Gleichung (1)) nur èin Integral 1. Gattung, nämlich:

$$u = -\int_\infty^x \frac{dx}{\sqrt{Rx}}. \tag{4}$$

Dagegen existiren beliebig viele Integrale 2. Gattung d. h. solche, die nur in einem Punkt von T algebraisch unendlich werden, und Integrale 3. Gattung d. h. solche, die nur in zwei Punkten von T logarithmisch unendlich werden. So stellen die Integrale

$$\int_c^x \frac{x\,dx}{\sqrt{Rx}} \quad \text{und} \quad \int_c^x \frac{\sqrt{Rx_0}}{\sqrt{Rx}}\,\frac{dx}{x - x_0} \tag{5}$$

ein Integral 2. Gattung mit dem algebraischen Unstetigkeitspunkt $(x = \infty, \sqrt{Rx} = \infty)$ und ein Integral 3. Gattung mit den beiden logarithmischen Unstetigkeitspunkten $(x_0, +\sqrt{Rx_0})$ und $(x_0, -\sqrt{Rx_0})$ dar.

Untersucht man die Beziehungen, die zwischen zwei elliptischen Integralen und ihren Unstetigkeitspunkten oder zwischen einem elliptischen Integral und einer rationalen Function sowie deren Unstetigkeitspunkten stattfinden, so erhält man eine Reihe von Gleichungen und Sätzen, aus denen wir nur das Abel'sche Theorem für die Integrale 1. Gattung hervorheben:

Die Summe der Werthe des elliptischen Integrals 1. Gattung, genommen zwischen zwei Punktsystemen, in welchen eine rationale Function r von (x, y) die Werthe ∞^1 und 0^1 annimmt, ist gleich 0.

Setzt man z. B. $r = ax + by + c$, wo a, b, c beliebige Constanten sind, so wird $r = \infty^3$ im Punkt $(x = \infty, y = \infty)$ der Curve (1) und $r = 0^1$ in drei Punkten (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), die, wenn man $\sqrt{Rx}$ für y schreibt, durch die Gleichung verbunden sind:

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & \sqrt{Rx_1} \\ 1 & x_2 & \sqrt{Rx_2} \\ 1 & x_3 & \sqrt{Rx_3} \end{vmatrix} = 0. \tag{6}$$

Bezeichnet man die drei Integrale 1. Gattung von der Form (4) mit den oberen Grenzen x_1, x_2, x_3 durch u_1, u_2, u_3, so sagt das Abel'sche Theorem aus, dass

$$u_1 + u_2 + u_3 \equiv 0. \tag{7}$$

Aus (6) folgt also (7), und umgekehrt kann man aus (7) wieder die Gleichung (6) ableiten.

Die vorstehenden Sätze über die elliptischen Integrale finden ihre Verallgemeinerung im Abschnitt III; die Sätze über das Integral 1. Gattung in § 15; über die Integrale 2. und 3. Gattung in § 16; das Abel'sche Theorem in §§ 19 und 20.

Hieran schliessen sich wichtige Folgerungen bez. der Umkehrungsfunction des Integrals 1. Gattung. Betrachtet man in (4) x als Function von u und setzt

$$x = p(u) \qquad y = \sqrt{Rx} = -\frac{dx}{du} = -p'(u) \tag{8}$$

und nennt die Periodicitätsmoduln des Integrals (4) an den Querschnitten a und b bezüglich 2ω und $2\omega'$, so gibt die conforme Abbildung der Verzweigungsfläche T mittels des Integrals (4) in der u-Ebene ein Parallelogramm, dessen gegenüberliegende Seiten den parallelen Rändern der Querschnitte a und b entsprechen. Hieraus

folgt, dass die Functionen (8) eindeutige, doppelt periodische Functionen der Variabeln u mit den Perioden 2ω und $2\omega'$ sind; solche Functionen heissen elliptische Functionen. Ebenso sind die Wurzelfunctionen $\sqrt{x - e_i}$ $(i = 1, 2, 3)$ elliptische oder doppelt periodische Functionen von u mit etwas veränderten Perioden.

Die Aequivalenz der Bedingungen (6) und (7) führt zu dem algebraischen Additionstheorem der Function $p(u)$, welches aussagt, dass $p(u_1 + u_2)$ sich rational durch $pu_1, pu_2, p'u_1, p'u_2$ oder algebraisch durch pu_1, pu_2 allein ausdrücken lässt; es ist nämlich

$$p(u_1 + u_2) = \frac{2\left(pu_1\, pu_2 - \frac{1}{4} g_2\right)(pu_1 + pu_2) - g_3 - p'u_1 p'u_2}{2(pu_1 - pu_2)^2}. \tag{9}$$

Ein ähnliches Additionstheorem besteht für $p'(u)$, für die Wurzelfunctionen $\sqrt{pu - e_i}$ und allgemein für jede doppelt periodische Function.

Diese Sätze über die elliptischen Functionen finden ihre Verallgemeinerung erst später in Abschnitt VII § 36 Satz V—IX.

Eine vierte Betrachtung dient zur Erweiterung der erhaltenen Resultate. Die letzteren gelten zunächst für die algebraische Grundgleichung (1) vom Grade $n = 3$ und vom Geschlecht $p = 1$. Sie lassen sich aber auf eine algebraische Gleichung $F_1(x_1, y_1) = 0$ von beliebigem Grade n_1 und von demselben Geschlecht $p = 1$ übertragen durch die sog. eindeutige Transformation d. h. eine Transformation der Form

$$x_1 = \varphi(x, y) \qquad y_1 = \psi(x, y), \tag{10}$$

wo φ und ψ rationale Functionen von x und y sind von der Beschaffenheit, dass sich umgekehrt mit Hilfe von (1) oder $F_1(x_1, y_1) = 0$ auch x und y als rationale Functionen von (x_1, y_1) darstellen. Es zeigt sich, dass durch eine solche Transformation eine gegebene Gleichung $F_1(x_1, y_1) = 0$ vom Geschlecht $p = 1$ stets auf die Form (1) gebracht werden kann derart, dass die absolute Invariante von (1), nämlich $g_2^3 : g_3^2$, mit der von $F_1(x_1, y_1) = 0$ identisch wird. Damit hat man auch die Theorie der zu $F_1(x_1, y_1) = 0$ gehörigen elliptischen Functionen und Integrale.

Diese Untersuchungen finden ihre Verallgemeinerung im Abschnitt IV.

Wir brechen hier die Uebersicht über die Theorie der elliptischen Functionen ab und geben die Fortsetzung derselben in der Einleitung zum zweiten Theil, der das Umkehrproblem behandelt. Im Rückblick auf das Vorstehende lässt sich nun der Inhalt des ersten Theiles unserer Darstellung der Theorie der Abel'schen Functionen leicht

übersehen. Derselbe handelt unter Voraussetzung einer algebraischen Gleichung $F(x, y) = 0$ vom Grade n und vom Geschlecht p von den rationalen Functionen von (x, y) und ihren Integralen, den Abel'schen Integralen, und zerfällt in folgende vier Abschnitte:

Abschnitt I untersucht die algebraische Grundgleichung $F(x,y) = 0$ und die zugehörige Verzweigungsfläche T.

Abschnitt II behandelt die Eigenschaften und Bildungsweisen der rationalen Functionen von (x, y).

Abschnitt III betrachtet die zu $F = 0$ gehörigen Abel'schen Integrale und die Beziehungen derselben zu einander und zu den rationalen Functionen einschliesslich des Abel'schen Theorems.

Abschnitt IV gibt die Erweiterung der gewonnenen Theorie durch Anwendung der eindeutigen Transformation auf die Gleichung $F(x,y) = 0$ und die zugehörigen rationalen Functionen und Abel'schen Integrale.

Erster Abschnitt.

Die algebraische Grundgleichung.

Wir geben zuerst (§§ 1—3) eine geometrische Untersuchung der Gleichung $F(x, y) = 0$ und der Zweigfunctionen $y = f(x)$, welche zur Construction der mehrblättrigen Verzweigungsfläche T von y führt. Alsdann folgt (§§ 4—6) eine analytische Untersuchung von $F(x, y) = 0$ und der in T eindeutigen, regulären Functionen.

§ 1. Die n Zweigfunctionen.

Die Grundlage der folgenden Untersuchungen bildet eine algebraische Gleichung zwischen zwei complexen Variabeln x und y: $F(x, y) = 0$. Diese Gleichung sei in x, wie in y rational und ganz und ausserdem irreducibel, d. h. nicht in Gleichungen derselben Art von niederem Grade zerfällbar. Der Grad von $F(x, y)$ in y sei n und nach Potenzen von y geordnet sei

$$F(x, y) = y^n \varphi_0(x) + y^{n-1} \varphi_1(x) + \cdots + y \varphi_{n-1}(x) + \varphi_n(x) = 0, \quad (1)$$

wobei die Coefficienten $\varphi_i(x)$ ganze rationale Functionen in x sind.

Man betrachte x als die unabhängige, y als die abhängige Variable und denke sich die erstere geometrisch dargestellt in einer Ebene, der x-Ebene, die im Unendlichen geschlossen ist wie eine Kugel. Durch Auflösung von (1) nach y erhält man n verschiedene Functionen

$$y_1 = f_1(x) \qquad y_2 = f_2(x) \ \cdots \ y_n = f_n(x), \quad (2)$$

welche die Zweigfunctionen oder Zweige der durch (1) definirten n-deutigen Function $y = f(x)$ heissen.

Ein im Endlichen gelegener Punkt der x-Ebene heisst ein regulärer Punkt der n-deutigen Function $y = f(x)$, wenn in ihm die n Zweigfunctionen endliche und von einander verschiedene Werthe haben; er heisst ein kritischer Punkt von $y = f(x)$, wenn in ihm einzelne Zweigfunctionen einander gleich oder unendlich werden.

Der Punkt $x = \infty$ kann für die Function $y = f(x)$ ebenfalls regulär oder kritisch sein; die Untersuchung für ihn lässt sich stets

durch die Substitution $x = \xi^{-1}$ auf den Punkt $\xi = 0$ einer ξ-Ebene zurückführen. Wir werden daher das Verhalten der Zweigfunctionen im Punkte $x = \infty$ immer nur kurz erwähnen.

Wie die kritischen Punkte analytisch zu ermitteln und genauer zu unterscheiden sind, zeigt sich später (§ 4). Man sieht aber sofort, dass ihre Zahl eine endliche ist. Denn die Punkte, in denen die Zweigfunctionen unendlich werden, sind die Nullpunkte von $\varphi_0(x)$, und ausserdem unter Umständen der Punkt $x = \infty$, ihre Zahl ist daher endlich. Und die Punkte, in denen mehrere Zweigfunctionen gleich werden, sind die Nullpunkte der Discriminante, die man durch Elimination von y aus $F(x, y) = 0$ und $F'(y) = 0$ erhält und ausserdem unter Umständen der Punkt $x = \infty$; ihre Zahl ist daher ebenfalls endlich.

Für das Verhalten der Zweigfunctionen in der Umgebung eines Punktes $x = a$ gilt der fundamentale Satz[1]):

(I) Hat die Gleichung $F(x, y) = 0$ für einen Punkt $x = a$ m Wurzeln y, die gleich demselben Werth b sind, so hat sie für einen nahe an a liegenden Punkt x m nahe an b liegende Wurzeln; oder genauer: jede der m zugehörigen Zweigfunctionen y ist in der Umgebung des Punktes $x = a$ stetig.

Beweis. Lässt man a um ξ wachsen und bezeichnet den entsprechenden Zuwachs von b mit η, so ist zu zeigen, dass es eine positive Grösse ϱ gibt derart, dass für alle Zuwüchse ξ, für die der Modul $|\xi| \leqq \varrho$ ist, stets m und nur m Zuwüchse η existiren, deren Modul $|\eta| < \sigma$, wo σ eine beliebig kleine, vorgegebene Grösse ist. Setzt man $x = a + \xi$, $y = b + \eta$ und entwickelt $F(x, y) = 0$ nach Potenzen von η, so erhält man:

$$F(a + \xi, b + \eta) = X_0 + X_1\eta + X_2\eta^2 + \cdots + X_n\eta^n = 0. \tag{3}$$

Die Coefficienten $X_0, X_1, \ldots, X_n$ sind Functionen von ξ und den Constanten a und b. Wir schreiben die Gleichung (3)

$$F(a + \xi, b + \eta) = \eta^m X_m(1 + P + Q),$$

wo

$$P = \frac{\eta}{X_m}(X_{m+1} + X_{m+2}\eta + \cdots + X_n\eta^{n-m-1})$$

$$Q = \frac{1}{\eta^m X_m}(X_0 + X_1\eta + \cdots + X_{m-1}\eta^{m-1}).$$

Nach Voraussetzung ist für $\xi = 0$ $X_0 = X_1 = \ldots = X_{m-1} = 0$, dagegen $X_m \gtrless 0$. Man kann daher um a einen Kreis mit endlichem

1) Cauchy, Exerc. d'Analyse et de Physique. II. S. 109—136 (1841).

Radius ϱ_0 beschreiben, der keine Wurzel von $X_m = 0$ enthält. Wir setzen $|\xi| < \varrho_0$ und bezeichnen mit A den kleinsten Modul von X_m im Kreise ϱ_0, mit B den grössten unter den Moduln von $X_{m+1}, .., X_n$ im Kreise ϱ_0. Setzt man gleichzeitig $|\eta| = \sigma < 1$, so kann man zuerst σ so bestimmen, dass $|P| < \frac{1}{2}$ wird, wenn $|\xi| < \varrho_0$ und $|\eta| = \sigma$ wird; man erhält dies σ, da

$$|P| < \frac{\sigma B}{A}(1 + \sigma + \sigma^2 + \cdot\cdot) \quad \text{oder} \quad |P| < \frac{B}{A}\frac{\sigma}{1-\sigma}$$

ist, aus

$$\frac{B}{A}\frac{\sigma}{1-\sigma} = \frac{1}{2} \quad \text{also} \quad \sigma = \frac{A}{A+2B}.$$

Zu dem so bestimmten σ kann man ferner, da $Q = 0$ wird für $\xi = 0$, ein $\varrho < \varrho_0$ wählen, so dass auch $|Q| < \frac{1}{2}$ wird, wenn $|\eta| = \sigma$ und $|\xi| \overline{\overline{<}} \varrho$. Denn bezeichnet man mit C den grössten unter den Moduln von $X_0, X_1, .., X_{m-1}$ im Kreise $\varrho < \varrho_0$, so ist

$$|Q| < \frac{C}{\sigma^m A}(1 + \sigma + \sigma^2 + \cdot\cdot + \sigma^{m-1})$$

und es wird $|Q| < \frac{1}{2}$, wenn man ϱ bestimmt aus

$$\frac{C}{A}\frac{1-\sigma^m}{\sigma^m(1-\sigma)} = \frac{1}{2}.$$

Nunmehr hat man für $|\eta| = \sigma$ und $|\xi| \leqq \varrho$ die Werthe $|P| < \frac{1}{2}$ und $|Q| < \frac{1}{2}$. Hieraus zieht man einen Schluss auf die Anzahl der Wurzeln η der Gleichung (3), die kleiner sind als σ. Nach einem bekannten Satze der Functionentheorie hat man in einer Ebene der complexen Variabeln y die Punkte b und $b + \eta$ zu markiren und festzustellen, um welches Vielfache von $2i\pi$ sich die Function

$$\log F(a + \xi, b + \eta) = m \log \eta + \log X_m + \log(1 + P + Q)$$

ändert, wenn man den Punkt $b + \eta$ auf einem Kreise vom Radius σ um den Punkt b führt. Nun vermehrt sich hierbei $m \log \eta$ um $m\, 2i\pi$; dagegen nimmt $\log X_m$ seinen ursprünglichen Werth wieder an und ebenso $\log(1 + P + Q)$, das letztere, weil für alle Punkte auf dem Kreise sowohl $|P|$ als $|Q|$ kleiner als $\frac{1}{2}$ sind, also $|P + Q| < 1$ ist. Mithin liegen in dem Kreise vom Radius σ um b genau m Wurzeln η von (3), deren Modul $< \sigma$ ist. Wiederholt man jetzt die Betrachtung, indem man $\sigma' < \sigma$ annimmt, so kann man zu σ' ein passendes $\varrho' < \varrho$ finden. Für $|\xi| \leqq \varrho'$ werden nun gerade m Werthe von η, die kleiner als σ' sind, existiren. Es sind also die früheren m Wurzeln η jetzt in den kleineren Kreis mit dem Radius σ' gerückt. Hieraus folgt, dass

in der Umgebung des Punktes $x = a$ in der x-Ebene ein Gebiet existirt, definirt durch $|\xi| < \varrho$, in welchem die betrachteten m Zweigfunctionen stetig sind und dass diese m Zweigfunctionen in $x = a$ den gemeinsamen Werth b annehmen. (q. e. d.)

Ist $x = a$ ein regulärer Punkt, so folgt aus (I) der Satz:

(II) In der Umgebung eines regulären Punktes ist jede Zweigfunction eindeutig und stetig und besitzt eine stetige Ableitung.

Denn aus (I) folgt bereits, wenn man $m = 1$ setzt, dass für jede Zweigfunction in der Umgebung eines regulären Punktes in der x-Ebene ein Gebiet existirt, für welches die Zweigfunction eindeutig und stetig ist. Um zu zeigen, dass in diesem Gebiet die Zweigfunction eine stetige Ableitung besitzt, sei x ein regulärer Punkt, y die betrachtete Zweigfunction. Ferner seien ξ und η zusammengehörige Zuwüchse von x und y (wie früher von a und b), die den Bedingungen $|\xi| \leqq \varrho$, $|\eta| \leqq \sigma$ genügen, wo ϱ und σ die im Beweis von Satz I definirten, der betrachteten Zweigfunction entsprechenden Grössen sind. Die Entwicklung von $F(x + \xi, y + \eta) = 0$ nach Potenzen von ξ und η gibt, da $F(x, y) = 0$ ist,

$$\xi\left(\frac{\partial F}{\partial x} + \Xi\right) + \eta\left(\frac{\partial F}{\partial y} + H\right) = 0,$$

wo Ξ und H mit ξ und η gleichzeitig gegen Null convergiren. Da nun wegen der Stetigkeit auch η mit ξ gegen Null convergirt, so erhält man einen und nur einen Werth für den Quotienten

$$\left(\frac{\eta}{\xi}\right)_{\xi=0} = -\frac{\partial F}{\partial x} : \frac{\partial F}{\partial y}.$$

Dieser Werth stellt die Ableitung von y nach x dar; dieselbe ist endlich, da x ein regulärer Punkt, also $\frac{\partial F}{\partial y}$ nicht $= 0$, und sie ist stetig, da nach dem Früheren die Zweigfunction y eine stetige Function von x ist.

Die Sätze I und II bilden die Grundlage für die weitere Untersuchung der Zweigfunctionen[1]). Aus (II) folgt: Ist $x = a$ ein beliebiger, aber fest gewählter, regulärer Punkt, so lässt sich jede Zweigfunction in der Umgebung von $x = a$ in eine Potenzreihe entwickeln, die nach ganzen, positiven Potenzen von $x - a$ fortschreitet und in einem Kreise convergirt, der durch den nächsten kritischen

1) Puiseux, Journ. de Mathém. T. XV u. XVI. 1850 u. 51. Deutsch von H. Fischer: V. Puiseux' Untersuchungen über die algebraischen Functionen. Halle 1861. S. 7 ff.

Punkt geht. Durch Transformation dieser Potenzreihen in andere mit übereinander greifenden Convergenzkreisen kann man die Zweigfunctionen fortsetzen über die ganze x-Ebene und dadurch ihr Verhalten und ihren Verlauf in allen Theilen der x-Ebene untersuchen. Es ergeben sich dabei zwei wichtige Sätze.

Bezeichnet man mit A ein einfach zusammenhängendes, endliches oder unendliches Gebiet in der x-Ebene, so lautet der erste Satz:

(III) Enthält das Gebiet A nur reguläre aber keine kritischen Punkte und beschreibt x in A eine geschlossene Linie, so fällt für jede Zweigfunction der Endwerth mit dem Anfangswerth zusammen.

Es ist zu zeigen, dass, wenn man in A eine Zweigfunction, von einem Punkte a ausgehend, auf zwei verschiedenen Curven nach einem anderen Punkte a_1 führt, die beiden Endwerthe der Function stets dieselben sind, was sich mit der Behauptung des Satzes (III) deckt. Betrachtet man zunächst in A zwei unendlich wenig verschiedene Wege ama_1 und ana_1, und geht mit dem Anfangswerth y_a, den eine bestimmte Zweigfunction y im Punkt a hat, auf diesen Wegen nach a_1, so sind die beiden Werthe y_m und y_n, die y in unendlich nahen Punkten m und n der beiden Curven annimmt, stets unendlich wenig verschieden wegen der Stetigkeit der Zweigfunction an regulären Stellen. Daher können y_m und y_n auch in a_1 nicht zwei Werthe haben, die um eine endliche Grösse verschieden sind, d. h. die Werthe von y müssen in a_1 zusammenfallen. Man kann nun von den zwei unendlich nahen Curven zu zwei beliebigen Curven zwischen a und a_1 in A übergehen, indem man den Weg ama_1 durch allmähliche Veränderung in einen anderen Weg apa_1 umformt. Auch dann muss die Zweigfunction y, die mit dem Werth y_a in a beginnt, auf beiden Wegen denselben Endwerth in a_1 erhalten, da A keinen kritischen Punkt enthält, also bei der Umwandlung des ersten Weges in den zweiten auch kein solcher Punkt überschritten wird. (q. e. d.)

Dagegen sagt der zweite Satz[1]):

(IV) Enthält das Gebiet A kritische Punkte und beschreibt x, von einem regulären Punkt ausgehend, in A eine geschlossene Linie, die durch keinen kritischen Punkt hindurchgeht, so erfahren die n Zweigfunctionen $y_1, \ldots, y_n$ im Allgemeinen eine Permutation und sondern sich bei wiederholtem Durchlaufen derselben Linie in ein oder mehrere cyclische Systeme.

---

1) Puiseux-Fischer S. 27.

Durchläuft nämlich x in A eine geschlossene Linie in bestimmter Richtung, so geht eine der Zweigfunctionen etwa y_1 entweder wieder in y_1 oder in eine andere Zweigfunction etwa y_2 über. Bei einem zweiten Durchlaufen der Linie in derselben Richtung geht diese Function y_2 entweder über in y_1 oder in eine dritte Zweigfunction y_3. Denn eine Rückkehr zu y_2 ist ausgeschlossen, da ein Durchlaufen der Linie in entgegengesetzter Richtung y_2 in y_1 überführen muss. Ist y_2 in y_3 übergegangen, so führt ein drittes Durchlaufen der Linie y_3 entweder in y_1 oder in eine vierte Zweigfunction etwa y_4 über. Denn ein Uebergang von y_3 in y_3 selber oder aber in y_2 ist ausgeschlossen, weil ein Durchlaufen der Curve in entgegengesetzter Richtung nach dem Vorstehenden y_3 in y_2, dagegen y_2 in y_1 überführen muss. Fährt man so fort, so ist klar, dass man spätestens nach n Umläufen wieder den ursprünglichen Werth y_1 erhalten muss. In diesem Falle gehen die n Zweigfunctionen $y_1, y_2, \dots, y_n$ nach einem Umlauf etwa in $y_2, y_3, \dots, y_n, y_1$, folglich nach zwei Umläufen in $y_3, y_4, \dots, y_n, y_1, y_2$, nach $n-1$ Umläufen in $y_n, y_1, \dots, y_{n-1}$ und nach n Umläufen wieder in $y_1, y_2, \dots, y_n$ über. Man sagt dann, die n Zweigfunctionen bilden für die geschlossene Curve ein einziges, cyclisches System. Im Allgemeinen werden indess schon n_1 $(< n)$ Zweigfunctionen unter sich ein solches System bilden, n_2 weitere ein zweites u. s. f., wobei $n_1 + n_2 + \cdots = n$ sein muss. Die Zahlen $n_1, n_2, \dots$ können dabei zum Theil oder auch alle gleich 1 sein. (q. e. d.)

Um den Einfluss der kritischen Punkte auf den Verlauf und Zusammenhang der Zweigfunctionen genauer zu untersuchen, führe man die von dem regulären Punkt a ausgehende und nach a zurückkehrende geschlossene Curve durch Zusammenziehen, ohne dabei einen kritischen Punkt zu überschreiten, zurück auf eine Anzahl von nach einander zu durchlaufenden, geschlossenen Curven, die nur je einen kritischen Punkt einschliessen und untersuche den Einfluss dieser Curven auf die Zweigfunctionen. Man nennt eine von a ausgehende, nur einen kritischen Punkt ξ umschliessende Curve eine Schleife (nach Puiseux auch Elementarcurve) und denkt sich dieselbe als eine Curve, die längs einer Linie s von a aus bis zu einem regulären Punkt α in der Nähe von ξ, dann auf einem kleinen Kreise um ξ herum und längs s wieder nach a zurückführt. Durchläuft x eine solche Schleife um einen im Endlichen der x-Ebene liegenden kritischen Punkt ξ, so gilt Folgendes:

Die in a für die n Zweigfunctionen gültigen Entwicklungen seien

$$(4) \qquad y_1 = f_1(x-a), \qquad y_2 = f_2(x-a) \cdots y_n = f_n(x-a).$$

Geht x auf s von a nach α, so mögen diese Entwicklungen bez. übergehen in die Functionen

$$\eta_1 = \varphi_1(x) \qquad \eta_2 = \varphi_2(x) \cdot\cdot\, \eta_n = \varphi_n(x). \tag{5}$$

Umläuft x den Punkt ξ von α aus auf einem kleinen Kreise, so erfahren die Functionen (5) eine Permutation (nach Satz IV), die bezeichnet sei durch $\eta_{i_1}, \eta_{i_2}, \ldots, \eta_{i_n}$. Kehrt endlich x von α auf s zurück nach a, so haben die Functionen (4) eine entsprechende Permutation erfahren, d. h. sie sind übergegangen in die Functionen $y_{i_1}, y_{i_2}, \ldots, y_{i_n}$. Wird die Schleife wiederholt durchlaufen, so gruppiren sich die Functionen (4) zu Cyclen, derart, dass jedem Cyclus eine Anzahl der Functionen (4) angehört, die sich beim Durchlaufen der Schleife unter sich permutiren. Dabei können einzelne Cyclen eine Function allein enthalten. Man kann hiernach die beim Durchlaufen der Schleife auftretende Zahl der Cyclen, ferner die Anzahl und die Nummern der jedem Cyclus zugehörigen Zweigfunctionen (4) feststellen. Vom Punkte a aus werden also dem kritischen Punkte ξ durch die Schleife s die Zweigfunctionen (4) in bestimmten Cyclen zugeordnet. Es ist aber wichtig zu bemerken, dass diese Zuordnung von der Lage der Schleifenlinien s zwischen a und ξ abhängt. Denn wählt man zwischen a und ξ statt s eine andere Linie t, die zusammen mit s beliebige kritische Punkte einschliessen mag, so gehen die Functionen (4) durch stetige Fortsetzung längs der Linie t im Punkt α nicht mehr bez. in die Functionen (5), sondern nach Satz IV in eine Permutation dieser Functionen und die Functionen (4) beim Durchlaufen der Schleife t nicht mehr bez. in die Functionen $y_{i_1}, y_{i_2}, \ldots, y_{i_n}$, sondern in eine entsprechende Permutation derselben über. Beim Verlegen der Linie s zwischen a und ξ bleibt daher wohl die Zahl der Cyclen und die Anzahl der jedem Cyclus zugehörigen Zweigfunctionen erhalten, nicht aber die Nummern dieser Zweigfunctionen in jedem Cyclus.

Handelt es sich für den kritischen Punkt ξ blos darum, die Zahl der Cyclen und die Anzahl der jedem Cyclus zugehörigen Zweigfunctionen festzustellen, so genügt es offenbar, sämmtliche Zweigfunctionen auf einem kleinen Kreise um ξ zu führen und die dabei auftretenden Cyclen zu bestimmen. Es ist klar, dass hierbei von den kritischen Punkten solche, in denen nur eine Zweigfunction unendlich wird, nicht in Betracht kommen, wohl aber solche, in denen von den n Zweigfunctionen mehrere denselben endlichen (oder unendlichen) Werth haben. Es ergibt sich aber aus der Betrachtung der Cyclen eine weitere Unterscheidung der letzteren Punkte, nämlich eine Unter-

scheidung in kritische Punkte ohne und mit Verzweigung. Die zwei einfachsten Fälle sind folgende:

1. In dem Punkte ξ haben die Zweigfunctionen verschiedene Werthe, nur λ (>1) Zweigfunctionen haben denselben Werth und diese λ Zweigfunctionen bilden in der Umgebung von ξ einen einzigen Cyclus. Man sagt dann, die λ Zweigfunctionen hängen in dem Punkte ξ zusammen oder sie sind in ihm verzweigt. Ein solcher Punkt ξ heisst ein kritischer Punkt mit Verzweigung, genauer ein $\lambda - 1$-facher Verzweigungspunkt oder auch ein Verzweigungspunkt von der Ordnung λ.
2. In dem Punkte ξ haben die Zweigfunctionen verschiedene Werthe, nur μ (>1) Zweigfunctionen haben denselben Werth, aber jede dieser μ Functionen geht bei einmaligem Umlaufen des Punktes ξ in sich selbst über. Man sagt dann, die μ Zweigfunctionen hängen in dem Punkte ξ nicht zusammen, sie verlaufen in der Umgebung des Punktes ξ getrennt von einander. Ein solcher Punkt ξ heisst ein kritischer Punkt ohne Verzweigung, genauer ein μ-facher Punkt mit getrennten Zweigen.

Mit Rücksicht auf diese Unterscheidung folgt für das Verhalten der Zweigfunctionen in einem beliebigen kritischen Punkte der Satz:

(V) In dem allgemeinsten kritischen Punkte ξ zerfallen die n Zweigfunctionen y in Gruppen, so dass die Functionen einer jeden Gruppe in ξ denselben Werth η (oder ∞) haben; dabei können in einer Gruppe noch solche Functionen auftreten, die unverzweigt oder getrennt verlaufen und andere Functionen, die einen oder mehrere Cyclen bilden.

Allgemein heisst ein kritischer Punkt ξ ein Verzweigungspunkt oder ein Punkt ohne Verzweigung, je nachdem für ihn unter den n Zweigfunctionen y Cyclen auftreten oder nicht. Wir bemerken noch Folgendes. Ist ein Punkt ξ in mehrfacher Weise Verzweigungspunkt, so dass in ihm λ' Zweige den Werth η' haben und einen ersten Cyclus von der Ordnung λ' bilden, λ'' andere Zweige den Werth η'' haben und einen zweiten Cyclus von der Ordnung λ'' bilden u. s. f. (wobei die Werthe $\eta', \eta'', \ldots$ auch zum Theil oder alle zusammenfallen können und unabhängig davon die Zahlen $\lambda', \lambda'', \ldots$ auch zum Theil oder alle gleich sein können), so kann man, um die auf den folgenden Seiten angegebenen Operationen auszuführen, sich statt ξ mehrere nahe zusammenliegende Punkte $\xi', \xi'' \ldots$ denken, in denen je nur ein Cyclus von bez. $\lambda', \lambda'', \ldots$ Zweigen stattfindet und hat dann nach Ausführung

der Operationen nur die Punkte ξ', ξ'', .. wieder in den Punkt ξ zusammenrücken zu lassen.

Für den Verlauf und den Zusammenhang der Zweigfunctionen sind offenbar ausschliesslich die Verzweigungspunkte von Einfluss, während die kritischen Punkte ohne Verzweigung sich wie reguläre Punkte verhalten, vorausgesetzt, dass die Zweigfunctionen, die in einem solchen Punkte gleiche Werthe haben, nicht durch den Punkt geführt werden. Unter dieser Voraussetzung kann man schon in III und IV den Ausdruck „kritische Punkte" durch „Verzweigungspunkte" ersetzen.

Die vorstehenden Betrachtungen führen nun zu einer allgemeinen Vorstellung über die Werthvertheilung der n-werthigen Function $y = f(x)$. Man denke sich sämmtliche Verzweigungspunkte ξ_1, ξ_2, .. (die übrigen kritischen Punkte kommen hierbei nicht in Betracht) in der x-Ebene festgelegt und mittels einer von dem regulären Punkt a nach dem Verzweigungspunkt ξ_i gehenden Schleife s_i die dem Punkt ξ_i zugehörigen Cyclen der Zweigfunctionen ermittelt. Die Nummern der in einem solchen Cyclus enthaltenen Zweigfunction hängen aber nach dem Vorigen von der Lage der Schleife s_i zwischen a und ξ_i ab und ändern sich mit derselben; es ist daher eine Bestimmung über diese Lage zu treffen. Hierzu ordne man die Verzweigungspunkte ξ_1, ξ_2, .. in eine beliebige Reihenfolge und verbinde sie in dieser Folge durch eine sich selbst nicht schneidende Hilfslinie C. Man ziehe alsdann von a nach ξ_1, ξ_2, .. bez. die Schleifen s_1, s_2, .. derart, dass sie einander und C nicht schneiden. Bei dieser Anordnung sind für jeden Verzweigungspunkt die Cyclen und in jedem Cyclus die Nummern der ihm angehörigen Zweigfunctionen eindeutig bestimmt. Alsdann lösche man die Linie C. Wählt man jetzt in a zunächst nur einen der n Zweige, etwa y_1, und bildet die stetige Fortsetzung desselben, indem man die Variable x von a aus einen beliebigen Weg beschreiben lässt, der keine der Schleifenlinien s_i überschreitet, so erhält man für jeden Punkt der x-Ebene einen bestimmten Werth des betrachteten Zweiges. Die Werthe des Zweiges ändern sich nach Satz I stetig mit der Lage von x auch dann noch, wenn der Weg in einen der Punkte ξ_i selber führt. Nur an den Curven s_i ist der Zweig im Allgemeinen unstetig, d. h. die Werthe des Zweiges in gegenüberliegenden Punkten zu beiden Seiten der Curven s_i sind im Allgemeinen verschieden.

Auf diese Weise ist der erste Zweig y_1 in der ganzen x-Ebene festgelegt. Legt man in derselben Weise auch die übrigen Zweige $y_2, \ldots, y_n$ in der x-Ebene fest, so ist nach den vorstehenden Entwick-

lungen klar, dass beim Ueberschreiten der Schleifenlinien s_i die verschiedenen Zweige in bestimmter Weise stetig in einander übergehen müssen. Es gilt nun schliesslich der Satz:

(VI) Wenn $F(x, y) = 0$ irreducibel ist, so schliessen sich die sämmtlichen Fortsetzungen der n Zweigfunctionen $y_i = f_i(x)$ zu einer einzigen analytischen Function zusammen.[1])

Wir behaupten mit anderen Worten: Ist $F(x, y) = 0$ irreducibel, so kann man, von dem regulären Punkt a ausgehend, in der x-Ebene stets eine geschlossene Curve so wählen, dass der Endwerth y_i', den die Zweigfunction y_i nach dem Durchlaufen der Curve in a erreicht, mit einem der Werthe $y_1, y_2, .., y_n$ von y in a, den man beliebig voraus bestimmen kann, zusammenfällt.

In der That kann man durch eine passende Reihe von Schleifen, also auch durch eine geschlossene Curve, von jedem der in a stattfindenden Zweigwerthe zu jedem andern vorausbestimmten Zweigwerth gelangen. Denn, wäre dies nicht der Fall, so müsste es einen Cyclus von weniger als n Zweigwerthen $y_k, y_l, ..$ geben, die nur immer in einander übergehen, welche Schleifen um die Verzweigungspunkte man auch durchläuft. Eine jede symmetrische Verbindung der Functionen $y_k, y_l, ..$ müsste also, indem man sie von a aus über einen geschlossenen Weg in der x-Ebene führt, in a wieder den ursprünglichen Werth annehmen. Sie wäre also in der ganzen x-Ebene eindeutig und folglich, da sie nur in endlicher Ordnung unendlich wird, eine rationale Function von x. Man könnte daher eine Gleichung in y aufstellen, deren Coefficienten rationale Functionen von x wären und deren Wurzeln nur aus einem Theil der n Zweigfunctionen y_i bestünden. Diese Gleichung müsste also ein Factor von $F(x, y) = 0$ sein, was der Voraussetzung, dass $F(x, y) = 0$ irreducibel sei, widerspricht. (q. e. d.)

§ 2. **Die Riemann'sche Verzweigungsfläche.**[2])

Der Zusammenhang der n Zweigfunctionen und der Gesammtverlauf der n-werthigen Function y gewinnt bedeutend an Anschaulichkeit, wenn man eine geometrische Vorstellung benutzt, die von Riemann ausgebildet ist. Dieselbe betrachtet als Ort der Variabeln x nicht, wie bisher geschah, die einfache x-Ebene, sondern eine über der x-Ebene n-blättrig ausgebreitete, in sich zusammenhängende

1) Puiseux-Fischer S. 134 ff.

2) Riemann, Ges. W. S. 7. 83. 95 ff.

Fläche T, die Riemann'sche Verzweigungsfläche von y. Eine solche Fläche verwandelt gradezu die in der x-Ebene n-werthige Function y in eine einwerthige Function des Ortes in der Fläche. Sie ermöglicht dadurch die Anwendung der Sätze über einwerthige Functionen und ihre Integrale auf die Function y, oder allgemeiner auf rationale Functionen von x und y und deren Integrale. Die Construction der Verzweigungsfläche von y ist folgende:

Da jedem x n Werthe von y entsprechen, so breite man über der einfachen x-Ebene n getrennte, im Unendlichen geschlossene Blätter $B_1, B_2, .., B_n$ aus und ordne den über dem regulären Punkt a der x-Ebene in diesen Blättern liegenden n Punkten die Werthe der Zweigfunctionen

$$b_1 = f_1(a), \quad b_2 = f_2(a) \;\cdot\cdot\; b_n = f_n(a) \tag{1}$$

in beliebiger Reihenfolge zu, etwa so, dass dem Blatt B_k der Werth b_k entspricht. Damit sind auch in der Umgebung von a den n Blättern die n Zweigfunctionen

$$y_1 = f_1(x), \quad y_2 = f_2(x) \;\cdot\cdot\; y_n = f_n(x) \tag{2}$$

zugeordnet. Der in § 1 festgestellte Zusammenhang der n Zweigfunctionen überträgt sich nun in folgender Weise auf die n Blätter.

Es sind lediglich die Verzweigungspunkte ins Auge zu fassen, weil in ihrer und nur in ihrer Umgebung die Blätter in einander übergehen, während sie in allen anderen Punkten getrennt bleiben. Man lege in der x-Ebene von a aus nach den Verzweigungspunkten $\xi_1, \xi_2, ..$ die Schleifen $s_1, s_2, ..$ in der in § 1 angegebenen Weise, markire in allen n Blättern die über je einem Verzweigungspunkt ξ_i liegenden n Punkte und durchschneide die sämmtlichen Blätter längs derjenigen Curven S_i, die über den in der x-Ebene gezogenen Schleifenlinien s_i hinlaufen. Setzt man nun in jedem Blatte die in der Umgebung des Punktes a durch die Werthe b_i (1) bereits festgelegten Zweigfunctionen stetig fort, ohne die Schnitte S_i zu überschreiten, so wird jeder Punkt eines jeden der n Blätter der Träger eines ganz bestimmten Werthes von y. Dabei hat in übereinander liegenden Punkten der n Blätter x denselben Werth, aber y je einen der zugehörigen Zweigwerthe. Ein bestimmter Punkt eines Blattes ist demnach nicht durch den Werth von x allein, sondern durch zwei zusammengehörige Werthe (x, y) charakterisirt.

Die n Blätter sind vorläufig noch von einander getrennt; sie stellen aber in ihrer Gesammtheit einen Ort oder ein Gebiet dar, welches die ganze Ausbreitung der n-werthigen Function y enthält. Jede Zweigfunction ist eindeutig und stetig in ihrem Blatt aus-

gebreitet, mit Ausnahme der Schnitte S_i. Längs dieser aber schliessen sich die Zweige von y in den verschiedenen Blättern aneinander und es sind demgemäss noch die Blätter längs der Schnitte S_i unter einander zu verbinden. Hierzu untersuche man für einen Verzweigungspunkt ξ_i mittels der zugehörigen Schleife s_i in der x-Ebene die Zahl λ_i und die Nummern der in ihm zusammenhängenden Functionszweige. Man verbinde dann die diesen Zweigen entsprechenden Blätter längs der Schnitte S_i in der Reihenfolge, in der ihr Zusammenhang durch die Schleife s_i festgestellt war, während in den übrigen Blättern der Schnitt S_i zu löschen ist. Man kann dies anschaulich so ausdrücken. Um den $\lambda_i - 1$-fachen Verzweigungspunkt ξ_i der Fläche winden sich die λ_i Blätter in bestimmter Weise schraubenförmig herum (wie eine Schraubenfläche von unendlich kleiner Höhe des Schraubenganges), derart, dass ein Umkreisen des Punktes in der Fläche aus dem ersten der in ihm zusammenhängenden Blätter in ein zweites, ein abermaliges Umkreisen aus dem zweiten in ein drittes Blatt führt u. s. f., so dass eine Curve erst, nachdem sie den Punkt ξ_i λ_i-mal umkreist hat, in das erste Blatt zurückführt und sich schliesst. Hierbei hat man sich vorzustellen, dass das letzte der λ_i Blätter sich längs des Schnittes S_i mit dem ersten Blatt wieder vereinigt, indem es alle zwischenliegenden Blätter durchsetzt. Die Verzweigungspunkte heissen wegen dieses Verhaltens auch Windungspunkte. Führt man diese Construction für die sämmtlichen Verzweigungspunkte ξ_i, von denen auch einige über einander liegen können, durch, so stellt die Fläche in der Umgebung derselben die Verzweigungsart der Function y in der richtigen Weise dar.

Indem man die λ_i Blätter, die in ξ_i zusammenhängen, längs der Schnitte S_i verbindet, tritt aber auch die in jenen λ_i Blättern über a liegende Gruppe vor λ_i Punkten zu einem Punkte zusammen, der für den Augenblick durch a_i bezeichnet sei. Es hängen also, wenn die angegebene Construction für die sämmtlichen Verzweigungspunkte ξ_i durchgeführt ist, die n Blätter noch in den über a liegenden Gruppenpunkten a_i in gewisser Weise zusammen. Soll die Verzweigungsart der Function y auch im Punkte a durch die Fläche dargestellt sein, so müssen, da a ein regulärer Punkt war, die letzteren Zusammenhänge sich wieder aufheben oder die n Blätter in den über a liegenden Punkten sich wieder trennen. Dies ist in der That der Fall. Umläuft man nämlich in der einfachen x-Ebene mit einer beliebigen Zweigfunction y_k eine geschlossene Curve, die alle Verzweigungspunkte ξ_i und den einfachen Punkt a einschliesst, so tritt keine Werthänderung von y_k ein. Die geschlossene Curve lässt

sich aber zusammenziehen in die Gesammtheit der von a ausgehenden, die Verzweigungspunkte ξ_i umschliessenden Schleifen s_i. Daher kann auch keine Werthänderung von y_k eintreten, wenn man in der x-Ebene die Schleifen s_i in der früher festgesetzten Ordnung durchläuft. Nun finden aber in den Gruppenpunkten a_i dieselben Zusammenhänge der Blätter statt, wie in den entsprechenden Verzweigungspunkten ξ_i. Daher folgt, dass in der oben construirten, n-blättrigen Fläche die im Punkt a dem k^{ten} Blatt zugeordnete Zweigfunction y_k, wenn man dieselbe, im k^{ten} Blatt beginnend und stetig in der Fläche fortgehend, um die über a liegenden Punkte a_i auf einem kleinem Kreise herumführt, wobei sie an jedem in diesen Punkten einmündenden Schnitte S_i in ein anderes Blatt eintreten kann, doch nach einmaligem Umlaufen in das k^{te} Blatt zurückkehrt, dass also wirklich die n Zweige in den n Blättern über dem Punkt a getrennt verlaufen.

Nach dem Vorstehenden erscheint die Construction der n-blättrigen Fläche immer noch in Abhängigkeit von dem Punkte a, da die von den Verzweigungspunkten ausgehenden Schnitte S_i, längs deren die Blätter zusammenhängen, alle in den über a liegenden Punkten der Fläche zusammenlaufen. Es lassen sich aber offenbar die die Blätter aneinander fügenden Schnitte S_i in gewisse Gruppen zusammenfassen, als solche von einander trennen und von a aus verschieben, ohne kritische Punkte zu überschreiten, so dass die Verzweigung von y ungestört bleibt. Hierdurch erhält man eine von dem zufällig gewählten Punkte a ganz unabhängige Fläche. Dies ist die gesuchte Verzweigungsfläche T der n-werthigen Function y. Die Linien zwischen den Verzweigungspunkten, längs deren die n Blätter zusammenhängen, heissen die Verzweigungsschnitte der Fläche T. Die angegebene Construction liefert die Verzweigungsfläche von y in mannigfacher Form, da die Anordnung der Verzweigungsschnitte noch mancherlei Aenderungen zulässt. Wie aber auch die Wahl derselben getroffen sei, die Verzweigungsfläche von y muss bei unsrer Voraussetzung, dass die Gleichung $F(x, y) = 0$ unzerfällbar sei, nach Satz VI § 1 stets eine einzige, zusammenhängende Fläche sein und nicht blos in einzelnen Punkten, sondern längs ganzer Verzweigungsschnitte zusammenhängen.

Aus der Construction geht zugleich hervor, dass die durch $F(x, y) = 0$ definirte Function y in der n-blättrigen Fläche T sich verhält wie eine eindeutige Function, d. h. dass jeder in der Fläche von einem Punkt zu einem anderen führende Weg, der nicht durch einen kritischen Punkt geht, auch stets denselben Endwerth der Function liefert.

Die n-blättrige Verzweigungsfläche T erläutert nun das Verhalten der Zweigfunctionen noch anschaulicher als die einfache x-Ebene. Wie schon bemerkt, ist ein jeder Punkt eines jeden Blattes nicht durch den Werth von x allein, sondern erst durch ein Werthepaar (x, y), das der Gleichung $F(x, y) = 0$ genügt, charakterisirt.

Hat nun für einen Punkt $x = a$ der x-Ebene eine Zweigfunction y den Werth b (während die übrigen Zweigfunctionen beliebige, auch unter sich gleiche, nur von b verschiedene Werthe annehmen sollen) so gehört in der Fläche T das Werthepaar (a, b) einem bestimmten Punkt eines bestimmten Blattes an, in dessen Umgebung dieses Blatt völlig getrennt von den anderen Blättern verläuft. Ein solcher Punkt (a, b) soll ein einfacher Punkt der Fläche T heissen. Einem regulären Punkt $x = a$ der x-Ebene entsprechen also in T n über a liegende, einfache Punkte, in jedem Blatt ein solcher Punkt.

Haben dagegen für einen Punkt $x = a$ der x-Ebene λ (> 1) Zweigfunctionen y denselben Werth b und bilden diese in der Umgebung von $x = a$ einen einzigen Cyclus (während die übrigen Zweigfunctionen wieder beliebige, nur von b verschiedene Werthe annehmen sollen), so bezeichnet in der Fläche T das Werthepaar (a, b) gleichzeitig λ Punkte, die in einen Punkt zusammenfallen, in dessen Umgebung die λ entsprechenden Blätter schraubenförmig zusammenhängen. Ein solcher Punkt (a, b) heisst ein $\lambda - 1$-facher Verzweigungspunkt oder Windungspunkt der Fläche T. Ist $\lambda = 2$, so heisst der Punkt (a, b) ein einfacher Verzweigungspunkt der Fläche T.

Haben endlich für einen Punkt $x = a$ der x-Ebene μ (> 1) Zweigfunctionen y denselben Werth b, ohne in der Umgebung von $x = a$ zusammen zu hängen (während die übrigen Zweigfunctionen beliebig, aber von b verschieden sind), so bezeichnet in der Fläche T das Werthepaar (a, b) gleichzeitig μ Punkte, die in einen Punkt zusammenfallen, in dessen Umgebung aber die μ entsprechenden Blätter getrennt verlaufen. Ein solcher Punkt (a, b) heisst ein μ-facher Punkt mit getrennten Blättern der Fläche T. In einem solchen Punkte hängen die μ Blätter nicht zusammen; um indess anzudeuten, dass in ihm den μ Blättern derselbe Werth von y zukommt, gebrauchen wir den Ausdruck, die μ Blätter berühren sich in dem betreffenden Punkt. Ist $\mu = 2$, so heisst der Punkt (a, b) ein Doppelpunkt der Fläche T.

Nach Satz V § 1 sondern sich im allgemeinsten Falle die demselben Werth $x = a$ in der Fläche T entsprechenden n Punkte in Gruppen von Punkten (a, b), (a, b_1), . ., deren jede gleichzeitig ein-

fache Punkte, mehrfache Punkte mit getrennten Blättern und einen oder mehrere Verzweigungspunkte von beliebiger Ordnung enthalten kann.

Die n-blättrige Fläche T erläutert ferner in einfacher Weise den Charakter der Reihenentwicklung der Zweigfunctionen y in der Umgebung der betrachteten Punkte.

Aus den Sätzen I und II § 1 folgt:

(I) Ist (a, b) ein einfacher Punkt der Fläche T, in dem also y den endlichen Werth b hat und das zugehörige Blatt von den anderen getrennt verläuft, so besitzt die zugehörige Zweigfunction y in der Umgebung des Punktes eine für das zugehörige Blatt gültige Reihenentwicklung, die nach ganzen, positiven Potenzen von $x-a$ fortschreitet und einen gewissen Convergenzkreis hat.

Diese Entwicklung ist also von der Form

$$y-b=\alpha(x-a)+\beta(x-a)^2+\gamma(x-a)^3+\cdots. \tag{3}$$

Hier können von den Coefficienten $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ auch etliche in endlicher Zahl verschwinden. Ist (a, b_1) ein zweiter einfacher Punkt, der über dem ersteren in einem anderen Blatte liegt, so gilt für die zugehörige Zweigfunction und für das Blatt eine Entwicklung von derselben Form (3), nur mit anderen Coefficienten $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \ldots$ und im Allgemeinen mit anderem Convergenzkreis.

Ist (a, ∞) ein einfacher Punkt, in dem nur eine Zweigfunction unendlich wird, während die übrigen endlich sind, so gilt für diese Zweigfunction eine Entwicklung, die neben ganzzahligen Potenzen von $x-a$ mit positiven noch solche mit negativen Exponenten in endlicher Zahl enthält.

(II) Ist (a, b) in T ein μ-facher Punkt ohne Verzweigung, in dem also μ Zweigfunctionen y denselben Werth b haben und die μ zugehörigen Blätter sich ohne zusammen zu hängen berühren, so besitzt jede dieser μ Zweigfunctionen in der Umgebung des Punktes eine besondere, für das ihr zugehörige Blatt gültige Reihenentwicklung, die nach ganzen Potenzen von $x-a$ fortschreitet und einen besonderen Convergenzkreis hat.

Diese Entwicklungen sind also von der Form

$$y-b=\alpha_i(x-a)+\beta_i(x-a)^2+\gamma_i(x-a)^3+\cdots \quad (i=1,2,\cdot\cdot,\mu). \tag{4}$$

Auch hier können die Coefficienten $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \ldots$ in endlicher Zahl verschwinden. Sind die μ in a gleichen Zweigfunctionen unendlich, so

treten in den μ zugehörigen Reihenentwicklungen neben den Potenzen mit positiven auch solche mit negativen Exponenten in endlicher Zahl auf.

Anders beschaffen sind die Reihenentwicklungen in der Umgebung eines Verzweigungspunktes; hier gilt der Satz[1]):

(III) Ist (a, b) ein $\lambda - 1$-facher Verzweigungspunkt der Fläche T, in dem λ Zweigfunctionen y denselben Werth b haben und die λ zugehörigen Blätter schraubenförmig zusammenhängen, so besitzen diese λ Zweigfunctionen in der Umgebung des Punktes eine gemeinsame, für alle λ Blätter gültige Reihenentwicklung, die nach ganzen, positiven Potenzen von $(x - a)^{\frac{1}{\lambda}}$ fortschreitet und einen gewissen Convergenzkreis hat.

Zum Beweise benutzt man die Vorstellung eines Verzweigungspunktes als Windungspunkt der Fläche T. Man führe statt x eine neue Variable ξ ein durch die Substitution $x - a = \xi^\lambda$, wodurch

$$y = f(x) = f(a + \xi^\lambda) = \varphi(\xi)$$

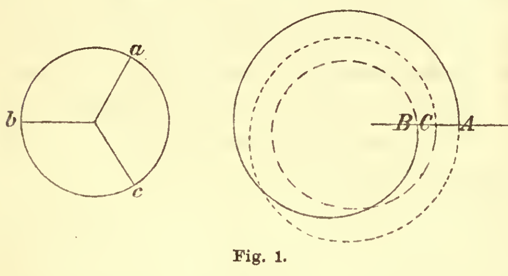


Fig. 1.

wird. Um zu untersuchen, wie sich $\varphi(\xi)$ in der Umgebung des Punktes $\xi = 0$ einer ξ-Ebene verhält, bilde man die λ im Punkt (a, b) zusammenhängenden Blätter der Verzweigungsfläche T durch die angegebene Substitution auf die ξ-Ebene ab. (Fig. 1, wo $\lambda = 3$.) Zu diesem Zwecke setze man

$$x - a = r(\cos\varphi + i \sin\varphi),$$

so dass

$$\xi = r^{\frac{1}{\lambda}}\left(\cos\frac{\varphi}{\lambda} + i \sin\frac{\varphi}{\lambda}\right)$$

wird. Lässt man nun den Punkt (x, y) in der Verzweigungsfläche T eine geschlossene Curve um (a, b) beschreiben, die sich aus λ über einander liegenden kreisförmigen Umläufen um (a, b) vom Radius r zusammensetzt, so bleibt längs derselben r, also auch $r^{\frac{1}{\lambda}}$ constant und es beschreibt folglich auch ξ einen Kreis um den Punkt $\xi = 0$ der ξ-Ebene vom Radius $r^{\frac{1}{\lambda}}$. Dabei wächst bei jedem Umlauf von

---

1) Riemann, Ges. W. S. 25 ff.

(x, y) φ um 2π, also $\frac{\varphi}{\lambda}$ um $\frac{2\pi}{\lambda}$, oder den λ Kreisflächen von T, die der Radius r während des Umlaufs um (a, b) überstreicht, entsprechen in der ξ-Ebene λ Kreissectoren vom Centriwinkel $\frac{2\pi}{\lambda}$. Während also (x, y) nach λ Umläufen, kehrt ξ schon nach einem Umlauf zu seinem Ausgangspunkt zurück. Da hiernach ξ nicht aus seinem Blatt heraustritt, hat die Function $y = \varphi(\xi)$ in $\xi = 0$ keinen Verzweigungspunkt, sie ist vielmehr in der Umgebung von $\xi = 0$ eindeutig und entwickelbar nach ganzen Potenzen von ξ. Hieraus folgt aber für $y = f(x)$ eine Entwicklung, die in der Umgebung von (a, b) für die λ Zweigfunctionen y gemeinsam gilt und von der Form ist

$$y - b = \alpha_1 (x - a)^{\frac{1}{\lambda}} + \alpha_2 (x - a)^{\frac{2}{\lambda}} + \cdots. \tag{5}$$

Man kann auch leicht die Entwicklung von y in jedem der λ in (a, b) zusammenhängenden Blätter angeben. Setzt man $e^{\frac{2i\pi}{\lambda}} = \varepsilon$ und berücksichtigt, dass bei jedem Umlaufen von (a, b) $(x - a)^{\frac{1}{\lambda}}$ in $\varepsilon (x - a)^{\frac{1}{\lambda}}$ übergeht, so erhält man, wenn (5) den Werth von y in einem Punkte des ersten der λ Blätter darstellt, den Werth y_1 von y in dem entsprechenden Punkte $x = a$ des zweiten Blattes aus

$$y_1 - b = \varepsilon \alpha_1 (x - a)^{\frac{1}{\lambda}} + \varepsilon^2 \alpha_2 (x - a)^{\frac{2}{\lambda}} + \cdots$$

und den Werth y_2 von y in dem entsprechenden Punkte $x = a$ des dritten Blattes aus

$$y_2 - b = \varepsilon^2 \alpha_1 (x - a)^{\frac{1}{\lambda}} + \varepsilon^4 \alpha_2 (x - a)^{\frac{2}{\lambda}} + \cdots \qquad \text{u. s. f.}$$

Auch hier können die Coefficienten $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ in endlicher Zahl verschwinden; aber die Entwicklung beginnt in jedem der λ Blätter mit derselben ganzzahligen Potenz von $(x - a)^{\frac{1}{\lambda}}$.

Haben die λ Zweigfunctionen y für $x = a$ den Werth ∞, so treten auf der rechten Seite in (5) noch Glieder auf, die ganzzahlige Potenzen von $(x - a)^{\frac{1}{\lambda}}$ mit negativen Exponenten in endlicher Anzahl enthalten.

Fasst man das Vorstehende zusammen, so kann man den Satz (V) § 1 über die Beschaffenheit des allgemeinsten, kritischen Punktes auch so aussprechen:

(IV) Die über einem kritischen Punkte $x = a$ der x-Ebene liegenden n Punkte der Verzweigungsfläche T treten

gruppenweise zusammen in Punkte (a, b), (a, b_1), ... Die durch einen solchen Punkt, z. B. (a, b) gehenden Blätter der Fläche trennen sich wieder in solche, die in der Umgebung des Punktes unverzweigt oder getrennt verlaufen und in solche, die einen oder mehrere Cyclen bilden. Die zugehörigen Reihenentwicklungen der Function y sind in den Formen (3), (4), (5), enthalten.

Es ist zweckmässig und besonders für Abzählungen vereinfachend, mit Riemann[1]) folgende Ausdrucksweise einzuführen.

Ist (a, b) ein einfacher Punkt im Endlichen von T, so soll in diesem Punkte für das zugehörige Blatt die Grösse $x - a$ als unendlich klein von der Ordnung 1 oder durch 0^1, die Grösse $(x - a)^{-1}$ als unendlich gross von der Ordnung 1 oder durch ∞^1 bezeichnet sein, also z. B. $(x - a)^\mu = 0^\mu$ und $(x - a)^{-\mu} = \infty^\mu$ gesetzt werden. Liegt der einfache Punkt im Unendlichen von T, so soll in ihm $x = \infty^1$ und $x^{-1} = 0^1$ gesetzt werden.

Ist (a, b) ein μ-facher Punkt mit getrennten Blättern im Endlichen von T, so soll in diesem Punkte für jedes der μ in ihm sich berührenden Blätter die Grösse $x - a = 0^1$ und $(x - a)^{-1} = \infty^1$ gesetzt werden. Liegt der μ-fache Punkt im Unendlichen von T, so soll in ihm für jedes der μ Blätter $x = \infty^1$ und $x^{-1} = 0^1$ sein.

Ist (a, b) ein $\lambda - 1$-facher Verzweigungspunkt im Endlichen von T, so soll in diesem Punkt für die λ in ihm zusammenhängenden Blätter $(x - a)^{\frac{1}{\lambda}} = 0^1$ und $(x - a)^{-\frac{1}{\lambda}} = \infty^1$ gesetzt werden. Liegt der $\lambda - 1$-fache Verzweigungspunkt im Unendlichen von T, so soll in ihm $x^{\frac{1}{\lambda}} = \infty^1$ und $x^{-\frac{1}{\lambda}} = 0^1$ gesetzt werden.

Wir erwähnen hier noch einer geometrischen Vorstellung, die für die Erläuterung von analytischen Operationen von Interesse ist. Zu dem Zwecke unterscheiden wir verschiedene Arten von mehrfachen Punkten oder Verzweigungspunkten.

Ein μ-facher Punkt (a, b) mit getrennten Zweigen möge, wenn die μ Entwicklungen (4) von $y - b$ sämmtlich mit dem Gliede $(x - a)^1$ beginnen, ein μ-facher Punkt erster Art, andernfalls ein μ-facher Punkt höherer Art heissen.

Ein $\lambda - 1$-facher Verzweigungspunkt (a, b) möge, wenn die Entwicklung (5) von $y - b$ mit dem Gliede $(x - a)^{\frac{1}{\lambda}}$ beginnt, ein $\lambda - 1$-facher Verzweigungspunkt erster Art, andernfalls ein $\lambda - 1$-facher Verzweigungspunkt höherer Art heissen.

---

1) Riemann, Ges. W. S. 96.

Wir zeigen an zwei Beispielen, wie sich singuläre Punkte erzeugen lassen durch einen Grenzübergang, indem man nämlich einfache Verzweigungspunkte zusammenrücken lässt, was einer Variation der Coefficienten in $F(x, y) = 0$ entspricht.

(V) 1. Ein $\lambda - 1$-facher Verzweigungspunkt 1. Art entsteht durch Zusammenfallen von $\lambda - 1$ einfachen Verzweigungspunkten 1. Art von gewisser Lage. (Fig. 2, wo $\lambda = 4$.)

Zum Beweise betrachten wir λ Blätter $B_1, .., B_\lambda$ und $\lambda - 1$ einfache Verzweigungspunkte 1. Art $\xi_1, .., \xi_{\lambda-1}$. Längs den von den letzteren ausgehenden Verzweigungsschnitten $S_1, .., S_{\lambda-1}$ mögen bez. die Blätterpaare B_1 und B_λ, B_2 und $B_\lambda, .., B_{\lambda-1}$ und B_λ zusammenhängen. Die Punkte ξ sollen so nahe zusammenliegen und die Linien S eine solche Lage haben, dass ein alle Punkte ξ umschliessender und keinen anderen Verzweigungspunkt einschliessender Kreis der Reihe nach die Linien $S_1, S_2, .., S_{\lambda-1}$ trifft. Geht man von einem im Blatt B_1 auf dem Kreise liegenden Punkt aus, so führt ein einmaliges Durchlaufen des Kreises in das Blatt B_2, da man an dem Verzweigungsschnitt S_1 aus B_1 nach B_λ, an S_2 aus B_λ nach B_2 kommt und an den übrigen Verzweigungsschnitten stets in B_2 bleibt. So ist ersichtlich, dass ein einmaliges Durchlaufen des Kreises aus den Blättern $B_1, B_2, .., B_{\lambda-1}, B_\lambda$ bez. in die Blätter $B_2, B_3, .., B_\lambda, B_1$ führt, also erst ein λ-maliges Durchlaufen des Kreises in das ursprüngliche Blatt zurückführt. Lässt man daher die $\lambda - 1$ Punkte ξ_i in einen Punkt Ξ zusammenfallen, so zeigt dieser Punkt das nämliche Verhalten wie ein $\lambda - 1$-facher Verzweigungspunkt. Der Punkt Ξ absorbirt, wie man auch sagt, $\lambda - 1$ einfache Verzweigungspunkte. Dass Ξ ein Verzweigungspunkt 1. Art ist, folgt später analytisch aus dem Satze (II) § 5.

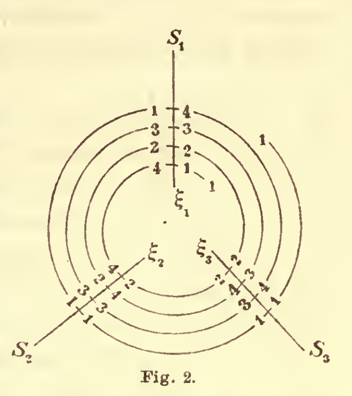


Fig. 2.

(VI) 2. Ein μ-facher Punkt 1. Art entsteht durch Zusammenfallen von $\mu(\mu - 1)$ einfachen Verzweigungspunkten 1. Art von gewisser Lage. (Fig. 3, wo $\mu = 3$.)

Wir betrachten μ Blätter $B_1, .., B_\mu$ und $\frac{1}{2}\mu(\mu - 1)$ Paare von einfachen Verzweigungspunkten 1. Art. Es sei ξ_{ik} und ξ_{ki} ein solches Paar, es seien S_{ik} und S_{ki} die bez. von ξ_{ik} und ξ_{ki} ausgehenden Verzweigungsschnitte und es mögen sowohl längs S_{ik} wie längs S_{ki}

die Blätter B_i und B_k zusammenhängen. Die genannten Punkte ξ sollen ferner so nahe zusammenliegen und die zugehörigen Linien S eine solche Lage haben, dass ein alle ξ umschliessender und keinen anderen Verzweigungspunkt einschliessender Kreis der Reihe nach alle Linien S trifft und zwar jedesmal unmittelbar nach der Linie S_{ik} die Linie S_{ki}. Geht man von einem im Blatt B_1 auf dem Kreise liegenden Punkt aus, so kommt man nach einmaligem Durchlaufen des Kreises, wie leicht zu sehen, wieder in denselben Punkt des Blattes B_1 zurück. Dasselbe gilt von jedem der μ Blätter. Lässt man daher die $\mu(\mu-1)$ Punkte ξ zusammenrücken, so zeigt der entstehende Punkt Ξ dasselbe Verhalten, wie ein μ-facher Punkt mit getrennten Blättern. Lässt man, bevor alle Punkte ξ zusammenfallen, zunächst nur je ein Paar ξ_{ik}

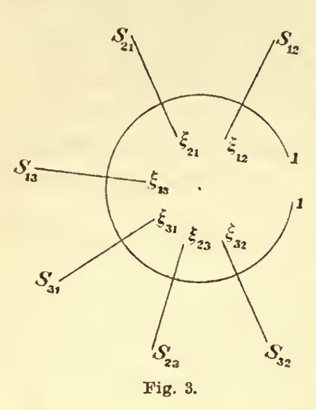


Fig. 3.

und ξ_{ki} $(i, k = 1, .., \mu)$ sich vereinigen, so entstehen $\frac{1}{2}\mu(\mu-1)$ Doppelpunkte (S. 20) und durch Zusammenrücken dieser Doppelpunkte ebenfalls der Punkt Ξ. Dieser Punkt absorbirt also $\mu(\mu-1)$ einfache Verzweigungspunkte oder $\frac{1}{2}\mu(\mu-1)$ Doppelpunkte. Dass Ξ ein μ-facher Punkt 1. Art ist, ergibt sich analytisch durch die Abzählungen des Satzes (III) § 5.

Die Sätze 1. und 2. beziehen sich auf Verzweigungspunkte und mehrfache Punkte 1. Art. In ähnlicher Weise lässt sich jeder Verzweigungspunkt oder mehrfache Punkt höherer Art auffassen als entstanden durch Zusammenfallen einer Anzahl von einfachen Verzweigungspunkten 1. Art, welche verschiedene Blattpaare verbinden. Um wenigstens ein Beispiel von Punkten höherer Art zu geben, sei (a, b) ein einfacher Verzweigungspunkt, für den die Entwicklung von y nach Potenzen von $(x-a)^{\frac{1}{2}}$ mit dem Gliede $x-a$ beginnt, also lautet[1]):

$$(6) \qquad y - b = \alpha_2(x-a) + \alpha_3(x-a)^{\frac{3}{2}} + \cdots.$$

Wie eine geometrische Betrachtung ähnlich der obigen und eine Abzählung ähnlich der in § 5 zeigt, entsteht ein solcher Punkt durch Zusammenfallen von drei einfachen Verzweigungspunkten 1. Art,

1) Man kann den Punkt einen Rückkehrpunkt der Fläche T nennen (vgl. § 5).

welche dieselben zwei Blätter von T verbinden. Dabei vereinigen sich zwei der drei Punkte zu einem Doppelpunkt (ihre Verzweigung hebt sich auf nach Riemann's Ausdruck[1]), der dritte bleibt als Vereinigungspunkt erhalten.

Für spätere Untersuchungen ist noch eine wichtige Frage zu erledigen. Die im Vorigen construirte n-blättrige Verzweigungsfläche T ist mehrfach zusammenhängend, kann aber durch Querschnitte in eine einfach zusammenhängende Fläche verwandelt werden. Es bleibt also die Zahl und Lage dieser Querschnitte zu untersuchen. Wir erinnern an die folgenden Erklärungen und Sätze der allgemeinen Functionentheorie[2].

Eine beliebig im Raum gelegene Fläche heisst einfach zusammenhängend, wenn in ihr jede geschlossene Linie für sich allein die vollständige Begrenzung eines Flächentheiles bildet; eine solche Fläche ist immer von einer einzigen Linie begrenzt.

Eine Fläche heisst mehrfach zusammenhängend, wenn es in ihr geschlossene Linien gibt, die nicht für sich allein, sondern nur im Verein mit Randcurven der Fläche die vollständige Begrenzung eines Flächentheiles bilden. Das einfachste Beispiel einer einfach zusammenhängenden Fläche ist etwa eine Kreisfläche, das einer mehrfach zusammenhängenden Fläche eine an mehreren Stellen durchlöcherte Kreisfläche.

Querschnitt der Fläche heisst ein Schnitt, der von einem Randpunkt der Fläche durch das Innere zu einem anderen Randpunkt der Fläche führt, ohne dazwischen den Rand der Fläche zu berühren oder zu überschreiten.

Rückkehrschnitt der Fläche heisst ein in sich zurücklaufender Schnitt, der den Rand der Fläche nirgends berührt oder überschreitet und sich selber nirgends durchkreuzt.

Werden mehrere Querschnitte und Rückkehrschnitte nach einander gelegt, so sind jedesmal, nachdem ein solcher Schnitt gelegt ist, seine beiden Ränder mit zur Begrenzung zu nehmen.

Eine mehrfach zusammenhängende Fläche A lässt sich stets auf verschiedene Arten durch Querschnitte in eine einfach zusammenhängende Fläche A' verwandeln; dabei gilt der Satz:

Für alle diese Verwandlungen ist die Zahl der Querschnitte die gleiche. Ist diese Zahl $= m$, so heisst die

---

1) Riemann, Ges. W. S. 104 u. 105.

2) Riemann, Ges. W. S. 85 ff. Das Folgende schliesst sich an C. Neumann, Vorl. über Riemann's Theoris etc. S. 146 ff. an.

Fläche $m+1$-fach zusammenhängend und $m+1$ die Grundzahl der Fläche.

Man kann dies verallgemeinern. Ein aus beliebig vielen, mehrfach zusammenhängenden Flächen bestehendes System S lässt sich stets auf verschiedene Arten durch Querschnitte in ein aus lauter einfach zusammenhängenden Flächen bestehendes System S' verwandeln; dabei gilt der Satz:

Für alle diese Verwandlungen von S ist die Differenz $m-\alpha$ zwischen der jedesmaligen Anzahl m der Querschnitte und der jedesmaligen Zahl α der einfach zusammenhängenden Flächenstücke von S' die gleiche. Die Zahl $m-\alpha+2$ heisst die Grundzahl des Flächensystemes S.

Die Grundzahl einer Fläche oder eines Systems von Flächen ändert sich nicht, wenn man beliebige Rückkehrschnitte hinzufügt oder wegnimmt; sie ändert sich auch nicht bei stetiger Deformation der Fläche (d. h. Dehnung und Biegung ohne Zerreissung oder Zusammenfaltung), da hierbei jeder Querschnitt und Rückkehrschnitt als solcher erhalten bleibt.

Ist eine mehrfach zusammenhängende Fläche A geschlossen d. h. ohne Begrenzung, wie z. B. die Oberfläche einer Kugel oder eines Ringes, so macht man dieselbe zunächst durch Punktirung d. h. Ausscheidung eines beliebigen Punktes (oder kleinen Kreises) zu einer begrenzten Fläche $\dot{A}$ (punktirte Fläche). Die weitere Verwandlung in eine einfach zusammenhängende Fläche geschieht so, dass der erste Querschnitt ein von diesem Begrenzungspunkt ausgehender und in ihn zurückkehrender Schnitt ist, der hier nicht als Rückkehrschnitt zu betrachten ist. Die Zahl der Querschnitte, die erforderlich ist, eine geschlossene Fläche in eine einfach zusammenhängende Fläche zu verwandeln, ist stets gerade. Denn die Begrenzung einer einfach zusammenhängenden Fläche besteht aus einer Linie; die geschlossene Fläche aber erhält durch eine ungerade Anzahl von Querschnitten eine gerade Zahl von Grenzlinien, durch eine gerade Anzahl von Querschnitten eine ungerade Zahl von Grenzlinien. Eine Ringfläche z. B. wird durch zwei Querschnitte (etwa eine Meridianlinie und einen Parallelkreis), eine an vier Stellen durchlöcherte Ringfläche durch fünf Querschnitte in eine einfach zusammenhängende Fläche verwandelt (im letzten Falle findet keine Punktirung statt).

Die Anwendung dieser Sätze auf die n-blättrige, kugelförmige Verzweigungsfläche T ergibt Folgendes. Da T eine geschlossene Fläche ist, so ist die Zahl der Querschnitte, die T in eine einfach

zusammenhängende Fläche verwandelt, eine gerade Zahl $= 2p$ oder die Grundzahl der Fläche ist $= 2p + 1$. Die Zahl p ist von fundamentaler Bedeutung und heisst das Geschlecht der Gleichung $F(x, y) = 0$. Um sie zu bestimmen (Fig. 4), nehmen wir an, T habe im Ganzen ϱ verschiedene Verzweigungs- oder Windungspunkte $\xi_1, \ldots, \xi_\varrho$ bez. von der Ordnung $\lambda_1, \ldots, \lambda_\varrho$ und denken uns durch stetige Umformung der Fläche diese Punkte derart verschoben, dass nirgends zwei solcher Punkte übereinander liegen. Wir bilden aus T eine punktirte Fläche $\dot{T}$ und führen in $\dot{T}$ zwei kreisförmige und ϱ geradlinige (eigentlich bogenförmige) also im Ganzen $\varrho + 2$ Schnitte, von denen jeder die sämmtlichen n Blätter durchdringt.

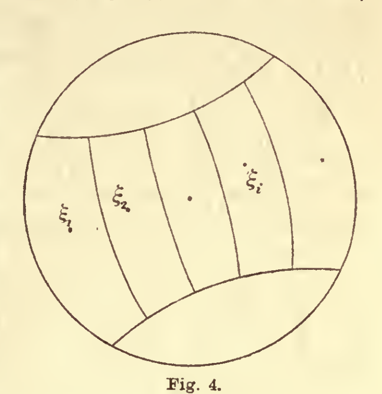


Fig. 4.

Durch die zwei Kreisschnitte werde T in einen gürtelförmigen Theil G, der sämmtliche Verzweigungspunkte enthält, und in zwei äussere, calottenförmige Theile C und C' zerlegt. Durch die ϱ geradlinigen Schnitte, von denen jeder einen Punkt von C mit einem Punkte von C' verbindet, werde der Theil G in ϱ Theile $G_1, \ldots, G_\varrho$ zerlegt, deren jeder nur je einen der ϱ Vereinigungspunkte $\xi_1, \ldots, \xi_\varrho$ enthält, der Theil G_i etwa den Punkt ξ_i. Die Calotte C (und ebenso C') besteht aus n getrennten, einfach zusammenhängenden Flächenstücken, die Fläche G_i aus $n - \lambda_i$ einblättrigen Stücken und einer λ_i-blättrigen Windungsfläche, im Ganzen also aus $n - \lambda_i + 1$ einfach zusammenhängenden Stücken (da die λ_i-blättrige Windungsfläche durch stetige Deformation einfach zusammenhängend gemacht werden kann).

Durch die $\varrho + 2$ Schnitte wird die Fläche T im Ganzen in

$$\alpha = 2n + \sum_i (n - \lambda_i + 1) = 2n + \varrho n - \sum_i (\lambda_i - 1) \quad (i = 1, \cdot\cdot, \varrho)$$

einzelne und einfach zusammenhängende Stücke verwandelt. Die $\varrho + 2$ Schnitte repräsentiren aber, da sie alle n Blätter durchdringen, im Ganzen $m = \varrho n + 1$ Querschnitte und $2n - 1$ Rückkehrschnitte. Denn von den $2n$ kreisförmigen Schnitten ist einer (der durch die punktirte Stelle gehende) als Querschnitt, die anderen sind als Rückkehrschnitte anzusehen. Die ϱn geradlinigen Schnitte aber sind sämmtlich Querschnitte. Aus den Zahlen m und α erhält man die Grundzahl der Fläche T, nämlich $2p + 1 = m - \alpha + 2$; man findet

$$2p = \sum_i (\lambda_i - 1) - 2n + 2 \qquad (i = 1, \cdot\cdot, \varrho). \tag{7}$$

Sind sämmtliche ϱ Verzweigungspunkte einfach, oder ist $\lambda_i = 2$ $(i = 1, .., \varrho)$ und ist die Zahl der einfachen Verzweigungspunkte $= \omega$, so hat man

$$(8) \qquad 2p = \omega - 2n + 2.$$ [1])

Hiernach hat man den Satz:

(VII) Die n-blättrige Verzweigungsfläche T wird durch $2p$ Querschnitte in eine einfach zusammenhängende Fläche T' verwandelt. Die Zahl p, das Geschlecht der Gleichung $F(x, y) = 0$, ist bestimmt durch die Gleichung (7), in der ϱ die Zahl der Verzweigungspunkte in T und $\lambda_1, .., \lambda_\varrho$ die Ordnungszahlen dieser Punkte bedeuten.

Nachdem die Zahl $2p$ der Querschnitte, die T in eine einfach zusammenhäugende Fläche verwandeln, ermittelt ist, bleibt noch die Lage der Querschnitte zu untersuchen; diese kann in mannigfacher Weise gewählt werden. Besonders wichtig ist folgende, von Riemann[2]) angegebene, übersichtliche und symmetrische Anordnung. Man lege zunächst einen in sich zurückkehrenden Schnitt a_1, durch den die Fläche nicht in getrennte Stücke zerfällt. Dann besteht die Begrenzung der Fläche aus zwei getrennten Linien, nämlich den beiden Rändern von a_1. Nun lege man einen zweiten Schnitt b_1, der von einem Punkte des ersten Randes von a_1 nach dem gegenüberliegenden Punkte des zweiten Randes von a_1 führt. Dann besteht die Begrenzung der Fläche aus einer einzigen Linie, nämlich den beiden Rändern des Paares (a_1, b_1). Ist die Fläche noch nicht einfach zusammenhängend (also nicht $p = 1$), so ziehe man ein zweites Paar von Schnitten in derselben Weise (a_2, b_2) und stelle die Verbindung zwischen den beiden Querschnittpaaren (a_1, b_1) und (a_2, b_2) her durch zwei Schnitte c_1 und c_2, die von einem beliebig gewählten Punkt O der Fläche nach dem Kreuzungspunkt des Paares (a_1, b_1) und dem des Paares (a_2, b_2) führen. Nun besteht die Begrenzung der Fläche wieder aus einer einzigen Linie. Fährt man so fort, bis man schliesslich p Paare (a_i, b_i) und p einzelne Schnitte c_i hat, so ist die Fläche in eine einfach zusammenhängende verwandelt. Die Schnitte c_i, welche die Paare (a_i, b_i) mit einem und demselben Punkte O der Fläche verbinden, können beliebig zu a_i oder zu b_i gerechnet werden, so dass man in Wirklichkeit nur $2p$ Querschnitte hat. Die Linien

---

1) Riemann, Ges. W. S. 107 mit anderem Beweis. Einen dem obigen verwandten, geometrischen Beweis der Gleichung (8) gibt Riemann in seiner Vorlesung (Sommer 1861, s. Vorwort).

2) Riemann, Ges. W. S. 97.

c_i sind bei den meisten späteren Untersuchungen unwesentlich. Das System der p Querschnitte (a_i, b_i) und der p Schnitte c_i heisst ein kanonisches Querschnittsystem. Ein solches zeigt Fig. 5 (am Ende von § 3) für eine besondere Form der Fläche T. Es ist später (§ 38) die Frage zu behandeln, wie man verschiedene kanonische Querschnittsysteme der Fläche in einander überführen kann.

§. 3. Normalform der Verzweigungsfläche.[1])

Wir machen jetzt die Voraussetzung, dass von Verzweigungspunkten nur einfache auftreten, in denen also nur je zwei Blätter zusammenhängen, während die mehrfachen Punkte ohne Verzweigung beliebig seien. Alsdann lässt sich die Fläche T in eine besonders übersichtliche Normalform bringen, die sich eng an die bekannte Verzweigungsfläche der hyperelliptischen Functionen anschliesst und den späteren Untersuchungen zu Grunde gelegt werden soll. Um diese Form zu erhalten, geht man von irgend einer Gestalt aus, welche die Verzweigungsfläche mit einfachen Verzweigungspunkten nach § 2 annehmen kann, und verfolgt die Abänderungen, die sich mit ihr vornehmen lassen.

In § 2 wurde gezeigt, dass die Verbindung der Blätter abhängt von der Reihenfolge, in welcher man eine sich nicht schneidende Curve C die Verzweigungspunkte treffen lässt. Es ist also die Veränderung zu untersuchen, welche die Fläche bei einer Umordnung der Verzweigungspunkte oder einer Veränderung der Curve C erfährt. Die Zahl der Verzweigungspunkte sei ω und die Punkte selber in der Ordnung, in der sie ursprünglich von C getroffen werden, seien $\xi_1, \ldots, \xi_{i-1}, \xi_i, \xi_{i+1}, \ldots, \xi_\omega$. Durch jeden Verzweigungspunkt ξ_i und die zugehörige Schleife s_i werden zwei bestimmte Zweige oder Blätter einander zugeordnet. Da eine Aenderung in der Ordnung der Verzweizweigungspunkte ξ immer auf eine wiederholte Vertauschung von zwei aufeinanderfolgenden Verzweigungspunkten hinauskommt, so vertausche man (Fig. 5) ξ_i und ξ_{i+1}, so dass die neue Anordnung der Verzweigungspunkte lautet $\xi_1, \ldots, \xi_{i-1}, \xi_{i+1}, \xi_i, \xi_{i+2}, \ldots, \xi_\omega$. Dabei bleiben

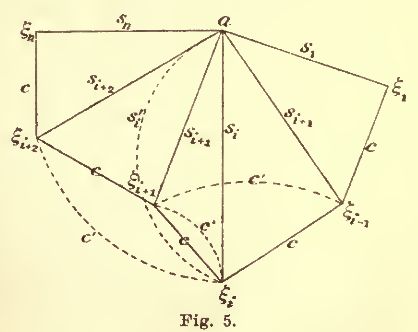


Fig. 5.

1) Lüroth, Math. Ann. IV. S. 181 (1871) für einfache Verzweigungspunkte; Münch. Abh. Bd. 15. S. 329 ff. (1885) für beliebige Verzweigungspunkte. Clebsch, Math. Ann. VI. S. 216 (1872).

die Schleifen nach den Punkten $\xi_1, .., \xi_{i-1}, \xi_{i+1}, .., \xi_\omega$ und die Verbindung der Blätter durch dieselben ungeändert. Nur die Schleife s_i nach dem Punkt ξ_i geht über in eine neue Schleife s_i', die über den Punkt ξ_{i+1} hinübergeschoben ist, so dass s_i' mit s_i den Verzweigungspunkt ξ_{i+1}, aber keinen anderen Verzweigungspunkt einschliesst. In Fig. 5 sind die neue Schleife s_i' und die veränderten Theile C' der Linie C durch punktirte Linien bezeichnet. Um die durch die Schleife s_i' im Punkt ξ_i verbundenen Zweige zu bestimmen, löse man dieselbe auf in die drei Schleifen s_{i+1}, s_i und abermals s_{i+1}, welche in der in Fig. 6 durch die Pfeile angegebenen Weise zu durchlaufen sind.

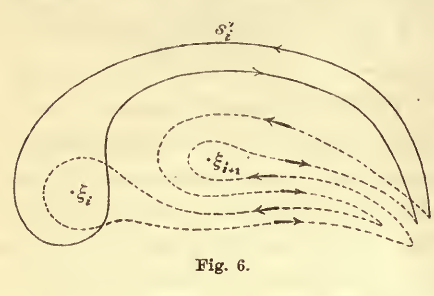


Fig. 6.

Hierbei sind drei Fälle zu unterscheiden:

1) Verbindet s_i die Zweige (y_p, y_q) und s_{i+1} die Zweige (y_r, y_t), so verbindet der neue Weg s_i' die Zweige (y_p, y_q). Denn beginnt man mit y_p, so führt der erste der drei Wege s_{i+1} y_p wieder in y_p, der zweite s_i y_p in y_q, der dritte s_{i+1} y_q wieder in y_q über. Beginnt man mit y_q, so gelangt man entsprechend zu y_p. Beginnt man dagegen mit y_r (oder y_t), so gelangt man wieder zu y_r (oder y_t). In derselben Weise ergibt sich:
2) Verbinden s_i und s_{i+1} dieselben Zweige (y_p, y_q), so verbindet auch s_i' die Zweige (y_p, y_q).
3) Verbindet s_i die Zweige (y_p, y_q), s_{i+1} die Zweige (y_q, y_r), so verbindet s_i' die Zweige (y_p, y_r).

Haben also die zwei Verzweigungspunkte ξ_i und ξ_{i+1} einen Zweig y_q gemein nnd zieht man ξ_{i+1} vor ξ_i, so verbindet die neue Schleife s_i' die nicht gemeinsamen Zweige y_p und y_r oder es vertauscht sich in dem übersprungenen Punkt ξ_i der Zweig y_q mit y_r. Durch Wiederholung dieses Verfahrens erhält man den Satz:

(I) Zieht man einen Verzweigungspunkt, der die Blätter (q, r) verband, vor andere Verzweigungspunkte, so vertauscht sich in allen übersprungenen Punkten, welche eins der Blätter q oder r enthalten, das Blatt q mit dem Blatt r.

Fasst man nun bei der ursprünglichen Anordnung alle Verzweigungspunkte, welche dieselben zwei Blätter i und k verbinden, zu einer Gruppe G_{ik} zusammen, so gilt für diese Gruppen der Satz:

(II) Die Curve C lässt sich so verändern, dass sie der Reihe nach die Punkte der Gruppen

$$G_{12},\ G_{13},\ \ldots,\ G_{1n},\ G_{23},\ \ldots,\ G_{2n},\ \ldots,\ G_{n-1,n} \qquad (1)$$

trifft. Von diesen Gruppen können selbstverständlich einzelne fehlen.

Es ist nur zu zeigen, dass man die $n-1$ ersten Gruppen in (1) vorziehen kann, so dass hinter ihnen kein Verzweigungspunkt mit dem Index 1 mehr auftritt. In derselben Weise lässt sich offenbar der Rest behandeln. Zunächst kann man die Gruppen G_{ik} so anordnen, dass die $n-1$ ersten Gruppen immer das erste Blatt mit einem beliebigen anderen verbinden, während die übrigen Gruppen den Index 1 nicht mehr enthalten. Wenn nämlich bei der ursprünglichen Anordnung zu Anfang Verzweigungspunkte stehen, die das erste Blatt, am Ende aber solche, die nur andere Blätter enthalten, so ist nur noch die zwischen ihnen befindliche Reihe von Punkten umzuordnen. Zu diesem Zweck ziehe man in der noch umzuordnenden Reihe den letzten noch dem Blatt 1 zugeordneten Verzweigungspunkt vor alle anderen Punkte der Reihe. Dieser Punkt scheidet dann nach (I) aus der Zahl der noch umzuordnenden Punkte aus; die Zahl derselben ist also wenigstens um 1 vermindert. Eine endliche Zahl von Wiederholungen dieses Verfahrens führt zu einer vorläufigen Anordnung, in welcher die $n-1$ ersten Gruppen von der Form sind G_{1h}, G_{1i}, G_{1k}, .., wo die Indices h, i, k, .. die Zahlen 2, 3, .., $n-1$, n in noch unbestimmter Reihenfolge bedeuten.

Nunmehr sind diese $n-1$ ersten Gruppen so umzuordnen, dass man die Reihe erhält G_{12}, G_{13}, .., G_{1n}. Von den Zahlen h, i, k, .. sei μ die kleinste und die Verbindung (1μ) trete α-mal auf. Man ziehe nun nach (I) diese α Punkte vor die übrigen. Man hat dann in der neuen Anordnung erstlich eine Anzahl von Punkten, welche die Blätter $(1, \mu)$ verbinden. In der darauf folgenden Reihe, die aus den übrig gebliebenen Punkten $(1, h)$, $(1, i)$, $(1, k)$, .. hervorgeht, kommen dann ausser 1 nur Zahlen vor, die mindestens $= \mu$ sind. Behandelt man diese Reihe ebenso wie oben die ganze Reihe der Verzweigungspunkte — theilt man sie also wieder in frühere Punkte, welchen das Blatt 1, und in spätere, welchen andere Blätter angehören —, so ist die Reihe der jetzt mit 1 verbundenen Punkte jedenfalls wenigstens um α kleiner als vorher. Ist nun ν $(\gtreqless \mu)$ die kleinste der hier mit 1 verbundenen Zahlen, so ziehe man wieder alle die Blätter $(1, \nu)$ verbindenden Verzweigungspunkte vor u. s. f. Man erhält auf

diese Weise eine Anordnung der Verzweigungspunkte in Gruppen folgender Art

$$G_{1\mu},\ G_{1\nu},\ G_{1\varrho}\ldots\quad (\text{wo } \mu \overline{\overline{<}}\, \nu \overline{\overline{<}}\, \varrho\ldots),$$

auf welche dann Punkte folgen, die mit dem Blatt 1 nicht mehr verbunden sind. (q. e. d.)

(III) Jede der Gruppen G_{ik} in (1) enthält eine gerade Zahl von Verzweigungspunkten. Die Anzahl aller Verzweigungspunkte ist daher ebenfalls gerade.

Beweis. Wenn man bei irgend einer Gestalt der Curve C in der x-Ebene, von dem regulären Punkt a mit einem beliebigen Zweigwerth y_i beginnend, das ganze Schleifensystem $s_1,\ldots,s_\omega$ durchläuft, so kommt man offenbar stets auf den Anfangswerth y_i zurück, weil das System der Schleifen s sich ansehen lässt als eine geschlossene Linie, die keinen Verzweigungspunkt einschliesst. Entspricht die Curve C der Anordnung (1), so folgt zunächst, dass die erste Gruppe G_{12} aus einer geraden Zahl von Verzweigungspunkten besteht. Denn, das Gegentheil angenommen, würde man, mit y_1 beginnend und das Schleifensystem durchlaufend, nicht auf y_1 zurückkommen, weil die Gruppe G_{12} auf y_2 führen würde und von den folgenden Gruppen keine auf y_1 zurückführen könnte. Nimmt man nun weiter an, der Satz sei bewiesen für alle Gruppen (1) bis zur Gruppe G_{ik} $(i<k)$, so muss er auch für diese Gruppe gelten. Denn enthielte G_{ik} eine ungerade Zahl von Verzweigungspunkten, so würde man, in a mit y_i beginnend und das Schleifensystem von den Verzweigungspunkten der Gruppe G_{ik} an cyclisch durchlaufend, durch G_{ik} auf die Wurzel y_k geführt, deren Index k sich erst wieder bei Gruppen vorfindet, welche grössere Indices als i enthalten. Der Rest der Schleifen führt also y_k nicht auf y_i zurück, sondern zu einer anderen Wurzel y_m $(m>i)$. Geht man nun cyclisch zu den ersten Schleifen über, die nach Voraussetzung jede eine gerade Anzahl von Verzweigungspunkten enthalten, so kommt man immer nur auf dieselbe Wurzel y_m, aber niemals auf y_i zurück. Es kann daher G_{ik} nicht eine ungerade Zahl von Punkten enthalten. (q. e. d.)

(IV) Die Gruppen G_{ik} lassen sich nach Belieben umordnen, ohne dass ihre Indices sich ändern.

Sind nämlich G_{ik} und G_{il} zwei auf einander folgende Gruppen in (1) und zieht man G_{il} vor G_{ik}, so wird beim Vorziehen des ersten Punktes von G_{il} in G_{ik} der Index i mit l vertauscht und die Gruppe G_{ik} geht über in eine Gruppe G_{kl}; beim Vorziehen des zweiten Punktes von G_{il} wird in dieser Gruppe G_{kl} der Index l mit i vertauscht und

die Gruppe G_{kl} geht wieder in die frühere Gruppe G_{ik} über. Da nun jede Gruppe eine gerade Zahl von Punkten enthält, so bleibt beim Vorziehen von G_{il} die Gruppe G_{ik} ungeändert. (q. e. d.)

(V) Eine Gruppe G_{kl} lässt sich, wenn eine Gruppe G_{ik} vorhanden ist, stets überführen in eine Gruppe G_{il}, wobei i, k, l ganz beliebige Indices sind.

Beweis. Die Gruppe G_{ik} enthalte 2α Punkte. Zwischen die $2\alpha - 1$ ersten und den letzten dieser Punkte schiebe man die Gruppe G_{kl}. Dies geschieht ohne Aenderung des Blätterzusammenhangs; denn man kann immer die Gruppe G_{kl} unmittelbar hinter G_{ik} stellen (nach IV) und sie dann vor den einen Punkt von G_{ik} ziehen. Nun ziehe man zweitens diesen einen Punkt wieder vor die ganze Gruppe G_{kl}. Die Gruppe G_{ik} ist dann wieder vollständig; in der Gruppe G_{kl} aber sind die Blätter k und i zu vertauschen, d. h. sie geht in die Gruppe G_{il} über. (q. e. d.)

(VI) Die sämmtlichen ω Verzweigungspunkte lassen sich in $n-1$ fundamentale Gruppen einordnen, von der Art, dass jede dieser Gruppen eine gerade Zahl von Punkten enthält und dass in diesen $n-1$ Gruppen sämmtliche n Blätter vertreten sind.

In der That, durch die Gruppen G_{ik} ist jedenfalls eine Verbindung der sämmtlichen Blätter hergestellt, da sonst die Verzweigungsfläche zerfallen müsste. Es besteht also zunächst eine Verbindung eines ersten Blattes i_1 mit irgend einem zweiten Blatte etwa i_2 oder eine Gruppe $G_{i_1 i_2}$; es besteht ferner eine Verbindung des Blattes i_1 oder i_2 mit einem dritten Blatte etwa i_3, also eine Gruppe $G_{i_1 i_3}$ oder eine Gruppe $G_{i_2 i_3}$ u. s. f. Man erhält so ein System von Gruppen, welche die Blätter so verbinden, dass i_2 mit i_1, i_3 mit i_1 oder i_2; i_4 mit i_1 oder i_2 oder i_3 u. s. f. zusammenhängt; diese Gruppen seien

$$\Gamma_1 = (i_1, i_2),\ \Gamma_2 = \begin{pmatrix} i_1 & \\ i_2 & i_3 \end{pmatrix}, \cdot\cdot,\ \Gamma_n = \begin{pmatrix} i_1 & \\ i_2 & i_n \\ \vdots & \\ i_{n-1} & \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Alle übrigen Gruppen $G_{\alpha\beta}$, wo α, β irgend zwei verschiedene der Zahlen $i_1, \ldots, i_n$ sind, lassen sich in eine der Gruppen (2) einordnen. Denn kommen α und β in einer der Gruppen Γ vereinigt vor, so tritt $G_{\alpha\beta}$ in diese Gruppe ein. Kommt aber in den Gruppen Γ α nicht mit β, sondern mit γ vereinigt vor, so kann man nach (V) die Curve C immer so abändern, dass die Gruppe $G_{\alpha\beta}$ in eine Gruppe $G_{\alpha\gamma}$ übergeht und dann sich mit einer Gruppe Γ vereinigt.

In den Gruppen (2) können die unter einander stehenden Indices nach (V) für einander substituirt werden; man kann also z. B. sämmtliche Verzweigungspunkte einordnen in $n-1$ Gruppen der Form

$$(3) \qquad \Gamma_1 = (i_1, i_2), \; \Gamma_2 = (i_1, i_3), \ldots, \; \Gamma_{n-1} = (i_1, i_n),$$

oder auch in $(n-1)$ Gruppen der Form

$$(4) \quad \Gamma_1 = (i_1, i_2), \; \Gamma_2 = (i_2, i_3), \ldots, \; \Gamma_{n-1} = (i_{n-1}, i_n). \text{ (q. e. d.)}$$

(VII) Aus jeder der $n-1$ Gruppen Γ_i (3) oder (4) lässt sich eine gerade Zahl von Verzweigungspunkten herausnehmen und in eine beliebige andere Gruppe einstellen; nur muss dabei die verminderte Gruppe noch bestehen bleiben, also mindestens noch zwei Punkte behalten.

Zum Beweise lege man etwa den Typus (4) zu Grunde und theile eine der Gruppen, z. B. Γ_1, in eine Gruppe Γ_1' und ein Paar, das eine Gruppe G_{12} bildet. Für diese kann man nach (V) zunächst G_{13} setzen, da Punkte folgen, welche die Blätter 2, 3 verbinden, sodann aber G_{23}, da Punkte vorhergehen, welche 1, 2 verbinden. Die neue Gruppe vereinigt sich also mit Γ_2 und erhöht die Zahl der Punkte dieser Gruppe um 2. Umgekehrt kann man ebenso die Gruppe Γ_2 vermindern und Γ_1 vermehren. (q. e. d.)

Fasst man die gewonnenen Resultate zusammen, so erhält man den Schlusssatz:

(VIII) Man kann, ausgehend von einer beliebigen Form der Verzweigungsfläche, durch Abänderung derselben immer eine neue Form der Fläche herleiten, in welcher die ω Verzweigungspunkte ganz beliebig in $n-1$ Gruppen $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_{n-1}$ vertheilt sind, jedoch so, dass jede dieser Gruppen eine gerade Zahl von Punkten enthält und dass in diesen $n-1$ Gruppen Γ sämmtliche n Blätter vertreten sind. Die zu dieser Anordnung gehörige Curve C, welche die Gruppen $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_{n-1}$ der Reihe nach trifft, bestimmt dann die Aufeinanderfolge der Schleifen und somit die Verbindung der n Blätter der neuen Fläche.

Dieser Satz führt nun zu einer sehr einfachen Normalform der Fläche. Unter den möglichen Gruppenbildungen wähle man diejenige, bei welcher die erste Gruppe Γ_1 aus $\omega - 2(n-2)$ Verzweigungspunkten besteht, die das erste und zweite Blatt verbinden, während die $n-2$ übrigen Gruppen je zwei Verzweigungspunkte enthalten, die je eins der übrigen $n-2$ Blätter mit dem ersten oder zweiten Blatt verbinden, so dass also die letzten $n-2$ Blätter unter

sich gar nicht mehr zusammenhängen. Um die Fläche zu construiren, lege man, wie früher angegeben, in der einfachen x-Ebene durch die ω Verzweigungspunkte ξ_i eine Curve C, die sich selber nicht schneidet und zuerst alle Punkte der ersten Gruppe Γ_1 trifft, dann der Reihe nach die Punkte der übrigen Gruppen $\Gamma_2, \ldots, \Gamma_{n-1}$ und verbinde die ω Verzweigungspunkte in der Reihenfolge $\xi_1, \ldots, \xi_\omega$, in der sie von C getroffen werden, mit dem regulären Punkt a der x-Ebene durch Linien s_i, die sich selber und C nicht schneiden. Alsdann lege man in den n Blättern von allen ω Verzweigungspunkten ξ_i durch die zugehörigen zwei Blätter Schnitte S_i, die über den entsprechenden Linien s_i nach den über a liegenden Punkten dieser Blätter verlaufen und verbinde längs der Schnitte S_i die Blätter in der durch die angenommene Gruppenbildung vorgeschriebenen Weise. Dann müssen sich nach dem Früheren in den über a liegenden Punkten der n Blätter die Verzweigungen wieder aufheben und die Blätter trennen. Verschiebt man alsdann die Verzweigungsschnitte S_i etwa bis zur Curve C und löscht von C die Strecken $\xi_2\xi_3, \xi_4\xi_5, \ldots$, so sind die noch übrig bleibenden Strecken $\xi_1\xi_2, \xi_3\xi_4, \ldots, \xi_{\omega-1}\xi_\omega$ die Verzweigungsschnitte der Fläche. Die Zahl derselben ist $= \frac{\omega}{2}$; die Zahl der Verzweigungsschnitte zwischen dem ersten und zweiten Blatt $= \frac{\omega}{2} - (n-2)$.

Die betrachtete Normalform der Verzweigungsfläche T mit einfachen Verzweigungspunkten ist noch in eine einfach zusammenhängende Fläche zu verwandeln durch $2p$ Querschnitte. Die Zahl p ist hier bestimmt durch die Gleichung (8) § 2, nämlich:

$$2p = \omega - 2n + 2.$$

Das kanonische System der $2p$ Querschnitte ist hier besonders einfach, nämlich genau dasselbe, wie bei der Verzweigungsfläche der hyperelliptischen Functionen. Zunächst ist aus der Construction der Fläche klar, dass man nur die Verbindung des ersten und zweiten Blattes zu berücksichtigen und keinen Querschnitt durch die übrigen Blätter zu legen hat. Denn die zwei ersten Blätter enthalten schon $\omega - 2(n-2) = 2p + 2$ Verzweigungspunkte mit $p + 1$ Verzweigungsschnitten. Daher machen $2p$ Querschnitte, in den beiden ersten Blättern um die Verzweigungspunkte gelegt, die Fläche bereits einfach zusammenhängend und die übrigen $2(n-2)$ Verzweigungspunkte oder $n-2$ Verzweigungsschnitte, welche das erste oder zweite Blatt mit je einem der $n-2$ übrigen Blätter verbinden, kommen ebensowenig in Betracht, wie etwa ein Verzweigungsschnitt in einer

zweiblättrigen Fläche, die nur 2 Verzweigungspunkte hat und an sich schon einfach zusammenhängend ist. Dem Querschnittsystem in den zwei ersten Blättern kann man nun die übersichtliche Anordnung geben, die für den hyperelliptischen Fall bekannt ist. Sind $\xi_1, \xi_2, .., \xi_{2p+2}$ die Verzweigungspunkte und $\xi_1\xi_2, \xi_3\xi_4, .., \xi_{2p+1}\xi_{2p+2}$ die Verzweigungsschnitte, welche die zwei ersten Blätter verbinden, so lege man die p ersten Querschnitte $a_1, a_2, .., a_p$ sämmtlich im ersten Blatt bez. um die Punktepaare $\xi_1\xi_2, \xi_3\xi_4, .., \xi_{2p-1}\xi_{2p}$, alsdann die p Querschnitte $b_1, b_2, .., b_p$ so, dass b_i die Punkte $\xi_{2i}, \xi_{2i+1}, .., \xi_{2p+1}$ umschliesst, also theils im ersten, theils im zweiten Blatt verläuft, endlich die p verbindenden Schnitte c_i von den Kreuzungspunkten der Schnittpaare (a_i, b_i) nach dem Punkt O, der beliebig, etwa im ersten Blatt gewählt werden kann. Fig. 5[1]) zeigt ein solches kanonisches Querschnittsystem für den Fall $n = 2$, $\omega = 8$, $p = 3$; die im ersten Blatt verlaufenden Schnitte und Schnitttheile sind ausgezogen, die im zweiten Blatt liegenden punktirt. Alle Querschnitte a_i, b_i, c_i sind mit zwei Rändern zu denken, die parallel und in unendlich kleiner Entfernung von einander verlaufen.

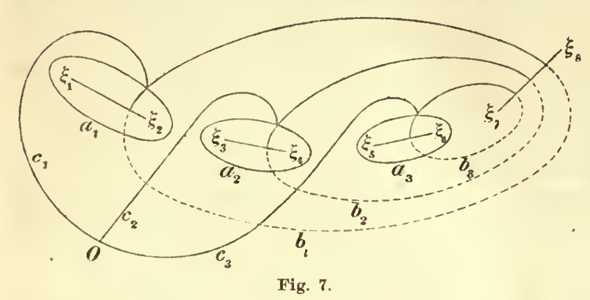


Fig. 7.

§ 4. Analytische Untersuchung von $F(x, y) = 0$.[2])

Die in § 1—3 gegebene Untersuchung der Zweigfunctionen war wesentlich geometrisch. Eine strengere Definition und Unterscheidung der verschiedenen Arten von kritischen Punkten, sowie die Bestimmung der Zahl und Lage dieser Punkte ist aber erst durch eine analytische Untersuchung der Gleichung $F(x, y) = 0$ möglich. Bevor wir uns zu dieser Untersuchung wenden, sei noch eine zweite geometrische Deutung dieser Gleichung erwähnt[3]). Man kann nämlich $F(x, y) = 0$ auch als Gleichung einer Curve mit complexen

1) Prym, Zur Theorie der Functionen in einer zweiblättrigen Fläche. Zürich 1866. S. 4.

2) Riemann, Ges. W. S. 103 ff. Die Voraussetzungen sind bei Riemann von den obigen etwas verschieden; es wird $F(x, y) = 0$ in x vom m-ten, in y vom n-ten Grade angenommen.

3) Clebsch, Journ. für Math. Bd. 63. S. 189 ff. 1863.

Coefficienten und complexen Coordinaten (x, y) betrachten und auf sie alle Bezeichnungen anwenden, die bei reellen Curven gebräuchlich sind. Wir reden daher von einer Ebene, in welcher die Curve $F(x, y) = 0$ liegt und bezeichnen dieselbe als (x, y)-Ebene. Diese Ebene hat keine reelle Existenz, wie bei der ersten Auffassung die x-Ebene, in der die complexe Variable x ausgebreitet war. Wir nennen ferner ein Werthepaar (a, b), das der Gleichung $F(x, y) = 0$ genügt, einen in der (x, y)-Ebene auf der Curve gelegenen Punkt und reden von Tangenten, Asymptoten, von singulären Punkten der Curve u. s. f., wie in der reellen Curventheorie. Die Deutung von $F(x, y) = 0$ als Curve lässt eine besonders einfache Ausdrucksweise zu, wenn es sich um algebraische Fragen handelt, während die geometrische Darstellung von y durch die Verzweigungsfläche besondere Vorzüge bei transcendenten Fragen bietet.

Für die analytische Untersuchung, sowie überhaupt im Folgenden, machen wir nicht blos die Voraussetzung, dass $F(x, y)$ irreducibel sei, wir nehmen auch für $F(x, y)$ eine bestimmte Form an durch folgende, weitere Voraussetzungen.

(A) Die Gleichung $F(x, y) = 0$ soll in x wie in y rational und ganz vom Grade n sein und so beschaffen, dass für jedes Glied $x^i y^k$ die Dimension $i + k \overline{\lessgtr} n$ ist.

(B) Wenn man die Gleichung $F(x, y) = 0$ durch die Substitution $x : z$ und $y : z$ für x und y und durch Multiplication mit z^n homogen in x, y, z macht, sollen die Coefficienten von x^n, von y^n und von z^n von Null verschieden sein.

(C) Der Ausdruck der n^{ten} Dimension in $F(x, y) = 0$ soll n verschiedene Linearfactoren haben.

Die Voraussetzungen (B) und (C) bieten keine wesentliche Beschränkung der in (A) angenommenen Form von $F(x, y)$. Denn setzt man in der homogen gemachten Gleichung $F(x, y, z) = 0$

$$x = \alpha_1 \xi + \beta_1 \eta + \gamma_1 \zeta, \quad y = \alpha_2 \xi + \beta_2 \eta + \gamma_2 \zeta, \quad z = \alpha_3 \xi + \beta_3 \eta + \gamma_3 \zeta, \quad (1)$$

(wobei die Determinante der Substitution von 0 verschieden sei), so lassen sich die Coefficienten $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ stets so bestimmen, dass in der transformirten Gleichung $\Phi(\xi, \eta, \zeta) = 0$ die Coefficienten von ξ^n, η^n, ζ^n von 0 verschieden sind und dass gleichzeitig der Ausdruck der n^{ten} Dimension in ξ und η n verschiedene Linearfactoren hat.

Die Voraussetzungen (B) und (C) beziehen sich besonders auf das Verhalten des unendlich fernen Punktes. Nach (B) soll die Curve

$F(x, y) = 0$ nicht durch den Punkt $(x = 0, y = 0)$ gehen und nicht Asymptoten haben, die der x- oder y-Axe parallel sind. Es wird also y nur ∞ für $x = \infty$ oder es fallen diejenigen kritischen Punkte, in denen $y = \infty$ wird, alle in den Punkt $(x = \infty, y = \infty)$ der Curve $F(x, y) = 0$ oder in die n Punkte $(x = \infty, y = \infty)$ der n-blättrigen Verzweigungsfläche T. Nach (C) hat die Curve $F(x, y) = 0$ im Punkt $(x = \infty, y = \infty)$ einen n-fachen Punkt mit getrennten Tangenten (Asymptoten) oder die Verzweigungsfläche T die Eigenschaft, dass sich die n Blätter im Unendlichen nur berühren, ohne zusammenzuhängen (vgl. S. 44).

Um die im Endlichen liegenden kritischen Punkte zu untersuchen, sei $x = a$ ein endlicher Werth und $b_1, b_2, .., b_n$ die zugehörigen endlichen Werthe von y. Ist b einer dieser Werthe und setzt man zur Abkürzung

$$(2)\quad F(a, b) = F_{00};\ \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{ab} = F_{10};\ \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{ab} = F_{01};\ \cdot\cdot;\ \left(\frac{\partial^{p+q} F}{\partial x^p \partial y^q}\right)_{ab} = F_{pq},$$

so gibt die Entwicklung von $F(x, y) = 0$ nach Potenzen von $x - a$, $y - b$, da $F_{00} = 0$ ist, die Gleichung

$$(3)\begin{cases} (x-a)F_{10} + (y-b)F_{01} \\ \quad + \frac{1}{2}[(x-a)^2 F_{20} + 2(x-a)(y-b)F_{11} + (y-b)^2 F_{02}] + \cdot\cdot \\ \quad + \frac{1}{n!}[(x-a)^n F_{n0} + n(x-a)^{n-1}(y-b)F_{n-1\,1} + \cdot\cdot + (y-b)^n F_{0n}] = 0, \end{cases}$$

eine Entwicklung, die mit den Gliedern der n^{ten} Dimension abschliesst.

Ein einfacher Punkt $(x = a, y = b)$ der Fläche T ist dadurch charakterisirt, dass $F(a, b) = F_{00} = 0$, aber $F_{01} \gtrless 0$ ist. In der Umgebung von (a, b) hat die zugehörige Zweigfunction y eine Entwicklung nach ganzen positiven Potenzen von $x - a$, nämlich

$$(4)\qquad y - b = \alpha_1 (x-a) + \alpha_2 (x-a)^2 + \alpha_3 (x-a)^3 + \cdots.$$

Die Coefficienten $\alpha_1, \alpha_2, ..$ sind nach dem Taylor'schen Satze bestimmt durch die Werthe

$$\alpha_1 = \frac{dy}{dx},\quad \alpha_2 = \frac{1}{2!}\frac{d^2y}{dx^2}, \cdot\cdot,$$

gebildet für $(x, y) = (a, b)$, also nach (3) bestimmt durch

$$F_{01}\alpha_1 + F_{10} = 0,\quad 2!\alpha_2 F_{01} + \alpha_1^2 F_{02} + 2\alpha_1 F_{11} + F_{20} = 0, \ldots$$

Die Coefficienten $\alpha_1, \alpha_2, ..$ sind alle endlich, da $F_{01} \gtrless 0$.

Ein kritischer Punkt ($x = a$, $y = b$) im Endlichen der Fläche T ist dadurch charakterisirt, dass für $x = a$ mindestens zwei der n Wurzeln $b_1, \ldots, b_n$ von $F_{00} = 0$ zusammenfallen in einen Werth b, dass also für $x = a$, $y = b$ ausser $F_{00} = 0$ mindestens noch $F_{01} = 0$ ist. Werthepaare ($x = a$, $y = b$), welche nur diesen zwei Gleichungen genügen, existiren stets, ohne dass eine besondere Bedingung zwischen den Coefficienten F_{rs} der Gleichung (3) stattfindet. Wenn aber noch weitere der Coefficienten F_{rs} in (3) verschwinden, so treten zwischen den Coefficienten $F(x, y) = 0$ Bedingungsgleichungen auf und die kritischen Punkte sind zugleich singuläre Punkte. Wir beschränken uns auf die Betrachtung der einfachsten und wichtigsten Fälle.

1) Es sei für ($x = a$, $y = b$)

$$F_{01} = F_{02} = \cdots = F_{0\lambda-1} = 0, \tag{5}$$

dagegen $$F_{10} \text{ und } F_{0\lambda} \gtrless 0.$$

Dann hat man, da hier $F_{10} \gtrless 0$, entsprechend dem Obigen, indem nur x und y ihre Rolle vertauschen, zwischen x und der zu b gehörigen Zweigfunction y in der Umgebung von (a, b) eine Entwicklung von der Form

$$x - a = \beta_1 (y - b)^\lambda + \beta_2 (y - b)^{\lambda+1} + \cdots \qquad (\beta_1 \gtrless 0),$$

wo die Coefficienten $\beta_1, \beta_2, \ldots$ in ähnlicher Weise wie oben zu bestimmen sind. Zieht man die λ^{te} Wurzel, so erhält man die Entwicklung

$$(x - a)^{\frac{1}{\lambda}} = \gamma_1 (y - b) + \gamma_2 (y - b)^2 + \cdots \qquad (\gamma_1 \gtrless 0),$$

und hieraus nach bekannten Sätzen über die Umkehrung der Potenzreihen

$$y - b = \alpha_1 (x - a)^{\frac{1}{\lambda}} + \alpha_2 (x - a)^{\frac{2}{\lambda}} + \cdots \qquad (\alpha_1 \gtrless 0). \tag{6}$$

Die Vergleichung mit (5) § 2 lehrt, dass der betrachtete Punkt ($x = a$, $y = b$) in der Fläche T ein $\lambda - 1$-facher Verzweigungspunkt und zwar von der ersten Art ist (vgl. § 2 S. 24), da wir voraussetzen, dass $\alpha_1 \gtrless 0$ ist, dass also die Entwicklung (6) mit dem Glied $(x - a)^{\frac{1}{\lambda}}$ beginnt. Für die Curve $F(x, y) = 0$ ist (a, b) ein Punkt, in dem die Tangente parallel der y-Axe ist und $\lambda - 1$-fach berührt, d. h. in λ zusammenfallenden Punkten schneidet. Für $\lambda = 2$ hört der Punkt auf, singulär zu sein, er wird zu einem einfachen Verzweigungspunkt erster Art.

2) Es sei für $(x = a,\ y = b)$

$$F_{rs} = 0 \quad (r,\ s = 0,\ 1, \ldots, \mu - 1) \tag{7}$$

oder die Entwicklung (3) beginne mit den Gliedern der μ^{ten} Dimension und der Ausdruck der μ^{ten} Dimension zerfalle in μ verschiedene Factoren, nämlich

$$y - b - \alpha_i (x - a) \quad (\alpha_i \gtrless 0) \qquad (i = 1, \ldots, \mu),$$

wo die Grössen α_i endlich und von einander und von 0 verschieden seien. Dividirt man (3) durch $(x - a)^\mu$ und setzt $\frac{y - b}{x - a} = \eta$, so nimmt (3) die Form an

$$\Phi_\mu + (x - a)\,\Phi_{\mu+1} + \cdots + (x - a)^{n-\mu}\,\Phi_n = 0, \tag{8}$$

wo $\Phi_\mu, \Phi_{\mu+1}, \ldots, \Phi_n$ ganze rationale Functionen in η bez. vom Grade $\mu,\ \mu + 1, \ldots, n$ sind. Die μ Wurzeln η von $\Phi_\mu = 0$ sind nach Voraussetzung $\alpha_1,\ \alpha_2, \ldots, \alpha_\mu$. Ist α eine dieser Wurzeln, so erhält man für die zugehörige Function η aus (8) die Entwicklung

$$\eta = \alpha + \beta\,(x - a) + \gamma\,(x - a)^2 + \cdots \tag{9}$$

Die Coefficienten $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ sind ähnlich wie bei dem regulären Punkt bestimmt durch die Gleichungen

$$\frac{d\Phi_\mu}{d\eta}\,\beta + \Phi_{\mu+1} = 0,\ 2!\,\gamma\,\frac{d\Phi_\mu}{d\eta} + \beta^2\,\frac{d^2\Phi_\mu}{d\eta^2} + 2\beta\,\frac{d\Phi_{\mu+1}}{d\eta} + 2\,\Phi_{\mu+2} = 0, \cdots$$

die Φ und ihre Ableitungen gebildet für $\eta = \alpha$. Die Coefficienten $\beta,\ \gamma, \ldots$ sind daher, da $\frac{d\Phi_\mu}{d\eta} \gtrless 0$ für $\eta = \alpha$, alle eindeutig und endlich.

Trägt man für η den Werth $\frac{y - b}{x - a}$ ein und bildet die Gleichung (9) für die μ verschiedenen Wurzeln $\alpha_1,\ \alpha_2, \ldots, \alpha_\mu$ von $\Phi_\mu = 0$, so erhält man für die μ zugehörigen Zweigfunctionen Entwicklungen, die nach ganzen positiven Potenzen von $x - a$ fortschreiten, nämlich:

$$y - b = \alpha_i\,(x - a) + \beta_i\,(x - a)^2 + \cdots \quad (\alpha_i \gtrless 0) \quad (i = 1, \ldots, \mu). \tag{10}$$

Die Vergleichung mit (4) § 2 zeigt, dass der betrachtete Punkt $(a,\ b)$ in der Fläche T oder auf der Curve $F = 0$ ein μ-facher Punkt mit getrennten Blättern oder getrennten Tangenten ist und zwar von der ersten Art (vgl. § 2 S. 24), da wir voraussetzen, dass die Entwicklungen (10) alle mit dem Glied $x - a$ beginnen. Für $\mu = 2$ ist der Punkt $(a,\ b)$ ein Doppelpunkt in T oder auf $F = 0$. Für $\mu = 1$ hört der Punkt $(a,\ b)$ auf, singulär zu sein, er wird zum einfachen Punkt auf $F = 0$ oder in T.

3) Es sei wieder für $(x = a, y = b)$

$$F_{rs} = 0 \quad (r, s = 0, 1, .., \nu - 1),$$

aber der Ausdruck der ν^{ten} Dimension in (3) zerfalle in k Factoren von der Form

$$[(y - b) - \alpha_{\nu_i}(x - a)]^{\nu_i} \quad (\alpha_{\nu_i} \gtrless 0) \quad (i = 1, .., k),$$

wobei $\nu_1 + \cdots + \nu_k = \nu$ ist; zugleich sei vorausgesetzt, dass der Ausdruck der $\nu + 1^{\text{ten}}$ Dimension in (3) keinen der Werthe $y - b - \alpha_{\nu_i}(x - a)$ als Factor enthalte. Die ν Zweigfunctionen, die in a denselben Werth b haben, zerfallen hier in k Gruppen, deren jede durch eine besondere Reihenentwicklung charakterisirt ist. Für die ν_i Zweigfunctionen der i^{ten} Gruppe ergibt sich durch ähnliche Betrachtungen wie in 1. und 2. in der Umgebung von (a, b) die gemeinsame Entwicklung

$$y - b = \alpha_{\nu_i}(x - a) + \beta_{\nu_i}(x - a)^{\frac{\nu_i + 1}{\nu_i}} + \cdots \quad (\alpha_{\nu_i} \gtrless 0). \quad (11)$$

Nach § 2 trennen sich also die ν durch den Punkt (a, b) gehenden Blätter der Fläche T in k Gruppen, so dass die ν_i Blätter der i^{ten} Gruppe unter sich cyclisch zusammenhängen. Für die Curve $F(x, y) = 0$ ist (a, b) ein Punkt, durch den ν Zweige gehen, die sich in k Gruppen sondern, so dass die ν_i Zweige der i^{ten} Gruppe eine gemeinsame Tangente in erster Ordnung berühren, während die Tangenten der k Gruppen unter endlichen Winkeln zusammen stossen. Für $k = 1$, $\nu = 2$ ist der Punkt (a, b) ein Rückkehrpunkt der Curve $F = 0$ oder der Fläche T.

Wir betrachten noch das Verhalten der n Zweigfunctionen y in dem Punkte $x = \infty$ der x-Ebene mit Rücksicht auf die S. 39 gemachten Voraussetzungen (A), (B) und (C). Nach (B) sind für $x = \infty$ auch die n Werthe von y gleich ∞, nach (C) zerfällt der Ausdruck der n^{ten} Dimension von $F(x, y) = 0$ in n ungleiche Factoren. Daher hat man in der Umgebung des Punktes $x = \infty$ für y n Entwicklungen nach ganzen Potenzen von x

$$y = A_i x + B_i + C_i x^{-1} + D_i x^{-2} + \cdots \quad (A_i \gtrless 0)\ (i = 1, \cdots, n), \quad (12)$$

wo die Coefficienten A_i endlich und von einander und von 0 verschieden sind. In der That sei der Ausdruck der n^{ten} Dimension in $F(x, y) = 0$

$$a_0 y^n + a_1^0 y^{n-1} x + \cdots + a_n^0 x^n.$$

Durch die Substitution $x = \xi^{-1}$, $y = \eta^{-1}$ geht $F(x, y) = 0$, wenn mit $\xi^n \eta^n$ multiplicirt wird, über in

$$F_1(\xi, \eta) = f(\overline{\xi, \eta})^{n} + f_1(\overline{\xi, \eta})^{n+1} + \cdots + \xi^n \eta^n = 0,$$

wo in

$$f(\overline{\xi, \eta})^{n} = a_0 \xi^n + a_1^0 \xi^{n-1} \eta + \cdots + a_n^0 \eta^n$$

die Glieder der niedersten Dimension in ξ, η zusammengefasst sind. Ist nun $\xi - A_i \eta$ einer der n nach Voraussetzung ungleichen Factoren von $f(\xi, \eta)$, so erhält man in der Umgebung von ($\xi = 0$, $\eta = 0$) eine Entwicklung von η nach ganzen Potenzen von ξ, aus der sich in der Umgebung von ($x = \infty$, $y = \infty$) die obige Entwicklung (12) von y nach Potenzen von x ergibt. Der Punkt ($x = \infty$, $y = \infty$) ist daher ein n-facher Punkt erster Art; in ihm sind für die Fläche T die n Blätter, für die Curve $F = 0$ die n Tangenten (Asymptoten) getrennt.

Wir begnügen uns mit der Erörterung der vorstehenden Fälle, die auch der Anschauung leicht zugänglich sind. Die Untersuchung des allgemeinsten, singulären Punktes, wo für ein Werthepaar (a, b) beliebige Coefficienten F_{rs} in (3) verschwinden, erfordert ausgedehnte Betrachtungen besonderer Art. Wir verweisen bez. dieser Frage auf die Litteratur und führen nur historisch Folgendes an.

Eine erste Reihe von Untersuchungen[1]), die sich mit der Trennung der Zweigfunctionen und der Aufstellung von Reihenentwicklungen für dieselben an singulären Stellen beschäftigt, führt rein analytisch zu demselben Satze, der in (IV) § 2 geometrisch abgeleitet wurde, nämlich:

(I) Die zu einem kritischen Punkte mit der Abscisse $x = a$ gehörigen n Punkte der Curve $F(x, y) = 0$ treten gruppenweise zusammen in Punkte (a, b), (a, b_1), ... Die durch einen solchen Punkt z. B. (a, b) gehenden Tangenten der Curve trennen sich wieder in solche, die nur von je einem Zweig, und solche, die gleichzeitig von mehreren Zweigen der Curven in erster oder höherer Ordnung berührt werden. Die zugehörigen Zweigfunctionen y stellen sich dar durch Entwicklungen von der Form (3), (4) und (5) § 2.

Eine zweite Reihe von Untersuchungen[2]), die sich mit der Auf-

---

1) Puiseux Fischer, S. 28 ff. Vgl. die Darstellung von Briot et Bouquet, Théorie des fonct. ellipt. 2. A. 1875. S. 40—49.

2) Cayley, Quart. Journ. of Math. T. 7 (1865) und Journ. für Math. Bd. 64 (1865). Hamburger, Zeitschrift für Math. Bd. 16 (1871). Nöther, Gött. Nachr. 1871. S. 267; Math. Ann. Bd. 9. S. 167 (1875) und Bd. 23 S. 311 (1883). Vgl. auch die Darstellungen von Picard, Traité d'analyse. T. II S. 360 ff. (1893).

lösung von höheren Singularitäten in solche niederer Art durch eindeutige Transformation der Curve (vgl. Abschnitt IV) beschäftigt, führt zu dem Resultat:

(II) Eine algebraische Gleichung $F(x, y) = 0$ mit beliebigen, singulären Punkten lässt sich durch eindeutige Transformation stets in eine andere Gleichung überführen, die nur einfache Verzweigungspunkte (1. Art) und von singulären Punkten nur noch Doppelpunkte enthält.

Wir legen später, von Abschnitt II an, für $F(x, y) = 0$ diese einfachste Form zu Grunde.

§ 5. Zahl und Lage der kritischen Punkte.

Wir untersuchen nunmehr die Zahl und Lage der kritischen Punkte, beschränken uns aber wieder auf das Vorkommen der im vorigen § S. 41—43 betrachteten kritischen Punkte, wobei wir annehmen, dass nicht zwei solcher Punkte in einander fallen. Ausserdem halten wir die früheren Voraussetzungen (A), (B), (C) S. 39 fest.

Da der Punkt ($x = \infty$, $y = \infty$) nach diesen Voraussetzungen ein μ-facher Punkt erster Art ist, so handelt es sich nur noch um die im Endlichen gelegenen kritischen Punkte. Nach der Definition derselben (S. 41) genügen die Coordinaten (x, y) eines solchen Punktes den beiden Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} F(x, y) &= a_0 y^n + a_1 y^{n-1} + \cdots + a_{n-2} y^2 + a_{n-1} y + a_n = 0, \\ F'y &= n a_0 y^{n-1} + (n-1) a_1 y^{n-2} + \cdots + 2 a_{n-2} y + a_{n-1} = 0. \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Die Combination derselben gibt die weitere Gleichung

$$a_1 y^{n-1} + 2 a_2 y^{n-2} + \cdots + (n-1) a_{n-1} y + n a_n = 0, \quad (2)$$

durch welche sich die erste der Gleichungen (1) ersetzen lässt. Durch Elimination von y aus (2) und der zweiten Gleichung (1) erhält man eine Gleichung in x: $D(x) = 0$, die Discriminante von $F(x, y) = 0$ nach y, deren Wurzeln die x-Ordinaten der gesuchten Punkte sind. Die Discriminante lässt sich leicht als Determinante von $2(n-1)$ Reihen anschreiben und man sieht dann unmittelbar, dass sie unter der Voraussetzung (A) vom Grade $n(n-1)$ in x ist. Für unseren

Appell et Goursat, Théorie des fonct. alg. et de leurs int. S. 283 (1895). Ausführliche Litteraturangaben finden sich in Brill und Nöther, Bericht u. s. f. S. 367 ff.

Zweck ist indess eine andere Form von $D(x)$ geeigneter[1]). Bezeichnet man wie früher die n Wurzeln y der Gleichung $F(x, y) = 0$ mit $y_1, y_2, .., y_n$, so ist die Discriminante bis auf einen constanten Factor, den wir unterdrücken, dargestellt durch das Product

$$(3) \qquad D(x) = (F'y)_{y_1} (F'y)_{y_2} .. (F'y)_{y_n}.$$

Dies Product ist nämlich erstens eine rationale Function von x; denn es stellt sich als rationale und symmetrische Function der n Wurzeln y_i rational in den Coefficienten $a_0, a_1, .., a_n$ von F dar. Es ist zweitens eine ganze Function von x; denn es wird für keinen endlichen Werth von x unendlich, weil nach Voraussetzung (B) für endliche x auch die n Wurzeln y_i endlich sind. Das Product auf der rechten Seite in (3) ist daher (bis auf einen constanten Factor) identisch mit der Discriminante $D(x)$, da es seiner Bildung nach für jedes gemeinsame Wurzelpaar (x, y) der beiden Gleichungen (1) und nur für diese verschwindet.

Der Grad von D in x ist die Ordnung, in welcher der Ausdruck (3) unendlich wird für $x = \infty$; es wird aber für $x = \infty$ jeder Factor in der zweiten Gleichnng (1) $= \infty^{n-1}$, folglich $D = \infty^{n(n-1)}$. Dies gibt den Satz:

(I) Der Grad der Discriminante $D(x)$ oder die Zahl der Wurzeln von $D(x) = 0$ ist gleich $n(n-1)$.

Um zu sehen, in welcher Weise die $n(n-1)$ Wurzeln von $D(x) = 0$ den früher betrachteten Arten von kritischen Punkten entsprechen, hat man nach (3) das Verhalten von $F'(y)$ und $D(x)$ in diesen Punkten zu untersuchen. Hierzu genügt es, für jeden Fall die Glieder der niedersten Dimension von $F(x, y)$ anzuschreiben, aus denen sich durch Differentiation nach y die Glieder der niedersten Dimension von $F'(y)$ ergeben. Der Kürze halber bezeichnen wir die im vorigen § unter Nr. 1, 2, 3 charakterisirten Punkte als singuläre Punkte vom Charakter (λ), (μ), $(\nu, \varkappa)$ oder noch kürzer als Punkte (λ), (μ), $(\nu, \varkappa)$.

1) Für einen singulären Punkt (a, b) vom Charakter (λ) sind die in Betracht kommenden Glieder der niedersten Dimension

$$\text{in } F(x, y)\text{: } (x-a) F_{10} + \frac{1}{\lambda!} (y-b)^\lambda F_{0\lambda},$$

$$\text{in } F'y\text{: } \frac{1}{(\lambda-1)!} F_{0\lambda} (y-b)^{\lambda-1}.$$

1) Riemann, Ges. W. S. 104 ff.

Nun ist im Punkt (a, b) nach (6) § 4 für jeden der λ gleichen Werthe von y die Grösse $y - b$ proportional mit $(x - a)^{\frac{1}{\lambda}}$, also jeder der λ zugehörigen Werthe von $F'y$ proportional mit $(x - a)^{\frac{\lambda - 1}{\lambda}}$, folglich nach (3) $D(x)$ proportional mit $(x - a)^{\lambda - 1}$, d. h.

(II) Einem singulären Punkte vom Charakter (λ) entsprechen $\lambda - 1$ Wurzeln, einem einfachen Verzweigungspunkt 1. Art entspricht eine Wurzel von $D(x) = 0$.

Man sagt daher auch, ein Punkt (λ) oder ein $\lambda - 1$-facher Verzweigungspunkt 1. Art zählt für $\lambda - 1$ einfache Verzweigungspunkte 1. Art. Dies wird geometrisch erläutert durch den Satz (V) § 2.

2) Für einen singulären Punkt (a, b) vom Charakter (μ) ist das Glied niederster Dimension in $F(x, y)$

$$A\,[(y - b) - \alpha_1 (x - a)] \ldots [(y - b) - \alpha_\mu (x - a)].$$

Nun ist im Punkte (a, b) nach (10) § 4 für jeden der μ gleichen Werthe von y die Grösse $y - b$ proportional mit $x - a$, also jeder der μ zugehörigen Werthe von $F'y$ proportional mit $(x - a)^{\mu - 1}$, folglich nach (3) $D(x)$ proportional mit $(x - a)^{\mu(\mu - 1)}$, d. h.

(III) Einem singulären Punkte vom Charakter (μ) entsprechen $\mu(\mu - 1)$ Wurzeln, einem Doppelpunkt $(\mu = 2)$ entsprechen zwei Wurzeln von $D(x) = 0$.

Man sagt daher auch, ein Punkt (μ) oder ein μ-facher Punkt 1. Art mit getrennten Tangenten absorbirt $\mu(\mu - 1)$ einfache Verzweigungspunkte 1. Art. Dies wird geometrisch erläutert durch den Satz (VI) § 2.

3) Für einen singulären Punkt (a, b) vom Charakter $(\nu, \varkappa)$ ist das Glied der niedersten Dimension in $F(x, y)$

$$A\,[(y - b) - \alpha_{\nu_1}(x - a)]^{\nu_1} \cdots [(y - b) - \alpha_{\nu_\varkappa}(x - a)]^{\nu_\varkappa} \quad (\nu_1 + \cdots + \nu_\varkappa = \nu). \quad (4)$$

Nun ist nach (11) § 4 im Punkte (a, b) für jeden der ν_i dem i^{ten} Factor entsprechenden gleichen Werthe von y die Grösse $y - b$ proportional mit $x - a$, dagegen die Grösse $[(y - b) - \alpha_{\nu_i}(x - a)]^{\nu_i}$ proportional mit $(x - a)^{\nu_i + 1}$, folglich jeder der zugehörigen Werthe von $F'(y)$ proportional mit $[(y - b) - \alpha_{\nu_i}(x - a)]^{\nu_i - 1}(x - a)^{\nu - \nu_i}$ oder mit $(x - a)^{\frac{\nu\nu_i - 1}{\nu_i}}$. Dem i^{ten} Factor in (4) entspricht also nach (3) in $D(x)$ ein Factor $(x - a)^{\nu\nu_i - 1}$, oder ihm entsprechen $\nu\nu_i - 1$ Wurzeln

von $D(x) = 0$. Berücksichtigt man gleichzeitig alle Factoren in (4), so folgt:

(IV) Einem singulären Punkte vom Charakter $(\nu, \varkappa)$ entsprechen $\sum_i (\nu\nu_i - 1) = \nu^2 - \varkappa$ Wurzeln, einem Rückkehrpunkt ($\varkappa=1$; $\nu=2$) entsprechen drei Wurzeln von $D(x)=0$.

Beschränkt man sich auf das Vorkommen der Punkte (λ) und (μ), so folgt die Gleichung

$$n(n-1) = \sum (\lambda - 1) + \sum \mu(\mu - 1), \tag{4a}$$

wo die erste Summe sich auf alle Punkte (λ), die zweite auf alle Punkte (μ) im Endlichen von T bezieht. Nun hatten wir in (7) § 2 unter noch allgemeineren Voraussetzungen die Gleichung

$$p = \frac{1}{2}\sum (\lambda - 1) - n + 1.$$

Vergleicht man dies mit (4a), so erhält man für das Geschlecht p der Curve $F(x, y) = 0$ den Werth:

$$p = \frac{1}{2}(n-1)(n-2) - \frac{1}{2}\sum \mu(\mu - 1), \tag{5}$$

wo sich die Summe auf alle im Endlichen gelegenen, mehrfachen Punkte mit getrennten Tangenten bezieht.

Kommen im Endlichen von T nur einfache Verzweigungspunkte und von Singularitäten nur Doppelpunkte vor und ist die Anzahl der ersteren ω, die der letzteren r, so hat man die Gleichungen[1]):

$$\omega = n(n-1) - 2r, \qquad p = \frac{1}{2}(n-1)(n-2) - r. \tag{6}$$

Aus der letzten Gleichung folgt, da p nicht negativ sein kann, $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ als Maximalzahl der Doppelpunkte, die eine Curve $F(x, y) = 0$ vom Grade n haben kann, eine Zahl, die für reelle Curven durch bekannte Betrachtungen der analytischen Geometrie abgeleitet wird.

Um die Lage oder die Coordinaten[2]) (x, y) der kritischen Punkte zu bestimmen, fügen wir zu den Annahmen (A), (B), (C)

---

1) Riemann, Ges. W. S. 105 und 107.

2) Kronecker, Journ. für Math. Bd. 91. S. 301 ff. (1881), in Vorlesungen bereits 1870/71. Nöther, Math. Ann. Bd. 23. S. 327 ff. (1883).

S. 39 noch eine weitere Voraussetzung über die Form von $F(x, y) = 0$ hinzu, die gleichfalls keine Beschränkung ist, sondern sich durch die S. 39 angegebene Transformation stets gleichzeitig mit (B) und (C) herstellen lässt, nämlich die Voraussetzung:

(D) Zwei Werthsysteme (x, y), welche den beiden Gleichungen (1) genügen, sollen weder gleiches x, noch gleiches y haben,

oder geometrisch, es sollen nicht zwei kritische Punkte auf derselben Parallelen zur x- oder y-Axe liegen.

Die x-Ordinaten der gesuchten Punkte sind die Wurzeln der Gleichung $D(x) = 0$. Diese Gleichung lässt sich in zwei Theile zerspalten, von welchen der erste Theil den Punkten vom Charakter (λ), der andere den Punkten vom Charakter (μ) und $(\nu, \varkappa)$ entspricht. Die Möglichkeit dieser Trennung beruht auf dem Umstande, dass die Coordinaten der letzteren Punkte ausser den Gleichungen $F(x, y) = 0$ und $F'(y) = 0$ auch noch der Gleichung $F'(x) = 0$ genügen, die der ersteren aber nicht (S. 41 ff., Nr. 1, 2, 3). Wir untersuchen zunächst die gemeinsamen Wurzelpaare von $F(x, y) = 0$ und $F'(x) = 0$. Die Elimination von y aus diesen Gleichungen führt auf eine Gleichung $D_1(x) = 0$, die sich in Determinantenform leicht anschreiben lässt. Ebenso wie der Discriminante $D(x)$ gibt man auch der Resultante $D_1(x)$ zweckmässig eine andere Form. Sind wieder $y_1, y_2, \ldots, y_n$ die n Wurzeln y von $F(x, y) = 0$ und bezeichnet $(F'x)_{y_i}$ den Werth von $F'(x)$, gebildet für $y = y_i$, so ist aus den nämlichen Gründen wie früher

$$D_1(x) = (F'x)_{y_1} \, (F'x)_{y_2} \ldots (F'x)_{y_n}. \tag{7}$$

Der Grad von $D_1(x)$ ist wie bei $D(x)$ gleich $n(n-1)$. Für das Verhalten von $D_1(x)$ in den kritischen Punkten dagegen gilt Folgendes:

1) In einem singulären Punkt (a, b) vom Charakter (λ) ist für jeden der λ gleichen Werthe von y die Grösse $y - b$ proportional mit $(x-a)^{\frac{1}{\lambda}}$; jeder der λ zugehörigen Werthe von $(F'x)_y$ aber ist $= F_{10}$, d. h. endlich; folglich ist auch $D_1(x)$ für $x = a$ endlich und von 0 verschieden, d. h. $x = a$ ist keine Wurzel von $D_1(x) = 0$.

2) In einem singulären Punkt (a, b) vom Charakter (μ) ist für jeden der μ gleichen Werthe von y die Grösse $y - b$ proportional mit $x - a$ und jeder der μ zugehörigen Werthe von $(F'x)_y$ proportional mit $(x-a)^{\mu-1}$; folglich ist für $x = a$ $D_1(x)$ proportional

mit $(x-a)^{\mu(\mu-1)}$, d. h. $x=a$ ist eine $\mu(\mu-1)$-fache Wurzel von $D_1(x)=0$.

3) Für einen singulären Punkt (a, b) vom Charakter $(\nu, \varkappa)$ zeigt man durch dieselben Schlüsse, wie früher für $D(x)=0$, dass $x=a$ auch für $D_1(x)=0$ eine $\nu^2-\varkappa$-fache Wurzel ist.

Das Verhalten von $D_1(x)$ und von $D(x)$ ist hiernach für die singulären Punkte vom Charakter (λ) ein verschiedenes, für die Punkte vom Charakter (μ) oder $(\nu, \varkappa)$ aber das gleiche, wie dies schon aus den analytischen Bedingungen (5 und 7 § 4) für diese Punkte folgt, die für die ersteren Punkte unsymmetrisch, für die letzteren aber symmetrisch in Bezug auf x und y sind.

Diese Untersuchung dient nun zur Trennung der kritischen Punkte in folgender Weise:

Die x-Ordinaten der Punkte vom Charakter (μ) oder $(\nu, \varkappa)$ sind die gemeinsamen Wurzeln von $D(x)=0$ und $D_1(x)=0$; sie treten in beiden Gleichungen in gleicher Ordnung auf.

Um sie zu erhalten suche man durch Division den gemeinsamen Factor $\mathfrak{L}(x)$ von $D(x)$ und $D_1(x)$, der sich auf die Form bringen lässt $\mathfrak{L}(x)=X_1X_2^2\,..\,X_\varrho^\varrho$, wo in X_i^i die i-fachen Factoren von $\mathfrak{L}(x)$ zusammengefasst sind, und bilde durch Aufsuchen des grössten gemeinsamen Theilers von $\mathfrak{L}(x)$ und $\frac{d\mathfrak{L}}{dx}$ den Ausdruck $\mathfrak{L}_1(x)=X_1X_2\,..\,X_\varrho$. Dann entsprechen die Wurzeln der Gleichung $\mathfrak{L}_1(x)=0$, die nach Voraussetzung (D) S. 49 sämmtlich verschieden sind, eindeutig den verschiedenen Punkten (μ) und $(\nu, \varkappa)$.

Die x-Ordinaten der Punkte vom Charakter (λ) sind die Wurzeln von $D(x)=0$, welche nicht der Gleichung $D_1(x)=0$ genügen.

Sucht man daher den Quotienten $D(x):\mathfrak{L}(x)=L(x)$ und bringt denselben auf die Form $L(x)=\Xi_1\Xi_2^2\,..\,\Xi_\sigma^\sigma$, wo wieder in Ξ_i^i die i-fachen Factoren von $L(x)$ zusammengefasst sind und bildet aus $L(x)$ den Ausdruck $L_1(x)=\Xi_1\Xi_2\,..\,\Xi_\sigma$, so entsprechen die Wurzeln der Gleichung $L_1(x)=0$, die wieder nach Voraussetzung (D) sämmtlich verschieden sind, eindeutig den verschiedenen Punkten (λ).

Aus dieser Betrachtung folgt zugleich, dass sich ebenso, wie $D(x)$ und $D_1(x)$ auch $\mathfrak{L}(x)$, $\mathfrak{L}_1(x)$, $L(x)$, $L_1(x)$ auf rationalem Wege aus $F(x, y)=0$ bilden lassen und dass die Coefficienten dieser Functionen rationale Functionen der Coefficienten von $F(x, y)$ sind. Damit hat man den Satz:

(V) Die singulären Punkte (λ) entsprechen eindeutig den Wurzeln von $L_1(x)=0$, die singulären Punkte (μ) und $(\nu, \varkappa)$ eindeutig den Wurzeln von $\mathfrak{L}_1(x)=0$. Die Functionen $L_1(x)$ und $\mathfrak{L}_1(x)$ ergeben sich durch rationale Operationen aus $F(x,y)=0$ und ihre Coefficienten sind rationale Functionen der Coefficienten von $F(x, y)=0$.

Es bleiben noch die y-Ordinaten der betrachteten kritischen Punkte zu bestimmen.

Die Punkte (μ) und $(\nu, \varkappa)$ sind Werthepaare (x, y), die gleichzeitig den drei Gleichungen $F(x, y)=0$, $F'(y)=0$, $F'(x)=0$ genügen. Macht man $F(x, y)=0$ homogen durch die Substitution $x:z$ und $y:z$ für x und y, so treten an Stelle dieser Gleichungen die folgenden

$$F'(x)=0, \quad F'(y)=0, \quad F'(z)=0. \tag{8}$$

Die Elimination von y führt auf die beiden Gleichungen $D\left(\frac{x}{z}\right)=0$ und $D_1\left(\frac{x}{z}\right)=0$ und weiter auf die Gleichung $\mathfrak{L}_1\left(\frac{x}{z}\right)=0$, deren Wurzeln eindeutig den Punkten (μ) und $(\nu, \varkappa)$ entsprechen. Auf demselben Wege wie $\mathfrak{L}_1=0$ erhält man aus (8) durch Elimination von x eine Gleichung $\mathfrak{M}_1\left(\frac{y}{z}\right)=0$ und durch Elimination von z eine Gleichung $\mathfrak{N}_1\left(\frac{y}{x}\right)=0$. Diese Gleichungen sind von demselben Grade wie $\mathfrak{L}_1=0$ und ihre Wurzeln entsprechen eindeutig den Punkten (μ) und $(\nu, \varkappa)$, also auch eindeutig den Wurzeln von $\mathfrak{L}_1=0$. Hieraus folgt, wenn man wieder $z=1$ setzt, dass die Gleichungen $\mathfrak{M}_1(y)=0$ und $\mathfrak{N}_1\left(\frac{y}{x}\right)=0$, falls man in die letztere für x eine bestimmte Wurzel x_i von $\mathfrak{L}_1(x)=0$ einsetzt, nur eine Wurzel y gemein haben, nämlich den einen nach Voraussetzung (D) zu x_i gehörigen Werth y_i. Der gemeinsame Factor beider Gleichungen ist also ein linearer Ausdruck in y, der, gleich 0 gesetzt, y_i rational in x_i darstellt. Hiermit ist die y-Ordinate eines der Punkte (μ) oder $(\nu, \varkappa)$ rational durch die zugehörige x-Ordinate ausgedrückt.

Die Punkte (λ) sind Werthepaare (x, y), welche $F(x, y)=0$ und $F'(y)=0$, aber nicht $F'(x)=0$ genügen. Macht man die beiden ersten Gleichungen homogen in x, y, z und eliminirt y, dann x, dann z und setzt wieder $z=1$, so erhält man drei Gleichungen bez. in x, y und $\frac{y}{x}$. Reducirt man dieselben auf einfache Wurzeln und scheidet durch Division bez. mit $\mathfrak{L}_1(x)$, $\mathfrak{M}_1(y)$, $\mathfrak{N}_1\left(\frac{y}{x}\right)$ die den

Punkten (μ) und $(\nu, \varkappa)$ entsprechenden Wurzeln ab, so erhält man drei Gleichungen $L_1(x) = 0$, $M_1(y) = 0$, $N_1\left(\frac{y}{x}\right) = 0$, deren Grad der gleiche und deren Wurzeln eindeutig den Punkten (λ) entsprechen. Die erste derselben ist die früher gefundene Gleichung $L_1(x) = 0$. Die beiden anderen haben für jede Wurzel $x = x_i$ von $L_1(x) = 0$ eine Wurzel y gemein, nämlich den nach Voraussetzung (D) zu x_i gehörigen Werth y_i. Daher drückt sich auch die y-Ordinate eines Punktes (λ) rational durch die zugehörige x-Ordinate aus. Dies gibt den Satz:

(VI) Die y-Ordinate eines jeden Punktes (λ) oder (μ) oder $(\nu, \varkappa)$ drückt sich rational durch die zugehörige x-Ordinate aus.

Hieraus folgt unmittelbar:

(VII) Die rationalen und symmetrischen Functionen der Coordinaten der Punkte (λ), (μ), $(\nu, \varkappa)$ drücken sich rational aus durch die Coefficienten der Gleichung $F(x, y) = 0$.

Denn die genannten Functionen lassen sich nach Satz VI als rationale Functionen der Ordinaten x_i der betreffenden Punkte allein darstellen und folglich mit Hülfe der Gleichungen $\mathfrak{L}_1(x) = 0$ und $L_1(x) = 0$ auch als rationale Functionen der Coefficienten von $F(x, y)$.

§ 6. Die in der Verzweigungsfläche eindeutigen und regulären Functionen.[1]

Wir schliessen dies Kapitel mit der Herleitung eines für die späteren Untersuchungen fundamentalen Satzes. Zum leichteren Verständniss desselben sei an den entsprechenden Satz erinnert, der sich auf eine complexe Variable z in der im Unendlichen geschlossenen z-Ebene bezieht.

Nennt man eine eindeutige Function von z regulär, wenn sie in der z-Ebene nur in einer endlichen Zahl von Punkten und in jedem derselben nur in endlicher Ordnung ∞ wird, so gelten bekanntlich die Sätze:

Jede in der z-Ebene eindeutige und reguläre Function des Ortes ist eine rationale Function von z und, wenn sie in keinem Punkt ∞ wird, eine Constante; und umgekehrt:

---

1) Riemann, Ges. W. S. 101. Prym, Journ. für Math. Bd. 83. S. 251 ff. (1877).

Eine rationale Function der complexen Variabeln z, also eine Function von der Form $M(z):N(z)$, wo M und N ganze rationale Functionen in z sind, ist eine in der z-Ebene eindeutige und reguläre Function des Ortes.

Entsprechende Sätze gelten nun für Functionen von zwei durch eine Gleichung $F(x, y) = 0$ verbundene Variabeln. Man nennt eine Function von x eindeutig in der zu y gehörigen Verzweigungsfläche T (nach Riemann auch verzweigt wie T), wenn alle in der Fläche von einem Punkt zu einem andern führenden Wege, die nicht durch einen kritischen Punkt hindurchgehen, von demselben Anfangswerth zu demselben Endwerth der Function führen. Man nennt ferner eine in T eindeutige Function von x regulär in T, wenn sie nur in einer endlichen Zahl von Punkten in T und in jedem derselben nur in endlicher Ordnung ∞ wird. Wir halten ferner die Voraussetzungen (A), (B), (C) des § 4 (S. 39) fest, ebenso die in § 2 S. 24 gegebene Definition der unendlich kleinen Grössen, nach welcher in einem Punkt (a, b) von T, der kein Verzweigungspunkt ist, die Grösse $x - a$, dagegen in einem $\lambda - 1$-fachen Verzweigungspunkt (a, b) die Grösse $(x-a)^{\frac{1}{\lambda}}$ und in jedem der n Punkte $(x = \infty, y = \infty)$ der Fläche T die Grösse x^{-1} als unendlich klein von der ersten Ordnung gilt. Wir rechnen ferner einen Punkt, in dem eine Function $= \infty^p$ oder $= 0^p$ wird, bez. für $p\,\infty^1$ oder $p\,0^1$ Punkte der Function. Alsdann lautet der erste Satz:

(I) Ist $F(x, y) = 0$ eine irreducible Gleichung, so ist jede in der zugehörigen Verzweigungsfläche T von y eindeutige und reguläre Function η eine rationale Function der beiden Variabeln (x, y).[1])

Es wird vorausgesetzt, dass die Function η verzweigt sei wie T, dass sie also in jedem Punkt $(x = a, y = b)$, der kein Verzweigungspunkt ist, nach ganzen Potenzen von $x - a$, in einem $\lambda - 1$-fachen Verzweigungspunkt $(x = a, y = b)$ dagegen nach ganzen Potenzen von $(x-a)^{\frac{1}{\lambda}}$ entwickelbar sei, ferner, dass diese Entwicklung, wenn

1) Eine in der z-Ebene eindeutige und reguläre Function von z ist bekanntlich eine ganze rationale Function von z, wenn sie nur in dem Punkte $z = \infty$ unendlich wird. Damit die Function η eine ganze rationale Function von (x, y) sei oder sich mit Hilfe von $F(x, y) = 0$ in eine solche Function verwandeln lasse, ist nothwendig, dass sie nur im Punkt $(x = \infty, y = \infty)$ unendlich wird; diese Bedingung ist aber nicht hinreichend, wenn $F(x, y) = 0$ singuläre Punkte hat (s. § 8).

die Function η im Punkte $x = a$ von der p^{ten} Ordnung ∞ ist, im ersten Falle mit $(x - a)^{-p}$, im zweiten Falle mit $(x - a)^{\frac{-p}{\lambda}}$ als niederster Potenz beginne. Weiter ist anzunehmen, dass in einem Punkte (a, b), in dem sich zwei oder mehr Blätter berühren, ohne zusammenzuhängen (s. S. 20), der Werth der Function η für jedes dieser Blätter ein anderer sein kann, dass er z. B. auch für einige dieser Blätter endlich, für andere ∞ sein kann. Dasselbe ist auch vorläufig für die Punkte $(x = \infty, y = \infty)$ der Fläche, in denen sich die n Blätter berühren, anzunehmen, obwohl der folgende Beweis und der analytische Ausdruck der Function zeigen wird, dass für die Punkte $(x = \infty, y = \infty)$ die Function in allen Blättern gleichzeitig entweder 0 oder endlich oder ∞ ist.

Es seien hiernach die ∞ Punkte der Function η und die zugehörigen Ordnungszahlen gegeben in folgender Weise.

In einem Punkte $(x = a_i, y = b_i)$ ohne Verzweigung sei für das zugehörige Blatt

$$(1) \qquad \eta = \infty^{p_i} \qquad (i = 1, 2, .., \varrho).$$

In einem $(\lambda_k - 1)$-fachen Verzweigungspunkte $(x = \alpha_k, y = \beta_k)$ sei für die λ_k zusammenhängenden Blätter

$$(2) \qquad \eta = \infty^{q_k} \qquad (k = 1, 2, .., \sigma).$$

Im Punkt $(x = \infty, y = \infty)$ sei für das l^{te} Blatt

$$(3) \qquad \eta = \infty^{r_l} \qquad (l = 1, .., n).$$

Bezüglich der Zahlen $r_1, .., r_n$ nehmen wir an, dass dieselben ebensowohl 0, wie $\pm$ ganze Zahlen sein können, so dass die Gesammtordnung r des ∞werdens in dem Punkte $(x = \infty, y = \infty)$, bestimmt ist durch $r = r_1 + \cdots + r_n$.

Der Beweis des Satzes I zerfällt in zwei Theile. Zuerst zeigt man, dass die Function η, wenn sie in ν Punkten der Fläche T je $= \infty^1$ wird, die Wurzel einer Gleichung $\Phi(\overset{n}{\eta}, \overset{\nu}{x}) = 0$ ist, die in η rational und ganz vom n^{ten}, in x rational und ganz vom ν^{ten} Grade ist.

Sind nämlich

$$(4) \qquad \eta_1 = \varphi_1(x), \ .., \ \eta_n = \varphi_n(x)$$

die n Functionswerthe, die η für denselben Werth von x annimmt und ist ξ eine beliebige, von x unabhängige Grösse, so ist die Function

$$P = (\xi - \eta_1)(\xi - \eta_2) \dots (\xi - \eta_n) \tag{5}$$

eine rationale, gebrochene Function von x. Sie ist nämlich erstens eine eindeutige Function von x. Denn das Umkreisen eines beliebigen Punktes der x-Ebene führt die Function P auf ihren früheren Werth zurück, da die Werthe $\eta_1, \dots, \eta_n$ entweder ungeändert bleiben oder nur eine Vertauschung erfahren, bei der P ungeändert bleibt. Sie wird zweitens in der x-Ebene nach den obigen Festsetzungen nur in einer endlichen Zahl von Punkten und in jedem derselben nur in endlicher Ordnung ∞.

Aus der gebrochenen, rationalen Function P von x leitet man eine ganze, rationale Function von x ab durch Multiplication mit einem passenden Factor, der sich aus dem Verhalten von P in den obigen Punkten folgendermassen bestimmt.

Zunächst ist nach (1) in dem Punkte $(x = a_i,\ y = b_i)$, wenn η_i der zugehörige, unendlich werdende Zweig ist, $\xi - \eta_i$ proportional mit $(x - a_i)^{-p_i}$ oder es bleibt $(\xi - \eta_i)(x - a_i)^{p_i}$ endlich; folglich wird

$$P(x - a_1)^{p_1} \dots (x - a_\varrho)^{p_\varrho}$$

in keinem der ϱ Punkte $(a_1, b_1), \dots, (a_\varrho, b_\varrho)$ unendlich.

Ferner sind nach (2) in dem $(\lambda_k - 1)$-fachen Verzweigungspunkt (α_k, β_k), wenn $\eta_1, \dots, \eta_{\lambda_k}$ die in ihm zusammenhängenden Zweige der Function η sind, die Werthe $\xi - \eta_1, \dots, \xi - \eta_{\lambda_k}$ proportional mit $(x - \alpha_k)^{\frac{-q_k}{\lambda_k}}$, oder es bleibt $(\xi - \eta_1) \dots (\xi - \eta_{\lambda_k})(x - \alpha_k)^{q_k}$ endlich in dem Punkte $(\alpha_k, \beta_k$; folglich wird

$$P(x - \alpha_1)^{q_1} \dots (x - \alpha_\sigma)^{q_\sigma}$$

in keinem der σ Punkte $(\alpha_1, \beta_1), \dots, (\alpha_\sigma, \beta_\sigma)$ unendlich.

Endlich ist nach (3) in dem Punkte $(x = \infty,\ y = \infty)$ des l^{ten} Blattes, wenn η_l der zu demselben gehörige Zweig von η ist, der Werth $\xi - \eta_l$ proportional mit x^{r_l} oder es bleibt $(\xi - \eta_l)x^{-r_l}$ endlich in dem betrachteten Punkte $(x = \infty,\ y = \infty)$; folglich ist

$$Px^{-(r_1 + r_2 + \dots + r_n)}$$

endlich für alle Punkte $(x = \infty,\ y = \infty)$.

Fasst man diese Betrachtungen zusammen, so ergibt sich, dass die folgende Function

$$P_1 = (\xi - \eta_1) \dots (\xi - \eta_n)(x - a_1)^{p_1} \dots (x - a_\varrho)^{p_\varrho}(x - \alpha_1)^{q_1} \dots (x - \alpha_\sigma)^{q_\sigma} \tag{6}$$

eine rationale Function von x ist, die für keinen endlichen Werth von x ∞ wird und die für $x=\infty$ selber ∞ ist in der Ordnung

$$\sum_{i=1}^{\varrho} p_i + \sum_{k=1}^{\sigma} q_k + \sum_{l=1}^{n} r_l = \nu. \tag{7}$$

Daher ist P_1 eine ganze, rationale Function der Variabeln x vom Grade ν (7). Zugleich aber ist P_1 eine ganze, rationale Function in ξ vom Grade n, die für die Werthe $\xi = \eta_1, \eta_2, .., \eta_n$ und für keinen andern Werth verschwindet. Bezeichnet man diese Function P_1 mit $\Phi(\overset{n}{\xi}, \overset{\nu}{x})$, so ist offenbar die Function η die Wurzel der Gleichung

$$\Phi(\overset{n}{\eta}, \overset{\nu}{x}) = b_0\eta^n + b_1\eta^{n-1} + \cdot\cdot + b_{n-1}\eta + b_n = 0, \tag{8}$$

wo die Coefficienten $b_0, b_1, .., b_n$ ganze, rationale Functionen in x sind, von denen wenigstens einer den Grad ν erreicht. Der Coefficient

$$b_0 = (x-a_1)^{p_1} \dots (x-a_\varrho)^{p_\varrho} (x-\alpha_1)^{q_1} \dots (x-\alpha_\sigma)^{q_\sigma}$$

ist bei unseren Voraussetzungen (1, 2, 3) nur vom Grade $\nu - \sum_{l=1}^{n} r_l$.

Die algebraische Gleichung (8) ist entweder selber unzerfällbar, oder eine Potenz einer unzerfällbaren Gleichung. Denn, wäre $\Phi(\overset{n}{\eta}, \overset{\nu}{x})$ das Product von zwei oder mehreren verschiedenen, unzerfällbaren Factoren, also etwa $= \Phi_1(\overset{n'}{\eta}, \overset{\nu'}{x}) \cdot \Phi_2(\overset{n''}{\eta}, \overset{\nu''}{x})$, so wäre $\Phi_1(\eta, x)$ gleich 0 für einen Theil der Wurzeln (4), nämlich für $\eta_1 = \varphi_1(x), .., \eta_{n'} = \varphi_{n'}(x)$, also $\Phi_1(\eta, x)$ eine Function von x, die in einem Theil der Fläche T verschwindet. Da aber T zusammenhängend ist und $\Phi_1(\eta, x)$ als Function von x sich durch Reihenentwicklung über den ganzen übrigen Theil von T fortsetzen lässt, so folgt, dass $\Phi_1(\eta, x)$ in der ganzen Fläche T gleich 0 sein muss. Dasselbe würde von $\Phi_2(\eta, x)$ gelten. Die zwei unzerfällbaren Functionen $\Phi_1(\eta, x)$ und $\Phi_2(\eta, x)$ würden also für eine unendliche Zahl von Werthepaaren (η, x) gleichzeitig verschwinden. Dies ist nur möglich, wenn die eine durch Multiplication mit einer Constanten aus der anderen erhalten wird. (q. e. d.) Wir setzen im Folgenden die Function η von der Beschaffenheit voraus, dass die Gleichung $\Phi(\eta, x) = 0$ unzerfällbar ist.

Die vorstehenden Betrachtungen führen nun **zweitens** zu dem **Nachweis**, dass die **Function** η eine **rationale Function** der **beiden durch die Gleichung** $F(x, y) = 0$ **verbundenen Grössen** (x, y) ist[1].

---

1) Vgl. Briot, Théorie des fonct. Abel. S. 173 ff. (1879).

Die einem Punkt x entsprechenden Werthe von y und η seien wie früher $y_1, \dots, y_n$ und $\eta_1, \dots, \eta_n$; die Werthe $y_1, \dots, y_n$ sind alle verschieden, wenn x nicht in einen der kritischen Punkte fällt. Ferner sind die Werthe $\eta_1, \dots, \eta_n$ den Werthen $y_1, \dots, y_n$ eindeutig zugeordnet, da die Function η in der Fläche T eine eindeutige Function des Ortes sein sollte. Diese Zuordnung sei derart, dass in einem beliebig gewählten regulären Punkte η_i und y_i einander entsprechen. Dann zeigt eine der obigen analoge Betrachtung, dass die n aus den y_i und η_i gebildeten, symmetrischen Functionen

$$\left.\begin{array}{l} \eta_1 + \eta_2 + \cdots + \eta_n = R_0, \\ \eta_1 y_1 + \eta_2 y_2 + \cdots + \eta_n y_n = R_1, \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ \eta_1 y_1^{n-1} + \eta_2 y_2^{n-1} + \cdots + \eta_n y_n^{n-1} = R_{n-1} \end{array}\right\} \quad (9)$$

rationale, gebrochene Functionen der Variabeln x allein sind. Dabei können die R_i nicht alle identisch 0 sein, weil sonst für alle Werthe von x entweder die η_i sämmtlich 0 oder von den Werthen $y_1, \dots, y_n$ zwei oder mehr einander gleich wären. Multiplicirt man die Gleichungen (9) bez. mit $A_{n-1}, A_{n-2}, \dots, A_1, 1$, und bestimmt diese Grössen so, dass bei der Addition die Coefficienten von $\eta_2, \eta_3, \dots, \eta_n$ gleich 0 werden, so hat man die Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} y_2^{n-1} + A_1 y_2^{n-2} + \cdots + A_{n-1} = 0, \\ y_3^{n-1} + A_1 y_3^{n-2} + \cdots + A_{n-1} = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n^{n-1} + A_1 y_n^{n-2} + \cdots + A_{n-1} = 0, \end{array}\right\} \quad (10)$$

und weiter zur Bestimmung von η_1 die Gleichung:

$$\left.\begin{array}{l} \eta_1 \left(y_1^{n-1} + A_1 y_1^{n-2} + \cdots + A_{n-1}\right) \\ \qquad = R_{n-1} + A_1 R_{n-2} + \cdots + A_{n-1} R_0. \end{array}\right\} \quad (11)$$

Die Gleichungen (10) lehren, dass die Grössen $1, A_1, A_2, \dots, A_{n-1}$ proportional sind den Coefficienten derjenigen Gleichung vom $n - 1^{\text{ten}}$ Grade, deren Wurzeln $y_2, y_3, \dots, y_n$ sind. Diese Gleichung ergibt sich, indem man die linke Seite von

$$F(x, y) = a_0 y^n + a_1 y^{n-1} + \cdots + a_{n-1} y + a_n = 0$$

durch $y - y_1$ dividirt; man erhält

$$\frac{F(x, y)}{y - y_1} = a_0 y^{n-1} + (a_0 y_1 + a_1) y^{n-2} + \cdots + (a_0 y_1^{n-1} + a_1 y_1^{n-2} + \cdots + a_{n-1}).$$

Daher ist

$$A_1 = \frac{a_0 y_1 + a_1}{a_0}, \dots, \quad A_{n-1} = \frac{a_0 y_1^{n-1} + a_1 y_1^{n-2} + \cdots + a_{n-1}}{a_0}, \quad (12)$$

d. h. die Grössen $A_1, \ldots, A_{n-1}$ sind rationale Functionen in x und y_1. Trägt man diese Werthe in die Gleichung (11) ein, so stellt sich auch η_1 als rationale Function von x und y_1 dar. Da nun y_1 einen beliebigen Werth von y und η_1 den entsprechenden Werth von η bezeichnet, so folgt, dass die Function η eine rationale Function von (x, y) ist, die nach (11) und (12) die Form erhält:

$$(13)\ \eta = \frac{a_0 R_{n-1} + (a_0 y + a_1) R_{n-2} + \cdots + (a_0 y^{n-1} + a_1 y^{n-2} + \cdots + a_{n-1}) R_0}{n a_0 y^{n-1} + (n-1) a_1 y^{n-2} + \cdots + a_{n-1}},$$

wo also der Nenner grade die Function $F'(y)$ ist. Man kann dem Ausdruck (13) leicht noch eine andere Form geben, in der an Stelle des Nenners $F'y$ die Discriminante $D(x)$ von $F(x, y)$ nach y tritt, während der Zähler von derselben Form in Bezug auf x und y ist wie in (13).

An den Satz I schliessen sich noch zwei wichtige Zusätze an nämlich:

(Ia) Eine in T eindeutige und reguläre Function oder auch eine rationale Function der Variabeln (x, y), die in keinem Punkte in T ∞ wird, ist eine Constante.

Denn wird die in (I) betrachtete Function η in keinem Punkte von T ∞, so ist in (8) $\nu = 0$ und folglich ist η eine Constante. (q.e.d.)

(Ib) Zwei in T eindeutige und reguläre Functionen oder auch zwei rationale Functionen der Variabeln (x, y), welche in den nämlichen Punkten und in jedem derselben von der nämlichen Ordnung 0 und ∞ werden, können sich nur um einen constanten Factor unterscheiden.

Denn der Quotient von zwei solchen Functionen ist eine rationale Function von (x, y), die in keinem Punkte von T ∞ wird, d. h. nach (Ia), er ist eine Constante.

Ein zweiter Satz, die Umkehrung von (I), gibt eine erste Eigenschaft der rationalen Functionen von (x, y) an, nämlich:

(II) Eine rationale Function der beiden durch die irreducible Gleichung $F(x, y) = 0$ verbundenen Variabeln (x, y), also eine Function von der Form

$$(14) \qquad \eta = \frac{M(x, y)}{N(x, y)},$$

wo M und N ganze, rationale Functionen von (x, y) sind, ist eine in der Verzweigungsfläche T eindeutige und reguläre Function des Ortes.

Wir geben hier nur einen kurzen Beweis dieses Satzes und verweisen zur Ergänzung auf die ausführliche Untersuchung der rationalen Functionen von (x, y), ihrer 0- und ∞-Punkte und ihrer Bildung aus denselben im zweiten Abschnitt.

Es ist nachzuweisen, dass die Function η (14) eindeutig in T ist und dass sie in T nur in einer endlichen Anzahl von Punkten und in jedem derselben nur in endlicher Ordnung ∞ wird.

Sind zunächst y_i, y_k zwei demselben x zugehörige Werthe von y und η_i, η_k die entsprechenden Werthe von η, und führt man (x, y) auf irgend einem Wege vom Punkt (x, y_i) zum Punkt (x, y_k), so muss auf demselben Wege η_i in η_k übergehen, weil nach (14) jedem Werthepaar (x, y) nur ein Werth von η entspricht. Lässt man den Punkt (x, y) verschiedenartige Punkte der Fläche T umkreisen, so finden für die η-Werthe dieselben Gruppirungen statt, wie für die y-Werthe. Betrachtet man η (durch Vermittelung von $F(x, y) = 0$) als Function von x und construirt die Verzweigungsfläche T dieser Function η, so hat T dieselben Verzweigungspunkte und Verzweigungsschnitte mit demselben Zusammenhang der Blätter, wie die Verzweigungsfläche T von y. Daher nennt Riemann die Gesammtheit der rationalen Functionen von (x, y) ein System gleichverzweigter Functionen.

Ist ferner $(x = a, y = b)$ kein Verzweigungspunkt in T, so hat in der Umgebung desselben für das dem Punkt zugehörige Blatt von T die Function y und jede ganzzahlige Potenz von y eine Entwicklung nach ganzen, positiven Potenzen von $x - a$, also eine Entwicklung von demselben Charakter wie y. Dasselbe gilt von dem Zähler M und dem Nenner N, also auch von der Function η (14), wenn N in dem Punkt (a, b) von 0 verschieden ist. Verschwindet aber N in (a, b), so geschieht dies stets in endlicher Ordnung und folglich wird auch die Function η in (a, b) nur in endlicher Ordnung ∞. Ist (a, b) ein $\lambda - 1$-facher Verzweigungspunkt, so treten an Stelle der vorigen Entwicklungen von y, M, N und η wieder solche von gleichem Charakter, nämlich solche, die nach Potenzen von $(x - a)^{\frac{1}{\lambda}}$ fortschreiten. Auch hier ist η entweder endlich oder nur in endlicher Ordnung ∞. Für die Punkte $(x = \infty, y = \infty)$ in T haben M, N und η ebenfalls Entwicklungen von demselben Charakter wie y, d. h. nach ganzen Potenzen von x; auch in ihnen wird die Function η, wenn sie nicht 0 oder endlich ist, nur in endlicher Ordnung ∞.

Zweiter Abschnitt.

Die rationalen Functionen von (x, y).

In § 6 wurde durch Betrachtungen, die der Functionentheorie angehören, gezeigt, dass unter Voraussetzung der irreduciblen Gleichung $F(x, y) = 0$ eine in der Verzweigungsfläche T von y eindeutige und reguläre Function identisch ist mit einer rationalen Function der beiden Variabeln (x, y)

$$M(x, y) : N(x, y), \tag{1}$$

wo M und N ganze, rationale Functionen sind.

Es sollen jetzt unter Voraussetzung der Gleichung $F(x, y) = 0$ direct die Eigenschaften einer rationalen Function der Form (1) und ihre Bildung aus gewissen Elementen untersucht werden. Dieser Stoff ist in folgender Weise gegliedert:

§ 7—9 enthält die Untersuchung der Nullpunkte einer ganzen, rationalen Function von (x, y) und der Kriterien für eine ganze, rationale Function;

§ 10 und 11 die Untersuchung der Null- und Unendlichkeitspunkte einer gebrochenen, rationalen Function von (x, y) und der Abhängigkeit dieser Punkte von einander;

§ 12 und 13 gibt die Bildungsweise der rationalen Functionen von (x, y) aus gewissen Elementen und die Abhängigkeit dieser Elemente von einander.

Wir schicken noch folgende Bemerkungen voraus. Die Untersuchung ist an sich rein algebraisch. Um aber den algebraischen Processen und Resultaten eine kurze Fassung zu geben, benutzen wir die in § 4 erwähnte geometrische Ausdrucksweise, nach welcher $F(x, y) = 0$ eine algebraische Curve vom Grade n und vom Geschlecht p ist und den 0^1 und ∞^1 Punkten einer Function (1) die Schnittpunkte von $F(x, y) = 0$ mit den Curven $M(x, y) = 0$ und $N(x, y) = 0$ entsprechen, zu denen noch der Punkt $(x = \infty, y = \infty)$ treten kann.

Da ferner die Untersuchung der rationalen Functionen von (x, y) unter allgemeinen Voraussetzungen eine grössere, die Uebersicht erschwerende Ausdehnung erfordern würde, so lassen wir hier und im Folgenden Beschränkungen eintreten, nämlich im Bezug auf $F(x, y) = 0$ die, dass nur einfache Verzweigungspunkte und von singulären Punkten im Endlichen nur die einfachsten, nämlich Doppelpunkte auftreten und in Bezug auf die Functionen M und N die, dass ihr Verhalten in diesen Punkten von besonders einfacher, noch näher zu bestimmender Art sei. Doch soll die Untersuchung unter diesen beschränkenden Voraussetzungen so geführt werden, dass eine Verallgemeinerung der Voraussetzungen den Gedankengang ungeändert lässt und nur ein tieferes Eingehen auf die singulären Punkte von $F(x, y) = 0$ und das Verhalten von M und N in denselben erfordert.

§ 7. Die Nullpunkte der ganzen, rationalen Function.

Wir halten bez. $F(x, y) = 0$ die früheren Voraussetzungen (A), (B), (C) S. 39 fest und beginnen mit der Untersuchung der Nullpunkte einer ganzen, rationalen Function $N(x, y)$. Dieselbe sei vom Grade ν, d. h. so beschaffen, dass für jedes Glied $x^i y^k$ die Dimension $i + k \leqq \nu$ sei.

Zur Vereinfachung der Beweise sei die weitere Voraussetzung hinzugefügt,

(E) dass zwei endliche und verschiedene, gemeinsame Werthepaare von $F(x, y) = 0$ und $N(x, y) = 0$ weder gleiches x noch gleiches y besitzen,

oder geometrisch, dass von den Schnittpunkten der beiden Curven $F = 0$ und $N = 0$ nicht zwei auf einer zur x- oder y-Axe parallelen Linie liegen.

Diese Voraussetzung (E) ist keine wesentliche Beschränkung, sondern lässt sich gleichzeitig mit (A, B, C) durch eine lineare Transformation der in § 4 angegebenen Art erfüllen.

Es gilt nun der folgende Satz:

(I) Die Zahl der 0^1 Punkte einer rationalen Function $N(x, y)$ vom Grade ν in der durch $F(x, y) = 0$ bestimmten Verzweigungsfläche T ist $= n\nu$,

oder die Zahl der gemeinsamen Punkte der Curve $F = 0$ vom Grade n und der Curve $N = 0$ vom Grade ν ist $= n\nu$[1]); die Coordinaten dieser Punkte sind alle endlich.

1) Bézout, Mém. Acad. Paris. 1764. S. 288 ff.

Dabei wird, wie immer, ein 0^p-Punkt für p 0^1-Punkte gerechnet.

Um die Zahl der gemeinsamen Punkte der beiden Curven

$$(1) \qquad \begin{cases} F(x, y) = a_0 y^n + a_1 y^{n-1} + \cdots + a_{n-1} y + a_n = 0, \\ N(x, y) = c_0 y^\nu + c_1 y^{\nu-1} + \cdots + c_{\nu-1} y + c_\nu = 0 \end{cases}$$

zu bestimmen, hat man die Resultante X von $F = 0$ und $N = 0$ nach y zu bilden, was in ähnlicher Weise geschieht, wie im § 4 die Bildung der Discriminante von $F = 0$ nach y. Sind wieder $y_1, y_2, \ldots, y_n$ die n Wurzeln von $F(x, y) = 0$ in Bezug auf y, so hat man, abgesehen von einem constanten Factor,

$$(2) \qquad X = N(x, y_1)\, N(x, y_2) \ldots N(x, y_n).$$

Denn dies Product ist erstens eine rationale Function von x allein, weil es sich als rationale und symmetrische Function der n Wurzeln y_i rational in den Coefficienten $a_0, a_1, \ldots, a_n$ der ersten Gleichung (1) darstellt; und es ist zweitens eine ganze Function von x, da es für keinen endlichen Werth von x unendlich wird, weil nach Voraussetzung (B) S. 39 für endliche Werthe von x auch die n Werthe y_i endlich sind. Da ausserdem das Product (2) für jeden gemeinsamen Punkt von $F = 0$ und $N = 0$ und nur für solche Punkte verschwindet, so ist es identisch mit der Resultante dieser beiden Gleichungen nach y. Die Zahl der gemeinsamen Punkte von $F = 0$ und $N = 0$ ist der Grad von X in x oder die Ordnung, in der X ∞ wird für $x = \infty$. Es wird aber für $x = \infty$ jeder Factor in (2) $= \infty^\nu$, also $X = \infty^{n\nu}$, womit der obige Satz bewiesen ist.

Die Zahl der 0^1 Punkte einer ganzen, rationalen Function ist hiernach ebenso gross, wie die der ∞^1 Punkte, da N in jedem der n Punkte $(x = \infty, y = \infty)$ gleich ∞^1 wird.

Aus (I) folgt weiter der Satz[1]):

(II) Eine gebrochene, rationale Function $M(x, y) : N(x, y)$ wird in ebenso viel Punkten in der Fläche T oder auf der Curve $F(x, y) = 0$ null wie unendlich in der ersten Ordnung; die Zahl dieser Punkte heisst die Ordnung der rationalen Function $M : N$.

Es sei, wie $F(x, y)$ vom n^{ten}, in gleicher Weise $M(x, y)$ vom μ^{ten}, $N(x, y)$ vom ν^{ten} Grade, so dass nach (I) die Anzahl der 0^1 Punkte von M auf $F = 0$ gleich $n\mu$, die von N auf $F = 0$ gleich $n\nu$ ist. Ist nun $\mu = \nu$, so ist die Zahl der ∞^1 und der 0^1 Punkte der Func-

1) Ein zweiter Beweis dieses Satzes findet sich § 14, Satz V.

tion $M:N$ gleich $n\mu$ und diese Punkte liegen im Endlichen auf $F=0$. Ist $\mu > \nu$, so wird $M:N = 0^1$ in den $n\mu$ Nullpunkten von M und $=\infty^1$ in den $n\nu$ Nullpunkten von N, ausserdem aber $=\infty^{\mu-\nu}$ in jedem der n Punkte $(x=\infty,\ y=\infty)$ auf $F=0$, d. h. im Ganzen $=\infty^1$ ebenfalls in $n\mu$ Punkten. Ist $\mu < \nu$, so wird $M:N=\infty^1$ in den $n\nu$ Nullpunkten von N und $=0^1$ in den $n\mu$ Nullpunkten von M, ausserdem aber $=0^{\nu-\mu}$ in jedem der n Punkte $(x=\infty,\ y=\infty)$ auf $F=0$, d. h. im Ganzen $=0^1$ ebenfalls in $n\nu$ Punkten. Es ist also in allen Fällen die Zahl der ∞^1 und der 0^1 Punkte von $M:N$ endlich und gleich gross. Fallen einige der 0^1 Punkte von M mit 0^1 Punkten von N zusammen, so ist die Ordnung von $M:N$ nicht mehr die eben bestimmte, sondern um die Zahl dieser zusammenfallenden 0^1 Punkte von M und N geringer. Auch die Zahl der Punkte auf $F=0$, in welchen $M:N$ einen bestimmten Werth A annimmt, ist gleich der Zahl der 0^1 oder ∞^1 Punkte, wie sich leicht durch Betrachtung der Function $(M-AN):N$ ergibt.

Wir kehren zurück zur ganzen, rationalen Function N und zur Resultante X und untersuchen, in welcher Weise die Wurzeln von $X=0$ den gemeinsamen Punkten von $F=0$ und $N=0$ entsprechen. Ist ein gemeinsamer Punkt $(x_1,\ y_1)$ ein einfacher Punkt von $F=0$ und ebenso von $N=0$, so ist in ihm F und N und folglich auch X proportional mit $(x-x_1)$, d. h. dem Punkte $(x_1,\ y_1)$ entspricht eine einfache Wurzel x_1 von $X=0$. Hieran ändert sich nichts, wenn der Schnittpunkt $(x_1,\ y_1)$ zugleich Verzweigungspunkt ist, weil dann für jeden der beiden gleichen Werthe von y $N(x,y)$ proportional mit $(x-x_1)^{\frac{1}{2}}$, also nach (2) X wieder proportional mit $x-x_1$ wird. Ist dagegen ein Punkt $(x_1,\ y_1)$ einfacher Punkt von $N=0$ und Doppelpunkt von $F=0$, so wird für jeden der beiden gleichen Werthe von y N proportional mit $x-x_1$, also X proportional mit $(x-x_1)^2$, d. h. dem Punkt $(x_1,\ y_1)$ entspricht eine Doppelwurzel x_1 von $X=0$. Dasselbe gilt, wenn $(x_1,\ y_1)$ einfacher Punkt von F und Doppelpunkt von N ist, weil dann in ihm N und ebenso X proportional mit $(x-x_1)^2$ ist. Berühren sich endlich die Curven F und N in einem Punkte $(x_1,\ y_1)$, so ist in ihm N und ebenso X proportional mit $(x-x_1)^2$, d. h. dem Punkt entspricht ebenfalls eine Doppelwurzel von $X=0$. Beschränkt man sich auf diese einfachsten Fälle, so hat man den Satz:

(III) Jedem gemeinsamen Werthepaar der Gleichungen $F=0$ und $N=0$ entspricht eine einfache oder mehrfache Wurzel

der Resultante $X = 0$. Ist der gemeinsame Punkt einfacher Punkt für beide Curven, so ist die entsprechende Wurzel von $X = 0$ einfach. Ist dagegen der gemeinsame Punkt entweder einfacher Berührungspunkt von F und N oder ein Schnittpunkt von F und N, der für die eine Curve einfacher, für die andere Curve Doppelpunkt ist, so ist die entsprechende Wurzel von $X = 0$ eine Doppelwurzel.

Für die weiteren Betrachtungen ist X als Function von x wirklich darzustellen. Durch Elimination von y aus den Gleichungen (1) erhält man X in Gestalt einer Determinante, deren Reihen $n + \nu$ Elemente enthalten:

$$(3) \qquad X = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \cdot & \cdot & a_n & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & a_0 & \cdot & \cdot & a_{n-1} & a_n & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & a_0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_n & 0 \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & a_0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_{n-1} & a_n \\ c_0 & c_1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & c_\nu & 0 & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & c_0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & c_{\nu-1} & c_\nu & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & c_0 & \cdot & \cdot & \cdot & c_\nu & 0 \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & c_0 & \cdot & \cdot & c_{\nu-1} & c_\nu \end{vmatrix}.$$

Hieraus ergibt sich für X eine weitere wichtige Form. Multiplicirt man die Verticalreihen der Determinante (3) bezüglich mit

$$y^{n+\nu-1}, \quad y^{n+\nu-2}, \ldots, \quad y, \quad 1$$

und addirt alle zur letzten Verticalreihe, so werden die Elemente derselben

$$Fy^{\nu-1}, \quad Fy^{\nu-2}, \ldots, \quad Fy, \quad F, \quad Ny^{n-1}, \quad Ny^{n-2}, \ldots, \quad Ny, \quad N$$

und man erhält für X die Form

$$(4) \qquad X = AF + CN,$$

wo A und C ganze, rationale Functionen in (x, y) sind.

Wir fragen nunmehr nach der Lage oder den Coordinaten (x, y) der gemeinsamen Punkte von $F = 0$ und $N = 0$.[1]) Dieselben ergeben sich ähnlich wie in § 5 die Coordinaten der kritischen

---

1) Nöther, Math. Ann. Bd. 23. S. 311 ff. (1883) für allgemeine Voraussetzungen.

Punkte von $F = 0$. Nach Satz (III) zerfällt der Ausdruck (3) für X in zwei Factoren, derart, dass

$$X = X_1 X_2^2,$$

wo in X_1 die einfachen, in X_2 die Doppelwurzeln von $X = 0$ zusammengefasst sind. Die Ausdrücke für X_1 und X_2 erhält man aus (3) auf rationale Weise. X_2 nämlich ist der grösste gemeinsame Theiler von $X = 0$ und $\frac{\partial X}{\partial x} = 0$ und X_1 der Quotient von X durch X_2^2.

Sind die Gleichungen $X_1 = 0$ und $X_2 = 0$ gelöst, so hat man die x-Ordinaten der gemeinsamen Punkte von $F = 0$ und $N = 0$. Die zugehörigen y-Ordinaten erhält man in bekannter Weise rational in x. Multiplicirt man nämlich die erste der Gleichungen (1) mit $y^{\nu-2}, y^{\nu-3}, \ldots, y, 1$, die zweite mit $y^{n-2}, y^{n-3}, \ldots, y, 1$ und schreibt je die erste dieser Gleichungen

$$(a_0 y + a_1) y^{n+\nu-3} + a_2 y^{n+\nu-4} + \cdots + a_n y^{\nu-2} = 0,$$
$$(c_0 y + c_1) y^{n+\nu-3} + c_2 y^{n+\nu-4} + \cdots + c_\nu y^{n-2} = 0,$$

so kann man $y^{n+\nu-3}, y^{n+\nu-4}, \ldots, y, 1$ eliminiren und erhält eine Gleichung, linear in y, aus der sich y rational in x ergiebt. Ist also x_i eine Wurzel der Gleichung $X = 0$, so stellt sich der zugehörige Werth y_i dar in der Form $y_i = R(x_i)$. Die Function R ist rational und ihre Coefficienten sind rationale Functionen der constanten Coefficienten von F und N. Zugleich folgt, dass man eine rationale und symmetrische Function der Coordinaten (x_i, y_i) der gemeinsamen Punkte von $F = 0$ und $N = 0$ als rationale Function der constanten Coefficienten dieser beiden Gleichungen darstellen kann, ohne vorher die Gleichungen $X_1 = 0$ und $X_2 = 0$ zu lösen. Denn eine solche Function lässt sich zuerst mit Hülfe der Gleichungen $y_i = R(x_i)$ als rationale, symmetrische Function der Grössen x_i allein ausdrücken, deren Coefficienten rationale Functionen der Coefficienten von F und N sind und diese Function geht mit Hülfe von $X_1 X_2 = 0$ in eine rationale Function der Coefficienten von F und N allein über. Dies giebt den Satz:

(IV) Die Bestimmung der Coordinaten (x_i, y_i) der gemeinsamen Punkte von $F = 0$ und $N = 0$ erfordert ausser der Lösung der Gleichungen $X_1 = 0$ und $X_2 = 0$ nur rationale Operationen. Die Darstellung einer rationalen und symmetrischen Function der Coordinaten (x_i, y_i) durch die Coefficienten von F und N vollzieht sich in rationaler Weise ohne Lösung der Gleichungen $X_1 = 0$, $X_2 = 0$.

Die Form (4) der Resultante X dient noch zum Beweis der Umkehrung von (III) oder zum Beweis des Satzes:

(V) Jeder einfachen Wurzel der Gleichung $X = 0$ entspricht ein einfacher Schnittpunkt der Curven $F = 0$ und $N = 0$, jeder Doppelwurzel entweder ein einfacher Berührungspunkt von F und N oder ein Schnittpunkt von F und N, der für die eine Curve einfacher, für die andere Doppelpunkt ist.

Ist nämlich $x = x_1$ eine einfache Wurzel von $X = 0$, zu der nach Voraussetzung (E) auch nur ein Werth $y = y_1$ gehört, so folgt aus der Identität (4), dass der gemeinsame Punkt ($x = x_1$, $y = y_1$) von $F = 0$ und $N = 0$ nur einfacher Schnittpunkt dieser beiden Curven ist. Ist dagegen $x = x_1$ eine Doppelwurzel von $X = 0$, so gehört zu derselben nach Voraussetzung (E) nur ein Werth $y = y_1$ (y_1 ist Doppelwurzel der Gleichung $Y = 0$ d. h. der Resultante von (1) nach x). Nun folgt durch Differentiation der identischen Gleichung (4):

$$dX = AdF + FdA + CdN + NdC.$$

Bezeichnet man das Resultat der Substitution ($x = x_1$, $y = y_1$) in X, F, N, A, C durch Anhängen des Zeigers 1, so folgt hieraus für ($x = x_1$, $y = y_1$), da $dX_1 = 0$, $F_1 = 0$, $N_1 = 0$ ist,

$$A_1 dF_1 + C_1 dN_1 = 0.$$

Diese Gleichung ist für alle Werthe von $dy : dx$ erfüllt; es folgt daher

$$A_1 F'(x_1) + C_1 N'(x_1) = 0, \quad A_1 F'(y_1) + C_1 N'(y_1) = 0$$

und hieraus, wenn A_1 und C_1 nicht gleichzeitig verschwinden, entweder

$$F'(x_1) : F'(y_1) = N'(x_1) : N'(y_1)$$

d. h. die Curven F und N berühren sich in (x_1, y_1), oder

$$F'(x_1) = F'(y_1) = 0, \quad C_1 = 0$$

d. h. F hat einen Doppelpunkt in (x_1, y_1), oder

$$N'(x_1) = N'(y_1) = 0, \quad A_1 = 0$$

d. h. N hat einen Doppelpunkt in (x_1, y_1).

Ist aber $A_1 = C_1 = 0$, so muss einer der drei vorstehenden Fälle ebenfalls eintreten; denn andernfalls hätten F und N bloss einfache Schnittpunkte, also könnte nach (III) $\left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)_{x_1}$ nicht $= 0$ sein, was gegen die Voraussetzung ist. (q. e. d.)

§ 8. Kriterien für eine ganze, rationale Function.

Von besonderer Wichtigkeit für die weiteren Untersuchungen ist die Frage nach den Kriterien dafür, dass eine gebrochene, rationale Function $M(x, y) : N(x, y)$ sich mit Hilfe von $F = 0$ in eine ganze, rationale Function $G(x, y)$ überführen lasse. Wie die vorstehenden Betrachtungen zeigen, verhalten sich die einfachen Verzweigungspunkte hierbei durchaus wie gewöhnliche einfache Punkte von $F(x, y) = 0$. Beschränkt man die Singularitäten von $F = 0$, wie schon bemerkt, auf Doppelpunkte, und setzt voraus, dass N die Curve F nicht berühre und durch Doppelpunkte von F nur einfach hindurchgehe, so gilt der Satz[1]):

(I) Sind M und N ganze, rationale Functionen vom μ^{ten} und ν^{ten} Grade in (x, y) und ist $\mu > \nu$, so sind die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, dass die rationale Function $M : N$ sich mit Hilfe von $F(x, y)$ in eine ganze, rationale Function $G(x, y)$ verwandeln lasse:

1) dass sie nur ∞ wird in den Punkten $(x = \infty, y = \infty)$;
2) dass sie in jedem Doppelpunkt von F für die beiden Zweige den nämlichen Werth annimmt.

Diese Bedingungen sind nothwendig, wie sich daraus ergiebt, dass sie für eine ganze Function $G(x, y)$, also auch für eine gebrochene Function, die sich durch $F = 0$ in eine ganze Function überführen lässt, stets erfüllt sind. Weniger einfach ist der Beweis dafür, dass diese Bedingungen auch hinreichend sind; um ihn zu führen, geben wir dem Satze (I) die folgende Form:

(Ia) Damit eine gebrochene Function $M : N\,(\mu > \nu)$ sich mit Hilfe von $F = 0$ in eine ganze Function $G(x, y)$ verwandeln lasse oder, was dasselbe sagt, damit sich M auf die Form bringen lasse

$$M = GN + HF, \tag{1}$$

wo G und H ganze Functionen sind, ist nothwendig und hinreichend:

1) dass $M = 0$ durch alle einfachen Schnittpunkte von $F = 0$ und $N = 0$ mindestens einfach hindurchgeht;
2) dass $M = 0$ in einem Doppelpunkt von $F = 0$, durch den $N = 0$ einfach hindurchgeht, entweder auch einen Doppelpunkt hat oder $N = 0$ berührt.

---

1) Nöther, Math. Ann. VI, p. 351 ff. (1872) mit allgemeinen Voraussetzungen.

Es ist leicht zu sehen, dass der Satz (Ia) sich mit (I) deckt. Denn soll $M:N$ nicht für ein endliches Coordinatenpaar (x, y) von F ∞ werden, so muss M durch jeden einfachen Schnittpunkt von F und M hindurchgehen. Ebenso muss M in jedem Doppelpunkt von F, durch den N einfach hindurchgeht, verschwinden. Das genügt indess nicht. Denn in einem solchen Doppelpunkt, in dem M und N einfach verschwinden, hat $M:N$ den Werth

$$\frac{M'(x)dx + M'(y)dy}{N'(x)dx + N'(y)dy}.$$

Soll nun dieser Werth für die beiden in dem Doppelpunkt von F verschiedenen Quotienten $dy:dx$ der gleiche sein, so muss, da $N'(x)$ und $N'(y)$ von 0 verschieden sind,

entweder $M'(x) = M'(y) = 0$ sein d. h. es muss M in dem Punkte ebenfalls einen Doppelpunkt haben,

oder $M'(x):N'(x) = M'(y):N'(y)$ sein d. h. es muss M in dem Punkte N berühren.

Umgekehrt, geht M durch alle einfachen Schnittpunkte von F und N hindurch, so wird $M:N$ in diesen Punkten nicht ∞. Geht aber N durch einen Doppelpunkt von F einfach hindurch und hat M in demselben entweder ebenfalls einen Doppelpunkt oder eine Berührung mit N, so ist für diesen Punkt ausser $M = 0$ und $N = 0$ im ersten Falle $M'(x) = M'(y) = 0$, im zweiten Falle $M'(x):N'(x) = M'(y):N'(y)$ d. h. in beiden Fällen hat $M:N$ in dem Doppelpunkt für die beiden Zweige den gleichen Werth.

Nach diesen Bemerkungen bleibt nur zu zeigen, dass die im Satz (Ia) aufgestellten Bedingungen auch hinreichend sind dafür, dass sich M auf die Form (1) bringen lasse. Wir gehen aus von der in (4) § 7 gefundenen Form der Resultante X von F und N in Bezug auf y:

$$X = AF + CN, \tag{2}$$

in der A und C bekannte, ganze Functionen von (x, y) sind. Bildet man das Product AM und zieht durch Division aus dem Quotienten $AM:N$ die etwa in ihm enthaltene, ganze Function von y heraus, so erhält man

$$AM = UN + W, \tag{3}$$

wo U und W ganze, rationale Functionen von (x, y) und W vom $(\nu-1)^{\text{ten}}$ oder niederen Grade in y ist. Setzt man zur Abkürzung die ganze Function von (x, y) $UF + CM = V$, so folgt aus (2) und (3)

$$XM = VN + WF. \tag{4}$$

Damit $M:N$ eine ganze Function sei, oder M in die gewünschte Form (1) übergehe, ist erforderlich, dass die Quotienten $V:X$ und $W:X$ ganze Functionen G und H von (x, y) seien. Die eine dieser Bedingungen zieht aber nach (4) die andere nach sich, da F irreducibel ist. Aus der Forderung, dass $W:X$ eine ganze Function H sei, ergeben sich neue Forderungen für das Verhalten von M in den gemeinsamen Punkten von F und N. Dabei sind zwei Fälle zu betrachten:

1. Die Resultante $X=0$ besitze nur einfache Wurzeln.

Nach Satz (V) § 7 haben dann die Curven $F=0$ und $N=0$ nur einfache Schnittpunkte. Sei $(x=x_1,\ y=y_1)$ ein solcher einfacher Schnittpunkt und seien $(x=x_1,\ y=y_1^i)$ $(i=1, \ldots \nu-1)$ die $\nu-1$ Schnittpunkte, welche die Gerade $x=x_1$ ausser dem Punkte (x_1, y_1) mit $N=0$ hat. Dann muss in der Identität (2) für die Punkte $(x=x_1,\ y=y_1^i)$ ausser X und N nothwendig A verschwinden, weil in diesen Punkten F nicht 0 wird nach Voraussetzung (E) § 7. Daher ist nach (3) in diesen Punkten $W=0$ oder es hat die Gleichung

$$(W)_{x=x_1}=0 \tag{5}$$

die $\nu-1$ verschiedenen Wurzeln $y=y_1^i$ $(i=1, \ldots \nu-1)$.

Hat nun M, wie wir annehmen, die Eigenschaft, dass es durch den Schnittpunkt (x_1, y_1) von F und N ebenfalls hindurchgeht, so kommt zu den $(\nu-1)$ Wurzeln von (5) noch als ν^{te} Wurzel $y=y_1$ hinzu, weil in (3) für (x_1, y_1) zugleich M und N verschwinden. Wenn aber die Gleichung (5), die vom $\nu-1^{ten}$ Gerade in y ist, ν verschiedene Wurzeln haben soll, so müssen ihre Coefficienten einzeln verschwinden. Es sind also die Coefficienten der Potenzen von y in W einzeln durch $x-x_1$ theilbar. Ebenso ergiebt sich, dass W durch die übrigen Linearfactoren von X theilbar ist. Hieraus folgt, dass $W:X$ eine ganze Function in (x, y) oder dass M in der Form (1) darstellbar ist. In dem vorliegenden, ersten Falle genügt also zur Herstellung der Gleichung (1) die Bedingung, dass M durch alle im Endlichen gelegenen Schnittpunkte von F und N mindestens einfach hindurchgeht, oder dass $M:N$ nur in den Punkten $(x=\infty,\ y=\infty)$ ∞ werde.

2. Fall. Die Gleichung $X=0$ besitze neben einfachen, noch Doppelwurzeln.

Die Doppelwurzeln von $X=0$ entstehen nach (III) § 7 dadurch, dass entweder die zwei Curven F und N sich einfach berühren oder dass in einem Schnittpunkt die eine Curve einen Doppelpunkt, die andere einen einfachen Punkt besitzt. Eine Berührung von F und N wurde ausgeschlossen. Sei also $x=x_2$ eine Doppelwurzel von $X=0$, die

einem Punkte $(x = x_2,\ y = y_2)$ entspreche, in dem F einen Doppelpunkt, N einen einfachen Punkt hat, so dass für $(x = x_2,\ y = y_2)$ die Gleichungen bestehen

$$F_2 = 0, \quad N_2 = 0, \quad F'(x_2) = 0, \quad F'(y_2) = 0.$$

Dann folgt zunächst, wie im ersten Fall, dass W den Factor $x - x_2$ besitzt. Man kann aber zeigen, dass $x - x_2$ ein Doppelfactor von W ist. Denn bezeichnet man mit $(x = x_2,\ y = y_2^i)$, wo $i = 1, .., \nu - 1$, die $(\nu - 1)$ übrigen Schnittpunkte, welche die Gerade $x = x_2$ ausser $(x_2,\ y_2)$ mit $N = 0$ besitzt und durch Einschliessen in Klammern [ ] den Werth der eingeschlossenen Function für einen Punkt $(x = x_2,\ y = y_2^i)$, so folgt aus der Identität (2), dass $[A] = 0$ und aus dem Differential von (2), nämlich

$$dX = AdF + FdA + CdN + NdC$$

durch Eintragen von $(x = x_2,\ y = y_2^i)$, wobei dX, N und A verschwinden, dass

$$[FdA + CdN] = 0.$$

Setzt man in dieser Gleichung, die für alle Werthe von $dy : dx$ erfüllt sein muss,

$$(6) \qquad [dN] = 0 \quad \text{oder} \quad dy : dx = -[N'(x) : N'(y)],$$

so wird $[dA] = 0$. Durch Differentiation von (3) aber folgt

$$(7) \qquad AdM + MdA = UdN + NdU + dW$$

und hieraus für $(x = x_2,\ y = y_2^i)$ und für den in (6) definirten Werth $dy : dx$ mit Rücksicht auf $A = 0$, $dA = 0$, $N = 0$, $dN = 0$, dass $[dW] = 0$ ist. Da nun W den Factor $(x - x_2)$ enthält, also gleichzeitig $[W] \equiv 0$ und $\left[\frac{\partial W}{\partial y}\right] \equiv 0$ ist, so muss auch $\left[\frac{\partial W}{\partial x}\right] = 0$ sein oder es muss

$$(8) \qquad \left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)_{x = x_2} = 0$$

die Wurzeln $y = y_2', .. y_2^{\nu - 1}$ haben. Kann man nun noch eine ν^{te}, von diesen verschiedene Wurzel y von (8) angeben, so ist (8) als Gleichung in y identisch erfüllt und $(x - x_2)$ eine Doppelwurzel von W. Eine solche Wurzel von (8) ist aber $y = y_2$, sobald die aus (7) für $(x = x_2,\ y = y_2)$ mit Rücksicht auf $M_2 = 0$, $N_2 = 0$ sich ergebende Beziehung

$$A_2 dM_2 = U_2 dN_2 + dW_2$$

durch Einführung des in (6) definirten Werthes $dy : dx$ sich auf $dW_2 = 0$ reducirt. Dies ist der Fall

entweder wenn M und N sich in (x_2, y_2) berühren,

oder wenn M in $(x_2 y_2)$ ebenso wie F einen Doppelpunkt besitzt. In beiden Fällen hat W mit X die Doppelwurzel $x = x_2$ gemein. Ist also eine dieser zwei Bedingungen für jede Doppelwurzel von X erfüllt, so ist die Division $W : X$ ausführbar und M in der Form (1) darstellbar. Hiermit ist der Satz (Ia) oder der Satz (I) in allen Theilen bewiesen.

Wir führen nur noch historisch eine Verallgemeinerung des Satzes (Ia) an und sprechen dieselbe so, wie sie später (§ 23) benutzt wird, für homogene Coordinaten (x_1, x_2, x_3) aus:

(II) Geht eine Curve $P(x_1, x_2, x_3) = 0$ durch alle Schnittpunkte zweier anderen Curven $Q(x_1, x_2, x_3) = 0$ und $F(x_1, x_2, x_3) = 0$, und zwar durch jeden solchen Punkt, der i-facher Punkt von $F = 0$ und k-facher Punkt von $Q = 0$ ist, $i + k - 1$-fach hindurch, so kann man immer P auf die Form bringen

$$P = AQ + CF,$$

wo A und C ganze, homogene Functionen von (x_1, x_2, x_3) sind[1]).

§ 9. Die adjungirten Functionen.[2])

Der Quotient zweier ganzen, rationalen Functionen $M(x, y)$ und $N(x, y)$ ist eine gebrochene, rationale Function $M(x, y) : N(x, y)$. Diese kann die besondere Eigenschaft der ganzen Functionen haben, dass sie in einem Doppelpunkt von $F(x, y) = 0$ für die beiden Zweige den nämlichen Werth annimmt, sie kann dagegen auch für beide Zweige verschiedene Werthe haben. Wir betrachten den letzteren Fall als den allgemeinen. Derselbe kann nur eintreten, wenn Zähler und Nenner M und N in dem Doppelpunkt verschwinden.

(A) Eine ganze rationale Function, die in jedem der r Doppelpunkte von $F = 0$ in erster Ordnung verschwindet, heisst eine adjungirte Function von $F = 0$.[3]) Unter den adjungirten Functionen sind die des $n - 3^{\text{ten}}$ Grades von ausgezeichnetem Charakter; sie werden nach Riemann mit

---

1) Für den Beweis s. Nöther, l. c.

2) Riemann, Ges. W. S. 107 ff. Brill u. Nöther, Math. Ann. Bd. 7, S. 269 ff. (1873), wo die Voraussetzungen über $F = 0$ allgemein sind.

3) Hat die Curve $F(x, y) = 0$ mehrfache Punkte mit getrennten Tangenten, so sind die adjungirten Curven solche, die durch jeden μ-fachen Punkt von $F = 0$ $(\mu - 1)$-fach hindurchgehen, ohne dass sich dabei einzelne Zweige beider Curven berühren.

dem besonderen Buchstaben Φ oder φ bezeichnet und Φ-Functionen genannt.

Wir untersuchen in diesem § die ganzen adjungirten Functionen, in den folgenden §§ die Quotienten solcher Functionen.

Die Zahl der Schnittpunkte zweier Curven $F = 0$ vom Grade n und $M = 0$ vom Grade μ ist nach (I) § 7 gleich $n\mu$. Ist $M = 0$ eine adjungirte Curve, so fallen $2r$ dieser Punkte in die r festen Doppelpunkte von $F = 0$. Bezeichnet man die Schnittpunkte, die $M = 0$ ausser den r Doppelpunkten mit $F = 0$ besitzt, so lange $M = 0$ noch nicht völlig bestimmt ist, als beweglich, und die Zahl dieser beweglichen Schnittpunkte mit i, so ist

(1) für ein beliebiges μ: $\quad i = n\mu - 2r.$

Wegen der Relation $p = \frac{1}{2}(n-1)(n-2) - r$ (6) § 5 erhält man hieraus

(2) für den besonderen Werth $\mu = n - 3$: $\quad i = 2p - 2.$

Von diesen i Schnittpunkten ist indess nur eine gewisse Zahl willkürlich; die übrigen sind von der ersteren abhängig und durch sie bestimmt. Um diese Abhängigkeit zu untersuchen, stellen wir zuvor die Frage nach der Zahl der linear unabhängigen, adjungirten Functionen M vom Grade μ, wobei sich zugleich die Bildungsweise dieser Functionen ergiebt.

Man denke sich die Function $M(x, y)$ vom Grade μ mit unbestimmten Coefficienten angeschrieben. Die Coefficienten seien so zu bestimmen, dass M für eine Anzahl gegebener Punkte verschwindet. Da jedes Werthepaar (x, y), das zur Bestimmung von $M = 0$ dient, nicht frei, sondern durch die Gleichung $F(x, y) = 0$ verbunden ist, so hat man mit Rücksicht auf diese Gleichung zwei Fälle zu unterscheiden.

1. Fall $\mu \geqq n$. Ist M' eine allgemeine Function vom Grade μ, so kann man, da für die zu lösenden Fragen alle Curven vom Grade μ, die $F = 0$ in denselben Punkten schneiden, als gleichwerthig zu betrachten sind, die zu bestimmende Function M in die Form bringen

$$M = M' + PF,$$

wo P eine ganze Function vom Grade $\mu - n$, und man kann im Allgemeinen die $\frac{1}{2}(\mu - n + 1)(\mu - n + 2)$ homogenen Coefficienten der Function P so wählen, dass ebenso viele Coefficienten in M beliebige, numerische Werthe annehmen. Da die Zahl der nicht homogenen Coefficienten in M' gleich

$$\frac{1}{2}(\mu+1)(\mu+2)-1=\frac{1}{2}\mu(\mu+3)$$

ist, so besitzt die reducirte Function M noch

$$\frac{1}{2}\mu(\mu+3)-\frac{1}{2}(\mu-n+1)(\mu-n+2)=n\mu-\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$$

nicht homogene Coefficienten. Damit M eine adjungirte Function werde, sind diese Coefficienten noch den r Bedingungen zu unterwerfen, dass $M=0$ sei für die r Doppelpunkte von $F=0$. Wenn nun diese r Bedingungsgleichungen für die Coefficienten von M linear unabhängig sind, so ist die Zahl k der in M noch freien, nicht homogenen Coefficienten

$$k=n\mu-\frac{1}{2}(n-1)(n-2)-r=n\mu-2r-p=i-p. \quad (3)$$

2. Fall. $\mu<n$. Dann findet eine Reduction von M durch F nicht statt. Man hat vielmehr unmittelbar für die Zahl k der in der adjugirten Function M noch freien, nicht homogenen Coefficienten

$$k=\frac{1}{2}\mu(\mu+3)-r. \quad (4)$$

Insbesondere folgt hieraus

$$\begin{aligned}
&\text{für } \mu=n-1 \qquad k=\frac{1}{2}(n-1)(n+2)-r\\
&\quad\text{„}\ \ \mu=n-2 \qquad k=\frac{1}{2}(n-2)(n+1)-r \qquad (5)\\
&\quad\text{„}\ \ \mu=n-3 \qquad k=p-1.
\end{aligned}$$

Die für $\mu=n-1$ und $\mu=n-2$ gefundenen Werthe (5) von k ergeben sich auch, wenn man in (3) $\mu=n-1$ und $\mu=n-2$ setzt. Die Werthe von k für $\mu=n-1$ und $\mu=n-2$ ordnen sich also dem ersten Falle unter. Hiernach hat man, indem man die Möglichkeit offen lässt, dass die oben erwähnten r Gleichungen für die Coefficienten von M linear abhängig seien, den Satz:

(I) Die Zahl der linear unabhängigen, adjungirten Functionen M vom Grade μ ist $=k+1$, wo

$$\begin{aligned}
&\text{für } \mu>n-3 \qquad k \text{ mindestens } =n\mu-2r-p\\
&\quad\text{„}\ \ \mu=n-3 \qquad k \quad\text{„}\quad =p-1.
\end{aligned}$$

Es zeigt sich später (§ 10), dass diese Zahlen für k nicht bloss Minimalzahlen, sondern genau gültige Zahlen sind und damit ist indirect gezeigt, dass die oben erwähnten r Gleichungen für die Coefficienten von M wirklich linear unabhängig sind[1]). Indem man dies

1) Eine directe Untersuchung dieser r Gleichungen auf ihre lineare Abhängigkeit stösst auf grosse Schwierigkeiten und ist noch nicht durchgeführt.

einstweilen als bewiesen voraussetzt, ergibt sich für die Bildung der adjungirten Function M noch Folgendes. Schreibt man die r Gleichungen an, die ausdrücken, dass M für die r Doppelpunkte von F verschwindet, bestimmt alsdann aus diesen Gleichungen r der Coefficienten von M durch die übrigen, trägt die Werthe dieser r Coefficienten in M ein und ordnet nach den noch übrigen unbestimmten Coefficienten, so erhält man für M die Form

$$M = M_0 + \lambda_1 M_1 + \cdots + \lambda_k M_k. \tag{6}$$

Hier sind $\lambda_1, \ldots \lambda_k$ die noch unbestimmten Coefficienten, M_0, $M_1, \ldots M_k$ aber specielle, linear unabhängige, adjungirte Functionen vom Grade μ. Diese Functionen M_i sind vollkommen bestimmt; aus ihrer Bildung geht hervor, dass die Coefficienten der Potenzen von x und y in den M_i rationale und symmetrische Functionen der Coordinaten der r Doppelpunkte von F d. h. nach § 7 Satz IV, dass sie rationale Functionen der Coefficienten von F allein sind, die sich auf rationalem Wege bilden lassen. Wir machen indess von dieser Betrachtung keinen Gebrauch, bevor nicht gezeigt ist, dass die in Satz (I) für k angegebenen Zahlen wirklich stets und genau gültig sind.

Wir kommen nun zur weiteren Frage, wie viele von den i in (1) und (2) angegebenen 0^1 Punkten von M willkürlich und wie viele derselben abhängig sind. Wären die Zahlen für k im Satz (I) genau gültig, so hätte man zur vollständigen Bestimmung von M noch k 0^1 Punkte von M beliebig zu wählen und hätte dann aus (6) k lineare Gleichungen zur Bestimmung der k Coefficienten λ. Damit wären auch die $i - k$ noch übrigen 0^1 Punkte von M bestimmt und man hätte, indem man diese $i - k$ abhängigen 0^1 Punkte in die bereits bestimmte Function M einträgt, $i - k$ Bedingungsgleichungen zwischen den i 0^1 Punkten von M. Es ist nun aber der Fall denkbar, dass die k gewählten 0^1 Punkte eine solche specielle Lage zu einander haben, dass die k Gleichungen zur Bestimmung von $\lambda_1, \ldots \lambda_k$ nicht ausreichen, dass vielmehr eine Anzahl dieser Gleichungen durch die übrigen bereits identisch erfüllt sind, dass also von den $i - k$ Bedingungsgleichungen zwischen den i 0^1 Punkten einige überzählig d. h. durch die andern von selber erfüllt sind.

Berücksichtigt man die Möglichkeit des letzteren Falles, der in der That eintreten kann[2]), und ausserdem die noch nicht als unzutreffend erwiesene Möglichkeit, dass die Zahlen für k in (I) nur Minimalzahlen seien, so erhält man den Satz:

---

1) Vgl. § 11 und § 13.

(II) Von den $i = n\mu - 2r$ Punkten, die eine adjungirte Curve $M = 0$ vom Grade μ ausser den Doppelpunkten mit $F = 0$ gemein hat, sind

für $\mu > n - 3$ mindestens $i - p$ willkürlich und höchstens p abhängig,

für $\mu = n - 3$ mindestens $p - 1$ willkürlich und höchstens $p - 1$ abhängig.

Hieraus folgt unmittelbar der weitere Satz:

(III) Legt man eine adjungirte Curve $M = 0$ vom Grade μ durch m Punkte von F und sind von den $i - m$ weiteren Schnittpunkten ausser den Doppelpunkten noch q Punkte willkürlich, so ist stets

$$\text{für } \mu > n - 3: \quad q \geqq m - p$$
$$\text{„ } \mu = n - 3: \quad q \geqq m - (p - 1).$$

Bei diesen Betrachtungen ist keineswegs vorausgesetzt, dass die adjungirte Curve M nicht zerfalle. Darum ist es auch nicht nöthig, Curven von niederem als dem $(n - 3)^{\text{ten}}$ Grade besonders zu betrachten, da man eine solche durch Hinzufügung einer festen Curve immer zu einer adjungirten Curve vom $n - 3^{\text{ten}}$ oder höheren Grade machen kann. Geht man nur bis zu Curven des $n - 3^{\text{ten}}$ Grades herab, so lässt sich zugleich der Voraussetzung genügen, dass dieselben ohne eine solche Hinzufügung fester Curven auch noch für die Maximalzahl der Doppelpunkte von $F = 0$ adjungirt sein können. Denn die Zahl der nicht homogenen, linearen Coefficienten einer noch nicht adjungirten Curve $M = 0$ vom Grade $\mu = n - 3$ ist $= \frac{1}{2}\mu(\mu + 3) = \frac{1}{2}n(n - 3)$, also für $p > 0$ gleich der Maximalzahl $\frac{1}{2}(n - 1)(n - 2) - 1$ der Doppelpunkte von $F = 0$. Ausserdem aber wird sich zeigen, dass die Voraussetzung $\mu \geqq n - 3$ genügt zur Darstellung rationaler Functionen jeder Ordnung.

§ 10. **Die allgemeinen, rationalen Functionen.**

Wir gehen zur Betrachtung der allgemeinen, rationalen Functionen über, die wir als Quotienten adjungirter Functionen ansehen. Es seien M_1 und N_1 zwei adjungirte Functionen vom Grade μ_1 und ν_1 und es mögen die Schnittpunkte von M_1 mit F in zwei Gruppen G_{m_1} und G_{m_2} von m_1 Punkten a' und m_2 Punkten a'', die Schnittpunkte von N_1 mit F in zwei Gruppen G_{n_1} und G_{m_2} von n_1 Punkten b' und denselben m_2 Punkten a'' zerfallen. Dann wird der Ausdruck

$M_1 : N_1 = 0^1$ in den m_1 Punkten a' und $= \infty^1$ in den n_1 Punkten b', während er in den m_2 Punkten a'' endlich bleibt. Diese letzteren Punkte nennen wir Hilfspunkte. Für $(x = \infty, y = \infty)$ wird $M_1 : N_1$ entweder endlich oder $= \infty^{n(\mu_1 - \nu_1)}$ oder $= 0^{n(\nu_1 - \mu_1)}$ je nachdem $\mu_1 = \nu_1$ oder $\mu_1 > \nu_1$ oder $\mu_1 < \nu_1$ ist. Da die Zahl der ∞^1 und der 0^1 Punkte von $M_1 : N_1$ die gleiche ist (§ 7), so hat man $m_1 - n_1 = n(\mu_1 - \nu_1)$.

Für die unendlich vielen Formen, in denen sich $M_1 : N_1$ darstellen lässt, gilt nun der Satz[1]):

(I) Der Quotient $M_1 : N_1$ zweier adjungirten Functionen, der abgesehen von den Punkten $(x = \infty, y = \infty)$ in m_1 Punkten a' gleich 0^1 und in n_1 Punkten b' gleich ∞^1 wird, während er in den m_2 Hilfspunkten a'' endlich bleibt, lässt sich mit Hilfe von $F = 0$ auf unendlich viele Arten in einen andern solchen Quotienten $M_2 : N_2$ verwandeln, wobei die 0^1 Punkte a' und die ∞^1 Punkte b' der Function ungeändert bleiben, während an Stelle der m_2 Hilfspunkte a'' n_2 andere Hilfspunkte b'' treten.

Die zu beweisende Behauptung lässt sich auch so aussprechen:

(a) Wenn auf der Curve $F = 0$ ausser den Doppelpunkten
durch eine adjungirte Curve M_1 vom Grade μ_1 die Punktgruppen G_{m_1} und G_{m_2},
durch eine adjungirte Curve N_1 vom Grade ν_1 die Punktgruppen G_{n_1} und G_{m_2},
durch eine adjungirte Curve M_2 vom Grade μ_2 die Punktgruppen G_{m_1} und G_{n_2}
ausgeschnitten werden, so existirt noch
eine adjungirte Curve N_2 vom Grade ν_2, welche die Punktgruppen G_{n_1} und G_{n_2}
ausschneidet. Hierbei ist

$$m_1 - n_1 = n(\mu_1 - \nu_1) = n(\mu_2 - \nu_2).$$

Beweis. Sind drei adjungirte Curven M_1, N_1, M_2 gegeben, welche die in (a) angegebenen Punktgruppen ausschneiden, so lassen sich nach (Ia) § 8 immer zwei Curven N_2 und A finden von der Beschaffenheit, dass man identisch hat

$$M_2 N_1 - M_1 N_2 \equiv AF. \tag{1}$$

Denn die Gleichung $M_2 N_1 = 0$ stellt eine (zerfallende) Curve dar, welche durch alle nicht in die Doppelpunkte von F fallenden Schnittpunkte G_{m_1} und G_{m_2} von $M_1 = 0$ mit $F = 0$ hindurchgeht. Ausserdem aber verschwindet das Product $M_2 N_1$ in jedem Doppelpunkt von F, in dem

1) Brill u. Nöther, Math. Ann. Bd. 7, S. 269ff. (1873).

M_1 einen einfachen Punkt besitzt, zweifach. Das Product $M_2 N_1$ erfüllt daher nach (Ia) § 8 alle Bedingungen, um in die Form $M_1 N_2 + AF$ gebracht zu werden, womit die Identität (1) bewiesen ist. Die hierbei auftretende Curve $N_2 = 0$ geht nun nach (1) durch die übrigen Schnittpunkte von $M_2 N_1 = 0$ mit $F = 0$, durch die M_1 nicht geht d. h. durch die Punkte G_{n_1} und G_{n_2}. Ausserdem ist N_2 adjungirt; denn in einem Doppelpunkt von F verschwindet $M_2 N_1$ für jeden Zweig von F doppelt, M_1 nur einfach; es muss also auch N_2 einfach verschwinden. (q. e. d.)

Der Satz (a) ist in der Geometrie der algebraischen Curven bekannt unter dem Namen des Restsatzes[1]). Nennt man von zwei Gruppen G_{m_1} und G_{m_2}, die durch eine adjungirte Curve M_1 auf F ausgeschnitten werden, die eine Gruppe den Rest der andern Gruppe und zwei Gruppen G_{m_1} und G_{n_1} corresidual (oder äquivalent) in Bezug auf eine dritte Gruppe G_{m_2}, wenn für jede derselben G_{m_2} ein Rest ist, oder wenn sie von zwei adjungirten Curven ausgeschnitten werden können, deren übrige Schnittpunkte mit F ausser den Doppelpunkten sämmtlich in die Punkte G_{m_2} fallen, so lässt sich der Restsatz auch so aussprechen:

(b) Sind auf einer Curve F die Punktgruppen G_{m_1} und G_{n_1} corresidual in Bezug auf eine dritte Gruppe G_{m_2}, so sind sie auch corresidual in Bezug auf jede andere Gruppe G_{n_2}, welche ein Rest ist in Bezug auf eine der Gruppen G_{m_1} und G_{n_1}, also etwa auf G_{m_1}.

Oder: die Eigenschaft zweier Punktgruppen G_{m_1} und G_{n_1}, corresidual zu sein, ist von einem speciellen Rest G_{m_2} ganz unabhängig.

Der Restsatz lässt sich verallgemeinern, indem man durch dieselben Punkte G_{m_2} an Stelle der einzelnen Curve M_1 eine Schaar von linear unabhängigen, adjungirten Curven M_1 von demselben Grade μ_1 gehen lässt. Für solche Schaaren gilt der Satz:

Wenn durch eine Gruppe G_{m_2} eine Schaar von $q_2 + 1$ linear unabhängigen, adjungirten Curven M_1 von demselben Grade μ_1 geht, so geht durch jede corresiduale Gruppe G_{n_2} ebenfalls eine Schaar von $q_2 + 1$ linear unabhängigen, adjungirten Curven M_2 von demselben Grade μ_2.

Beweis. Unter Voraussetzung der Identität (1) sei M_1 eine Schaar von $q_2 + 1$ linear unabhängigen, adjungirten Curven, die alle

1) Der Restsatz wurde zuerst von Sylvester für Curven 3. Ordnung ausgesprochen (Salmon-Fiedler, Höhere Curven 2. A. S. 164). Historisch ist der Satz aus dem Abel'schen Theorem hervorgegangen.

durch dieselben Punkte G_{m_2} gehen und auf $F=0$ ein System von beweglichen Punkten G_{m_1} ausschneiden. Ferner sei

N_1 eine feste Curve durch die Punktgruppe G_{m_2} und eine zweite Gruppe G_{n_1} und

N_2 eine feste Curve durch die Punktgruppe G_{n_1} und eine dritte Gruppe G_{n_2}.

Dann muss M_2 eine Schaar von linear unabhängigen, adjungirten Curven darstellen, die alle durch die festen Punkte G_{n_2} gehen und auf $F=0$ das nämliche System von beweglichen Punkten G_{m_1} ausschneiden, das früher durch die Schaar M_1 bestimmt wurde. Daher muss die Schaar M_2 ebensoviel lineare, willkürliche Parameter enthalten wie M_1 d. h. sie muss q_2+1 linear unabhängige Curven enthalten. (q. e. d.)

Eine Schaar von Gruppen zu je m_1 Punkten, die durch eine Schaar von q_2+1 linear unabhängige, adjungirte Curven M_1 ausgeschnitten wird, soll eine q_2-fach unendliche Schaar von Gruppen zu je m_1 Punkten heissen und durch $g_{m_1}^{q_2}$ bezeichnet werden; eine einzelne Gruppe der Schaar durch $G_{m_1}^{q_2}$.

Da jede Gruppe $G_{m_1}^{q_2}$ durch q_2 willkürlich wählbare Punkte eindeutig festgelegt ist, so hat man nach (III) § 9 den Satz:

(c) Zwischen den Zahlen m_1 und q_2 einer durch Curven M_1 vom Grade μ_1 ausgeschnittenen Schaar $g_{m_1}^{q_2}$ besteht die Relation

$$\text{wenn } \mu_1 > n-3: \quad q_2 \geqq m_1 - p$$
$$\text{,, } \mu_1 = n-3: \quad q_2 \geqq m_1 - p + 1.$$

Es ist nun von Wichtigkeit, dass der Satz (c) für den ausgezeichneten Fall $\mu_1 = n-3$ sich umkehren lässt in folgender Weise[1]):

(d) Eine q_2-fach unendliche Schaar $g_{m_1}^{q_2}$ von Gruppen zu je m_1 Punkten kann immer dann durch eine Schaar adjungirter Curven C_{n-3} von dem besonderen Grade $n-3$ ausgeschnitten werden, wenn

$$q_2 \geqq m_1 - p + 1. \tag{2}$$

Dabei können unter den m_1 Punkten jeder Gruppe $G_{m_1}^{q_2}$ sich auch solche befinden, die für alle Gruppen dieselben sind.

---

1) Die folgende Betrachtung hat für Curven $F=0$ vom Geschlecht $p=0$ und $p=1$ keine Bedeutung, weil für die ersteren überhaupt keine und für die letzteren keine Schaaren von adjungirten Curven $n-3^{\text{ten}}$ Grades existiren.

Beweis. Man denke sich eine Schaar $g_{m_1}^{q_2}$, die durch Curven von höherem als dem $n-3^{\text{ten}}$ Grade ausgeschnitten werden; es ist zu zeigen, dass dieselbe Schaar $g_{m_1}^{q_2}$ durch eine Schaar von adjungirten Curven des $n-3^{\text{ten}}$ Grades ausgeschnitten wird, wenn zwischen m_1 und q_2 die Bedingung (2) besteht.

Zunächst ist klar, dass der Satz richtig ist für $q_2 = 0$, also $m_1 \leqq p - 1$. Denn durch eine vollständig bestimmte, einzelne Gruppe von $p-1$ oder weniger Punkten kann immer eine adjungirte Curve $n-3^{\text{ten}}$ Grades gelegt werden (nach I § 9). Es ist daher nur zu zeigen, dass der Satz (d) gilt für jede Schaar $g_{m_1}^{q_2}$, sobald er für die Schaaren $g_{m_1-1}^{q_2-1}$ gilt, immer die Relation (2) vorausgesetzt. Hierzu bemerke man vorerst, dass, wenn die Schaar $g_{m_1-1}^{q_2-1}$ durch ein System von Curven $n-3^{\text{ten}}$ Grades ausgeschnitten wird, die Schaar $g_{m_1}^{q_2}$ durch ein System von Curven $n-2^{\text{ten}}$ Grades C_{n-2} ausgeschnitten werden kann. Denn man nehme irgend eine Gruppe $\Gamma_{m_1}^{q_2}$ der letzten Schaar, lege durch einen beweglichen Punkt α derselben eine Gerade A und durch die übrigen $m_1 - 1$ Punkte, die eine Gruppe $\Gamma_{m_1-1}^{q_2-1}$ bilden, eine adjungirte Curve $n-3^{\text{ten}}$ Grades C'_{n-3}. Der Rest R der Gruppe Γ_{m_1}, welcher aus den weiteren $2p-2-(m_1-1)$ Schnittpunkten von C'_{n-3} und den übrigen $n-1$ Schnittpunkten der Geraden A besteht, ist zugleich Rest für jede Gruppe der Schaar $g_{m_1}^{q_2}$, weil er dies für eine derselben ist (Satz (b)). Die Schaar $g_{m_1}^{q_2}$ wird somit in der That durch eine Schaar von adjungirten Curven $n-2^{\text{ten}}$ Grades C_{n-2} ausgeschnitten, die durch den Rest R gehen und die zudem alle in die Gerade A und eine Curve $n-3^{\text{ten}}$ Grades C'_{n-3} zerfallen (weil $n-1$ Punkte einer Curve $n-2^{\text{ten}}$ Grades nicht auf einer Geraden liegen können, ohne dass Zerfallen eintritt). Demnach besteht die Schaar $g_{m_1}^{q_2}$ aus dem festen Punkt α und den durch diese C'_{n-3} ausgeschnittenen, beweglichen Punkten. Nun sollte α ein beweglicher Punkt sein. Dieser Widerspruch erklärt sich nur so, dass in Wirklichkeit α ausser auf der Geraden A auch auf der obigen Curve C'_{n-3} gelegen ist (als unwillkürliche Folge der Forderung, dass C'_{n-3} durch jene (m_1-1) Punkte geht), dass also α sich doppelt unter den Punkten der Schaar $g_{m_1}^{q_2}$ befindet und diese eigentlich als $g_{m_1+1}^{q_2}$ zu rechnen wäre. Die $g_{m_1}^{q_2}$ übrigen Punkte müssen alle auf der beweglichen C'_{n-3} liegen. (q. e. d.)

An diesen Beweis des Satzes (d) schliesst sich eine Bemerkung. Da es keine adjungirte Curve $n-3^{\text{ten}}$ Grades gibt, die in mehr als $2p-2$ Punkten die irreducible Curve $F=0$ schneidet, so ist die

Zahl m_1 in Satz (d) an die Ungleichung $m_1 \leqq 2p - 2$ gebunden. Der Beweis von (d) macht aber an keiner Stelle Gebrauch von dieser Ungleichung; er gilt daher auch, wenn dieselbe nicht erfüllt ist. Hieraus schliesst man rückwärts, dass Punktgruppen $G_{m_1}^{q_2}$ von mehr als $2p - 2$ Punkten, für welche die Ungleichung (2) gilt, nicht existiren.

Die letzte Bemerkung ist von Wichtigkeit. Aus ihr kann man nämlich die Folgerung ziehen, dass die in (I) § 9 angegebenen Minimalwerthe für die Zahl k zugleich Maximalwerthe sind. Wir sprechen diesen fundamentalen Satz[1]) besonders aus:

(II) Ist $F(x, y) = 0$ eine irreducible Gleichung vom Grade n und vom Geschlecht p, so ist die Zahl der linear unabhängigen, adjungirten Functionen M vom Grade μ stets

für $\mu > n - 3$ gleich $n\mu - 2r - p + 1$,

„ $\mu = n - 3$ „ p.

Beweis. 1. Fall $\mu > n - 3$. Es ist zu zeigen (vgl. § 9), dass eine etwaige Abhängigkeit in der Lage der r Doppelpunkte von $F = 0$ nicht so beschaffen sein kann, dass die r Bedingungsgleichungen für die Coefficienten einer adjungirten Curve linear von einander abhängig sind. Angenommen, es seien von diesen Bedingungsgleichungen $s\ (\geqq 1)$ eine Folge der $r - s$ übrigen. Dann hätte M nach (3) § 9 noch

$$k + s = n\mu - 2r - (p - s)$$

willkürliche, lineare, nicht homogene Coefficienten, d. h. in diesem Falle wären $p - s$ Schnittpunkte von M mit F abhängig von den übrigen. Dann aber wäre die Schaar der $m_1 = n\mu - 2r = k + p$ Schnittpunkte von M mit F eine $q_2 = k + s$-fach unendliche Schaar. Daher wäre

$$q_2 = m_1 - p + s,$$

d. h. es könnte nach (d) die Punktgruppe $G_{m_1}^{q_2}$ durch eine Schaar von adjungirten Curven $n - 3^{\text{ten}}$ Grades ausgeschnitten werden. Dies ist aber unmöglich, weil $m_1 = n\mu - 2r > 2p - 2$ ist, wenn $\mu > n - 3$. Daher muss $s = 0$ sein und es sind von den Schnittpunkten der Curve $M = 0$ genau p durch die übrigen bestimmt, oder es gibt, wenn $\mu > n - 3$, genau $n\mu - 2r - p + 1$ linear unabhängige, adjungirte Curven $M = 0$. (q. e. d.)

1) Dieser Satz und speciell der Satz, dass die Zahl der linear unabhängigen, adjungirten Curven $n - 3^{\text{ter}}$ Ordnung, oder der linear unabhängigen Integrale 1. Gattung gleich p ist (Abschn. III. § 3), wird von Riemann (Ges. W. p. 98) mit Hilfe des Dirichlet'schen Princips bewiesen.

2. Fall. $\mu = n - 3$. Am Schluss des Beweises von Satz (d) wurde bemerkt, dass Gruppen $G_{m_1}^{q_2}$ von mehr als $2p - 2$ Punkten, für welche die Ungleichung $q_2 \geqq m_1 - p + 1$ gilt, nicht existiren. Hieraus folgt die zu beweisende Behauptung. Gruppen G_{m_1}, welche durch adjungirte Curven $n - 3^{\text{ten}}$ Grades ausgeschnitten werden, bilden nach III § 9 mindestens eine $m_1 - p + 1$-fach unendliche Schaar, also Gruppen G_{2p-2} mindestens eine $p - 1$-fach unendliche Schaar (eine ∞^{p-1} Schaar). Es ist zu zeigen, dass sie zugleich höchstens eine ∞^{p-1} Schaar bilden. Angenommen, sie bildeten eine ∞^p Schaar, so könnte man durch Hinzunahme eines willkürlichen, festen Punktes β von F eine Schaar g_{2p-1}^p (in deren sämmtlichen Gruppen der Punkt β vorkäme) herstellen. Dies ist aber nach der obigen Bemerkung nicht möglich. Somit gibt es auch keine Schaar g_{2p-2}^p, wie angenommen war, noch weniger eine Schaar g_{2p-2}^{p+1} u. s. w. Es gibt also nur eine ∞^{p-1} Schaar, d. h. nur p linear unabhängige, adjungirte Curven $n - 3^{\text{ten}}$ Grades. (q. e. d.)

Diese Betrachtung lehrt zugleich, dass eine etwaige Abhängigkeit der Lage der Doppelpunkte von F eine lineare Abhängigkeit der r Bedingungsgleichungen auch für die Coefficienten der adjungirten Curven $n - 3^{\text{ten}}$ Grades nicht hervorrufen kann.

§ 11. Der Riemann-Roch'sche Satz.

Nach (II) § 10 sind von den Schnittpunkten, die eine beliebige, adjungirte Curve vom Grade $\mu > n - 3$ ausser den Doppelpunkten mit $F = 0$ gemein hat, stets die p letzten durch die übrigen eindeutig bestimmt. Daher folgt unmittelbar, wenn man eine adjungirte Curve vom Grade $n - 3$ eine Φ-Curve nennt (vgl. § 9 A.):

(I) Sind m_1 $(> p)$ Punkte b_l $(l = 1, .., m_1)$ auf $F = 0$ derart gewählt, dass sie nicht sämmtlich auf einer Φ-Curve liegen, und legt man durch sie eine adjungirte Curve $M_0 = 0$ vom Grade μ $(> n - 3)$, so hat der Rest von $n\mu - 2r - m_1$ Schnittpunkten β_λ, die $M_0 = 0$ mit $F = 0$ ausser den Doppelpunkten noch besitzt, die Eigenschaft, dass durch ihn noch $m_1 - p + 1$ linear unabhängige, adjungirte Curven $M = 0$ von demselben Grade μ hindurchgehen.

Dieser Satz bezieht sich auf allgemeine, rationale Functionen. Es besteht nun ein ganz ähnlicher Satz für den besonderen Fall, wo die rationale Function der Quotient zweier Φ-Functionen vom Grade

$\mu = n - 3$ ist. Um denselben herzuleiten, betrachten wir[1]) im Anschluss an Satz (c) § 10 Schaaren von Punktgruppen $g_{m_1}^{q_2-1}$ $(q_2 > 1)$, für die $q_2 > m_1 - p + 1$ oder

(1) $$q_2 \overline{\gtrless} m_1 - p + 2,$$

die also stets durch adjungirte Curven $n - 3^{\text{ten}}$ Grades oder durch Φ-Curven ausgeschnitten werden. Solche Punktgruppen heissen Specialgruppen; ihr specieller Charakter besteht darin, dass die einzelnen Punkte einer jeden Gruppe der Schaar nicht beliebig sind, sondern dass durch einige derselben die übrigen bestimmt sind. Die Schaaren dieser Gruppen lassen sich zu je zweien einander zuordnen, derart, dass jede aus der anderen eindeutig abgeleitet werden kann. Es gilt nämlich folgender Satz:

(a) Ist $g_{m_1}^{q_2-1}$ $(q_2 > 1)$ eine Schaar auf F, für welche

$q_2 = m_1 - p + 1 + q_1$ (wo $q_1 \overline{\gtrless} 1$ und $< p$ und $m_1 > p - q_1$)

und legt man durch eine Gruppe $G_{m_1}^{q_2-1}$ dieser Schaar eine Φ-Curve, so ist der Rest von $2p - 2 - m_1 = m_2$ Punkten wieder eine Gruppe $G_{m_2}^{q_1-1}$ einer Schaar $g_{m_2}^{q_1-1}$, für die q_1 den aus obiger Gleichung sich ergebenden Werth $q_1 = m_2 - p + 1 + q_2$ hat.

Zum Beweise bilde man aus der Schaar $g_{m_1}^{q_2-1}$, indem man zu jeder Gruppe derselben noch $q_1 - 1$ festliegende, aber beliebig gewählte (und zwar zu jeder Gruppe dieselben) Punkte von $F = 0$ hinzufügt, eine neue Schaar $g_{m_1+q_1-1}^{q_2-1}$, für welche die Anzahl der willkürlichen Parameter sich nicht vermehrt hat, wohl aber die Anzahl der Punkte in den einzelnen Gruppen. Durch eine Gruppe $G_{m_1+q_1-1}^{q_2-1}$ dieser Schaar lässt sich noch eine Φ-Curve hindurchlegen, weil durch die Voraussetzung $q_2 = m_1 - p + 1 + q_1$ die Bedingung (2) § 10 erfüllt ist. Da nun aber die Lage jener $q_1 - 1$ festen Punkte beliebig ist, so muss sich durch die Gruppe $G_{m_1}^{q_2-1}$ noch mindestens eine ∞^{q_1-1} Schaar von Φ-Curven legen lassen und die durch dieselben ausgeschnittenen Gruppen $G_{m_2}^{\varrho}$ bilden mindestens eine ∞^{q_1-1} Schaar, d. h. es ist mindestens $\varrho = q_1 - 1$.

Andrerseits kann ϱ nicht $> q_1 - 1$ sein. Denn geht man umgekehrt von einer Gruppe $G_{m_2}^{\varrho}$ aus, so gelangt man durch die entsprechende Betrachtung zu Gruppen $G_{m_1}^{\sigma}$, wo σ mindestens $= m_1 - p$

---

1) Vgl. Brill-Nöther, Math. Ann. Bd. VII S. 280 ff. (1873). Die dortigen Zahlen Q, R, q, r sind in unserer Darstellung ersetzt durch m_1, m_2, $q_2 - 1$, $q_1 - 1$.

$+ 1 + \varrho$ sein muss. Dieselben müssen aber nach dem Restsatze der Schaar $g_{m_1}^{q_2-1}$ angehören. Man hat daher $\sigma = q_2 - 1$ und folglich auch $\varrho = q_1 - 1$. (q. e. d.)

Die Gleichungen des Satzes (a) lassen sich in die folgende übersichtliche Gestalt bringen:

$$m_1 + m_2 = 2p - 2, \qquad m_1 + 2q_1 = m_2 + 2q_2. \tag{2}$$

Zu jedem Werthepaar m_1, q_2 einer Schaar $g_{m_1}^{q_2-1}$, welches der Bedingung (1) genügt, lässt sich demnach nur ein Werthepaar m_2, q_1 der Schaar $g_{m_2}^{q_1-1}$ bestimmen.

Wir geben dem Satze (a) noch eine andere Form, die für spätere Anwendungen besonders geeignet ist.

Da eine Schaar $g_{m_1}^{q_2-1}$ auf $F = 0$ ausgeschnitten wird durch die q_2 linear unabhängigen Φ-Curven, welche durch den Rest von $2p - 2 - m_1 = m_2$ Punkten gehen, und eine Schaar $g_{m_2}^{q_1-1}$ durch die q_1 linear unabhängigen Φ-Curven, die durch den Rest von m_1 Punkten gehen, so folgt aus (a):

(II) Haben $m_1 (> p - q_1)$ Punkte b_l $(l = 1, .., m_1)$ der Curve $F = 0$ eine solche specielle Lage, dass durch sie gleichzeitig q_1 ($\gtreqless 1$ und $< p$) linear unabhängige Φ-Curven hindurchgehen und legt man durch dieselben eine Curve Φ_0, so hat der Rest von $m_2 = 2p - 2 - m_1$ Punkten β_λ die Eigenschaft, dass durch sie noch $q_2 = m_1 - p + q_1 + 1$ linear unabhängige Φ-Curven hindurchgehen. (Riemann-Roch-scher Satz.)

Die Sätze I und II sind durchaus ähnlich; sie bilden die Grundlage zur Lösung der Aufgabe, eine rationale Function aus ∞ Punkten und 0 Punkten herzustellen. Der Satz I wurde von Riemann[1]) mit Hilfe des Dirichlet'schen Princips abgeleitet. Der Satz II wurde für einzelne, specielle Fälle ($m_1 = p$, $p - 1$, $p - 2$) von Riemann, allgemein aber auf dem von Riemann eingeschlagenen Wege von Roch[2]) bewiesen. Wir geben diesen Roch'schen Beweis in § 13. In der Brill-Nöther'schen Form (a) des Satzes II tritt jedoch erst die Reciprocität der Schnittpunktsysteme deutlich hervor. Den Satz (II) erhält man auch mittels der Methoden, durch die Riemann das Verschwinden der Thetafunctionen untersucht hat. (S. § 28 Satz XIV.)

---

1) Riemann, Ges. W. S. 101, 111, 200 und 203.
2) Roch, Journ. für Math. Bd. 64. S. 372 ff.

Es bleiben noch einige, den Riemann-Roch'schen Satz (II) betreffende Fragen zu erledigen[1]). In demselben ist angenommen, dass es m_1 Punkte b_l gebe, für die q_1 linear unabhängige Φ-Functionen verschwinden, ohne über m_1 und q_1 eine weitere Voraussetzung zu machen, als $m_1 + q_1 > p$. Es fragt sich, wie viele der m_1 Punkte b_l hierbei willkürlich sind und wie sich die übrigen aus ihnen bestimmen.

Wenn man sich die Aufgabe stellt, m_1 Punkte zu finden, für die q_1 linear unabhängige Φ-Functionen verschwinden, so wird man, da die allgemeine Φ-Function noch p lineare, homogene Coefficienten enthält, vorläufig $p - q_1$ Punkte b_l beliebig wählen. Die für dieselben verschwindende Φ-Function ist alsdann von der Form

$$\lambda_1 \Phi_1 + \cdots + \lambda_{q_1} \Phi_{q_1},$$

wo die λ_i beliebige Constanten sind und jede der q_1 Functionen Φ_i für die $p - q_1$ gewählten Punkte b_l verschwindet. Sollen alle diese Functionen noch für die $m_1 - p + q_1$ übrigen Punkte b_l verschwinden, so hat man die Gleichungen $\Phi_1 = 0, \ldots, \Phi_{q_1} = 0$ für diese $m_1 - p + q_1$ Punkte zu bilden, was $q_1 (m_1 - p + q_1)$ Gleichungen gibt und aus diesen Gleichungen die $m_1 - p + q_1$ Punkte b_l zu eliminiren (mit Hilfe der Gleichungen $F(b_l) = 0$), was auf

$$(q_1 - 1)(m_1 - p + q_1)$$

Bedingungen für die $p - q_1$ ersten Punkte b_l führt. Sollen also m_1 Punkte b_l die Eigenschaft haben, dass durch sie q_1 linear unabhängige Φ-Curven gehen, so sind von diesen Punkten noch

$$(3) \quad p - q_1 - (q_1 - 1)(m_1 - p + q_1) = m_1 - q_1 (m_1 - p + q_1)$$

willkürlich. Diese Zahl kann aber nicht $= 0$ gesetzt werden, weil es alsdann nur eine endliche Zahl von m_1 Punkten gäbe, für die q_1 linear unabhängige Φ-Functionen verschwinden. Nach Satz (II) existiren aber solche Punkte auf $F = 0$ $\infty^{q_2 - 1}$-fach; es muss also die Zahl (3) $\geqq q_2 - 1$ oder $\geqq m_1 - p + q_1$ sein, wenn die obige Aufgabe keinen Widerspruch enthalten soll. Man hat daher die Bedingung

$$m_1 - q_1(m_1 - p + q_1) - (m_1 - p + q_1) = m_1 - (q_1 + 1)(q_2 - 1) = p - q_1 q_2 \geqq 0.$$

Die Lösbarkeit der gestellten Aufgabe ist daher an die Bedingungen geknüpft

$$(4) \qquad q_2 > 1, \qquad p - q_1 q_2 \geqq 0,$$

wobei zwischen m_1, m_2, q_1, q_2 die Relationen (2) bestehen.

Die Bedingungen (4) und (2) dienen zu zwei Grenzbestimmungen.

---

1) Brill u. Nöther, l. c.

Wir fragen erstens nach den absoluten Grenzwerthen der Zahlen m_1, m_2, q_1, q_2.

Die Zahlen q_1 und q_2 sind beliebig wählbar; nur ist $q_1 \geqq 1$, $q_2 > 1$. Ferner ist $q_1 < p$ und der zu einem gegebenen q_1 gehörige Maximalwerth von q_2 ist nach (4) bestimmt durch $q_2 \leqq \frac{p}{q_1}$. Sind q_1 und q_2 gewählt, so ist $m_1 = p - q_1 + q_2 - 1$; man erhält also den Maximal- oder Minimalwerth von m_1, indem man q_1 möglichst klein, q_2 möglichst gross wählt oder umgekehrt. Dies gibt die folgenden absoluten Grenzwerthe:

$$\left.\begin{array}{llll} \min q_1 = 1 & \text{also} \quad \max q_2 = p & \text{und} & \max m_1 = 2p - 2, \\ \min q_2 = 2 & \quad „ \quad \max q_1 = \frac{p}{2} & \quad „ & \min m_1 = \frac{p}{2} + 1. \end{array}\right\} \qquad (5)$$

Wir fragen zweitens nach dem Minimalwerth von m_1 bei gegebenem q_2.

Um diese Frage für die spätere Anwendung gleich so zu lösen, dass m_1 eine ganze Zahl wird, setze man mit Rücksicht auf (4)

$$p = q_1 q_2 + \tau, \quad \text{wo} \quad \tau < q_2 \qquad (6)$$

und lasse q_1 von 1 an wachsen und τ von 0 bis $q_2 - 1$. Dann ist q_1 von selber der zu p und einem gegebenen q_2 gehörige Maximalwerth; die Gleichung $m_1 = p - q_1 + q_2 - 1$ gibt den zugehörigen Minimalwerth von m_1 und (6) den zugehörigen Werth von τ.

Wir geben hierzu folgende, insbesondere für $q_2 = 2$ und $q_2 = 3$ später zu benutzende Tabelle.

(7)

q_2	p	τ	$\min m_1$
2	$2q_1$	0	$p - q_1 + 1$
	$2q_1 + 1$	1	
3	$3q_1$	0	$p - q_1 + 2$
	$3q_1 + 1$	1	
	$3q_1 + 2$	2	
q_2	$q_1 q_2 + \tau$	$\tau < q_2$	$p - q_1 + q_2 - 1$

§ 12. Bildung der rationalen Function aus gegebenen Elementen.

Die Sätze des § 11 führen zur Lösung einer fundamentalen Aufgabe, nämlich zur Bildung einer rationalen Function von (x, y) aus gegebenen Elementen. Wir erinnern an die entsprechenden Unter-

suchungen für Functionen einer Variabeln z. Benutzt man die Erklärung der Residuen von Cauchy, nämlich:

> Ist eine rationale Function $R(z)$ von der Ordnung m in den m Punkten $\gamma_1, \ldots, \gamma_m$ ∞^1 wie $C_1(z-\gamma_1)^{-1}, \ldots, C_m(z-\gamma_m)^{-1}$, so heissen die Coefficienten $C_1, \ldots, C_m$ die Residuen der Function $R(z)$ in den m Punkten $\gamma_1, \ldots, \gamma_m$,

so gelten für die Bildung der Function $R(z)$ die beiden, eng zusammenhängenden Sätze:

> Eine rationale Function $R(z)$ von der Ordnung m ist durch ihre m ∞^1 und m 0^1 Punkte bis auf einen constanten Factor bestimmt; diese $2m$ Elemente sind unabhängig von einander.
>
> Eine rationale Function $R(z)$ von der Ordnung m ist durch ihre m ∞^1 Punkte und die m zugehörigen Residuen bis auf eine additive Constante bestimmt; auch diese $2m$ Elemente sind unabhängig von einander.

Eine entsprechende Untersuchung für zwei Variabeln (x, y), die durch die Gleichung $F(x, y) = 0$ verbunden sind, führt nun zur Lösung der beiden Aufgaben, eine rationale Function von (x, y) zu bilden, wenn entweder ihre ∞^1 und 0^1 Punkte oder ihre ∞^1 Punkte und deren Residuen gegeben sind. Es zeigt sich aber dabei, dass jedesmal nur ein Theil dieser Elemente willkürlich wählbar ist und es handelt sich daher weiter um eine Untersuchung der Abhängigkeit dieser Elemente von einander.

Wir bezeichnen hier und häufig im Folgenden einen bestimmten Punkt der Curve $F(x, y) = 0$ nicht durch seine Coordinaten, sondern durch einen einzigen Buchstaben a oder b.

Die erste der beiden Aufgaben lautet:

(A) Eine rationale Function $R(x, y)$ von der Ordnung m aus den Coordinaten von m ∞^1 Punkten b_l und von m 0^1 Punkten a_l $(l = 1, \ldots, m)$ zu bilden und die Bedingungsgleichungen zwischen diesen $2m$ Punkten aufzustellen.

Wir nehmen der Einfachheit halber an, R sei in den Punkten a_l und b_l bez. 0 und ∞ von der ersten Ordnung und die Punkte a_l und b_l seien einfache Punkte mit endlichen Coordinaten. Für andere Annahmen ist die Betrachtung ganz ähnlich. Setzt man weiter voraus, die Function R habe für die beiden Zweige eines jeden Doppelpunktes von $F = 0$ verschiedene Werthe, so ist R der Quotient zweier adjungirter Functionen von demselben Grade μ. Nach § 11 sind zwei Fälle zu unterscheiden.

1. Fall. Der Satz I § 11 lässt sich so aussprechen:

(I) Wenn die m ∞^1 Punkte b_ι einer rationalen Function R von der Ordnung m derart unabhängig sind, dass sie nicht auf einer Φ-Curve liegen, so muss $m > p$ sein und es ist R der Quotient zweier adjungirter Functionen vom Grade $\mu > n-3$. Dabei sind die m ∞^1 Punkte b_ι und $m-p$ der 0^1 Punkte a_ι willkürlich, die p letzten Punkte a_ι aber durch die übrigen Punkte a_ι und die Punkte b_ι eindeutig bestimmt.

Hieraus folgt:

(Ia) Die rationale Function $R(x, y)$ von der Ordnung m enthält im Ganzen $2m+1$ Elemente, nämlich die m ∞^1 Punkte b_ι, die m 0^1 Punkte a_ι und einen constanten Factor; zwischen den $2m$ ersten Elementen bestehen p Bedingungsgleichungen.

(Ib) Von den rationalen Functionen der Ordnung m mit denselben m willkürlichen ∞^1 Punkten b_ι sind nur $m-p+1$ linear unabhängig oder zwischen $m-p+2$ solchen Functionen besteht mindestens eine lineare, homogene Gleichung.

(Ic) Die Zahl $p+1$ gibt die niederste Ordnung an, die eine rationale Function $R(x, y)$ haben kann, wenn ihre ∞^1 Punkte b_ι auf $F(x, y) = 0$ sämmtlich beliebig sind.

Man kann diesen letzten Satz auch unmittelbar zur Definition des Geschlechtes p verwenden[1]).

Die Bildung der Function R im 1. Falle und der p Gleichungen zwischen den Punkten a_ι und b_ι ist hiernach folgende:

Der Nenner M_0 von R ist so zu bestimmen, dass er verschwindet

in den r Doppelpunkten $\delta_1, \ldots, \delta_r$ von $F = 0$ und

in den m willkürlichen Punkten $b_1, \ldots, b_m$.

Nach dieser Bestimmung hat M_0 noch $n\mu - 2r - m = i - m$ 0^1 Punkte β_λ $(\lambda = 1, \ldots, i-m)$, von welchen nach (I § 11) die $i-m-p$ ersten beliebig sind, während die p letzten durch sie und die Punkte b_ι eindeutig bestimmt sind. Hieraus folgt, dass $i - m \geqq p$ oder

$$n\mu - 2r \geqq m + \frac{1}{2}(n-1)(n-2) - r \tag{1}$$

1) Weierstrass, in Vorlesungen von 1869 an.

sein muss, eine Ungleichung, die bei gegebenem m eine untere Grenze für μ liefert.

Für den niedersten Werth $m = p + 1$ z. B., den m bei willkürlich gegebenen ∞^1 Punkten b_l annehmen kann, folgt aus (1) $\mu \gtreqless n - 2$.

Der Zähler M von R ist nunmehr so zu bestimmen, dass er verschwindet

in den r Doppelpunkten $\delta_1, .., \delta_r$ von $F = 0$ und

in den $i - m$ Hilfspunkten β_λ, in denen $M_0 = 0$ war.

Nach dieser Bestimmung hat nach Satz (I) M noch $m - p + 1$ homogene, lineare Coefficienten, ist also von der Form

$$M = \sum_{h=0}^{m-p} \lambda_h M_h, \tag{2}$$

wo $M_0, M_1, .., M_{m-p}$ bestimmte, adjungirte Functionen vom Grade μ sind, welche sämmtlich in den Hilfspunkten β_λ verschwinden, in welchen daher die Coefficienten der Potenzen von x und y von den Punkten β_λ, also auch von den Punkten b_l abhängen. Die Coefficienten λ_h in (2) sind nun bis auf einen derselben (etwa λ_0) schon eindeutig durch die $m-p$ ersten, willkürlich wählbaren 0 Punkte a_l bestimmt. Nach dieser Bestimmung sind die Coefficienten der Potenzen von x und y in M abhängig von den m Punkten b_l und den $m - p$ ersten Punkten a_l. Drückt man aus, dass die p letzten Punkte a_l ebenfalls 0^1 Punkte von R sein sollen, so erhält man die p Gleichungen

$$M = 0, \text{ gebildet für die Punkte } a_{m-p+1}, .., a_m, \tag{3}$$

welche die in (I) oder (Ia) erwähnten p Bedingungsgleichungen zwischen den $2m$ 0^1 und ∞^1 Punkten a_l und b_l von R darstellen. In diese p Gleichungen (3) gehen allerdings noch die (zum Theil willkürlichen) Hilfspunkte β_λ ein. Nach (I) § 10 sind aber die p letzten Punkte a_l ganz unabhängig von diesen Hilfspunkten oder stets dieselben, wie auch die Hilfspunkte beschaffen seien. Dieser Unabhängigkeit entsprechend lassen sich auch die p Bedingungsgleichungen (3) zwischen den Punkten a_l und b_l auf eine (allerdings transcendente) Form bringen, welche nur diese Punkte und keine der Aufgabe (A) fremden Elemente enthält. (Vgl. Satz I und IV § 20.)

2. Fall. Der Satz II § 11 lässt sich so aussprechen:

(II) Wenn durch die m ∞^1 Punkte $b_1, .., b_m$ einer rationalen Function R der m^{ten} Ordnung q ($\gtreqless 1$) linear unabhängige Φ-Curven gehen, so muss $m > p - q$ sein und es lässt sich R als Quotient zweier Φ-Functionen vom Grade $\mu = n - 3$

darstellen. Dabei sind die m ∞^1 Punkte b_ι und $m-p+q$ der Punkte a_ι willkürlich, die $p-q$ letzten Punkte a_ι aber durch die übrigen Punkte a_ι und die Punkte b_ι eindeutig bestimmt. Es bestehen daher zwischen den m ∞ Punkten b_ι und den m 0 Punkten a_ι $p-q$ Gleichungen.

Die Bildung der Function R und dieser $p-q$ Gleichungen ist folgende.

Der Nenner Φ_0 von R ist vom $n-3^{\text{ten}}$ Grade und so zu bestimmen, dass er verschwindet in den r Doppelpunkten $\delta_1, .., \delta_r$ von $F=0$ und in den m willkürlichen Punkten $b_1, .., b_m$. Nach dieser Bestimmung setzt sich Φ_0 aus q linear unabhängigen, adjungirten Functionen $n-3^{\text{ten}}$ Grades $\varphi_1, .., \varphi_q$, die für die sämmtlichen m ∞^1 Punkte b_ι verschwinden, linear zusammen in der Form

$$\Phi_0 = \varkappa_1\varphi_1 + \cdots + \varkappa_q\varphi_q. \tag{4}$$

Man wähle die Coefficienten $\varkappa_1, .., \varkappa_q$ irgendwie; damit sind die $2p-2-m$ übrigen 0^1 Punkte β_λ, die Φ_0 ausser den Doppelpunkten und den Punkten b_ι besitzt, als Functionen der m Punkte b_ι bestimmt.

Der Zähler Φ von R ist ebenfalls von $n-3^{\text{ten}}$ Grade und so zu bestimmen, dass er verschwindet in den r Doppelpunkten δ_i von F und in den $2p-2-m$ Hilfspunkten β_λ, in denen $\Phi_0=0$ war. Nach dieser Bestimmung hat Φ nach (II), da von den m 0^1 Punkten a_ι von R noch $m-p+q$ willkürlich wählbar sind, die Form

$$\Phi = \lambda_0\Phi_0 + \lambda_1\Phi_1 + \cdots + \lambda_\varkappa\Phi_\varkappa \quad (\varkappa = m-p+q), \tag{5}$$

wo $\Phi_0, \Phi_1, .., \Phi_\varkappa$ bestimmte Φ-Functionen sind, welche sämmtlich in den Hilfspunkten β_λ verschwinden, in welchen daher die Coefficienten der Potenzen von x und y von den Punkten β_λ, also auch von den Punkten b_ι abhängen. Die Coefficienten $\lambda_0, \lambda_1, .., \lambda_\varkappa$ in (5) bestimmen sich nun bis auf einen derselben (etwa λ_0) eindeutig durch die $m-p+q$ ersten 0^1 Punkte a_ι von R. Die Coefficienten der Potenzen von x und y in Φ sind nach dieser Bestimmung abhängig von den m Punkten b_ι und den $m-p+q$ ersten Punkten a_ι. Drückt man aus, dass die $p-q$ letzten Punkte a_ι ebenfalls 0^1 Punkte von R sein sollen, so erhält man die $p-q$ Gleichungen

$$\Phi = 0, \text{ gebildet für die Punkte } a_{m-p+q+1}, .., a_m, \tag{6}$$

welche die in (II) erwähnten $p-q$ Bedingungsgleichungen zwischen den $2m$ Punkten a_ι und b_ι darstellen. In diese $p-q$ Gleichungen (6) gehen allerdings noch die (zum Theil willkürlichen) Hilfspunkte β_λ ein. Nach (I) § 10 sind aber die $p-q$ letzten Punkte

a_l stets dieselben, wie auch die Hilfspunkte beschaffen seien. Dementsprechend lassen sich auch die $p - q$ Bedingungsgleichungen (6) zwischen den $2m$ Punkten a_l und b_l auf eine (allerdings transcendente) Form bringen, welche nur diese Punkte und keine der Aufgabe (A) fremden Elemente enthält. (Vgl. Satz I und IV § 20.)

Für die durch Quotienten von Φ-Functionen darstellbaren, rationalen Functionen hat die Ordnungszahl m nach (5) § 11 die obere Grenze $2p - 2$ und die untere Grenze $\frac{p}{2} + 1$. Die letztere Zahl gibt überhaupt die niederste Ordnung an, die eine rationale Function $R(x, y)$ bei allgemeiner Beschaffenheit von $F(x, y) = 0$ haben kann[1]). Wenn m noch unter diese Zahl herabsinkt, so muss $F(x, y) = 0$ einen speciellen Charakter haben. Kann z. B. m auf 2 herabsinken, so ist die Gleichung $F(x, y) = 0$ vom Geschlecht p von sehr specieller Art; sie führt auf die hyperelliptischen Functionen und Integrale.

Für spätere Untersuchungen (§ 23) ist es wichtig, Quotienten von Φ-Functionen zu bilden, die von möglichst niederer Ordnung sind, aber im Zähler noch eine Anzahl von willkürlichen, linearen, homogenen Coefficienten enthalten. Für diesen Fall hat man nach den Betrachtungen am Schlusse von § 11 den Satz:

(III) Soll ein Quotient von zwei Φ-Functionen bestimmt werden, der in einer möglichst geringen Zahl m_1 von Punkten b_l ∞ wird und im Zähler noch eine gegebene (zwischen gewissen in § 11 angegebenen Grenzen liegende) Zahl q_2 von linearen, homogenen Coefficienten enthält, so setze man p in die Form $p = q_1 q_2 + \tau$ (wo $\tau < q_2$), wodurch eine gewisse Zahl q_1 bestimmt wird. Dann ist $m_1 = p - q_1 + q_2 - 1$ der Minimalwerth für die Ordnung der Function.

So ist z. B. nach der Tabelle (7) § 11 für $q_2 = 2$ der gesuchte Quotient von der Form $(\lambda_0 \Phi_0 + \lambda_1 \Phi_1) : \Phi_0$ und $\min m_1 = p - q_1 + 1$, wo q_1 sich bestimmt aus $p = 2q_1$ oder $p = 2q_1 + 1$; für $q_2 = 3$ ist der Quotient $(\lambda_0 \Phi_0 + \lambda_1 \Phi_1 + \lambda_2 \Phi_2) : \Phi_0$ und $\min m_1 = p - q_1 + 2$, wo q_1 sich bestimmt aus $p = 3q_1$ oder $p = 3q_1 + 1$ oder $p = 3q_1 + 2$.

Die zweite der oben gestellten Aufgaben lautet:

(B) Eine rationale Function $R(x, y)$ von der Ordnung m aus den m ∞^1 Punkten b_l und den m zugehörigen Residuen

1) Vgl. auch § 13.

B_l $(l = 1, .., m)$ zu bilden und die Bedingungsgleichungen zwischen diesen $2m$ Elementen aufzustellen.

Wir nehmen wieder der Einfachheit halber an, R sei in den Punkten b_l ∞ von der ersten Ordnung und die Punkte b_l seien einfache Punkte von $F = 0$ mit endlichen Coordinaten.

Dabei ist die Erklärung der Residuen nach Cauchy die folgende:

Ist eine rationale Function $R(x, y)$ von der Ordnung m in den m Punkten

$(b_1, y_{b_1}), .., (b_m, y_{b_m})$ ∞^1 wie $B_1 (x - b_1)^{-1}, .., B_m (x - b_m)^{-1}$,

so heissen die Coefficienten $B_1, .., B_m$ die Residuen der Function $R(x, y)$ in den m Punkten $b_1, .., b_m$.

Die Lösung der Aufgabe (B) führt, wie sich zeigen wird, auf den dem Satz (Ia) analogen Satz[1]):

(IV) Eine rationale Function von der Ordnung m enthält im Ganzen $2m + 1$ Elemente, nämlich die m ∞^1 Punkte b_l, die m zugehörigen Residuen B_l und eine additive Constante; zwischen den $2m$ ersten Elementen bestehen p Bedingungsgleichungen.

Nach der Lösung der Aufgabe A (1. Fall) kann man stets eine rationale Function herstellen, die in $p + 1$ willkürlich gewählten Punkten ∞^1 wird. Man bilde nun zur Lösung von Aufgabe (B) m solcher Functionen $M_1 : N_1, .., M_m : N_m$ derart, dass alle diese Functionen in denselben p willkürlich gewählten Hilfspunkten ξ_i $(i = 1, .., p)$ ∞^1 werden, und dass ausserdem $M_l : N_l$ in dem Punkte b_l ∞^1 wird. Aus ihnen setze man linear und mit unbestimmten Coefficienten die rationale Function

$$R = C_1 \frac{M_1}{N_1} + \cdots + C_m \frac{M_m}{N_m} + C_0 \tag{7}$$

zusammen, die ∞^1 wird in den m Punkten b_l und den p Punkten ξ_i. Damit diese Function R den Bedingungen der Aufgabe (B) genügt, sind die Constanten C_l so zu bestimmen,

dass die Function (7) in $x = b_l$ ∞ wird, wie $B_l (x - b_l)^{-1}$ und dass sie in den p Hilfspunkten ξ_i endlich bleibt.

Setzt man zur Abkürzung

$$\frac{M_l \, F'y}{N_l'(x) \, F'y - N_l'(y) \, F'x} = S_l$$

und bezeichnet das Resultat der Substitution der Coordinaten des

1) In anderer Herleitung Riemann, Ges. W. S. 101.

Punktes b_k in diesen Ausdruck mit $(S_l)_{b_k}$, so verhält sich die Function (7)

$$\text{in} \quad x = b_l \quad \text{wie} \quad C_l (S_l)_{b_l} (x - b_l)^{-1}.$$

Daher bestimmen sich die Constanten C_l in (7) durch die Residuen B_l und die ∞ Punkte b_l mittels der Gleichungen

$$C_l = B_l : (S_l)_{b_l}. \tag{8}$$

Ferner verhält sich die Function (7)

$$\text{in} \quad x = \xi_i \quad \text{wie} \quad (x - \xi_i)^{-1} \cdot \sum_l C_l (S_l)_{\xi_i}.$$

Trägt man den Werth von C_l ein und drückt aus, dass in der Entwicklung von (7) in der Umgebung des Punktes ξ_i der Coefficient von $(x - \xi_i)^{-1}$ verschwindet, so erhält man die Gleichungen

$$\sum_{l=1}^{m} B_l (S_l)_{\xi_i} : (S_l)_{b_l} = 0 \qquad (i = 1, .., p). \tag{9}$$

Dies sind in der That p Bedingungsgleichungen zwischen den m ∞^1 Punkten b_l und den m zugehörigen Residuen B_l der Function R. Aus ihnen bestimmen sich im Allgemeinen[1]), wenn $m > p$ und wenn die $m - p$ ersten Werthe B_l und die ∞^1 Punkte b_l gegeben sind, die p letzten Residuen B_l eindeutig, d. h. unabhängig von den p Hilfspunkten ξ_i, wie man aus den Sätzen des § 10 leicht beweist. Dementsprechend lassen sich auch hier die p Bedingungsgleichungen zwischen den $2m$ Elementen b_l und B_l auf eine (rein algebraische und sehr einfache) Form bringen, welche nur diese Elemente enthält.

Wir geben diese Gleichungen und ihre Discussion im nächsten §.

§ 13. Bedingungsgleichungen zwischen den Elementen einer rationalen Function.

Es bleibt noch übrig die p Bedingungsgleichungen zwischen den m ∞ Punkten b_l und den zugehörigen Residuen B_l einer rationalen Function $R(x, y)$ von der Ordnung m aufzustellen und zwar in einer von fremden Elementen freien Form[2]). Um dies durchzuführen, bedarf es einer Voruntersuchung über gewisse rationale Functionen von (x, y), die lediglich von $F(x, y) = 0$ abhängen (Satz I), und eines Satzes (II), der sich auf diese Functionen bezieht.

---

1) Vgl. § 13.

2) In anderer Form Riemann, Ges. W. S. 100 und 101.

Ist Φ eine allgemeine, adjungirte Function des $n - 3^{\text{ten}}$ Grades von $F = 0$, so zeigt die Function

$$\Phi : F'y \tag{1}$$

auf der Curve $F = 0$ oder in der Verzweigungsfläche T folgendes Verhalten:

(α) Sie wird $= 0^2$ in jedem der n Punkte ($x = \infty$, $y = \infty$).

Denn in einem solchen Punkt ist $F'y = \infty^{n-1}$ und $\Phi = \infty^{n-3}$.

(β) Sie wird $= \infty^1$ in jedem der $\omega = 2n + 2p - 2$ einfachen Verzweigungspunkte.

Denn in einem solchen Punkte ist $F'y = 0^1$, während Φ endlich und von 0 verschieden ist.

(γ) Sie wird in keinem weiteren Punkte ∞.

Denn in einem Doppelpunkt ist zwar für jeden der beiden Zweige $F'(y) = 0^1$, ebenso aber auch $\Phi = 0^1$, der Quotient (1) bleibt endlich.

Eine rationale Function von (x, y), welche die drei Eigenschaften (α, β, γ) besitzt, heisst ein Integrand 1. Gattung[1]; es ist leicht zu sehen, dass die Function (1) der allgemeinste Integrand 1. Gattung ist.

Ist nämlich S eine rationale Function mit den Eigenschaften (α, β, γ), so zeigt die Function $S \cdot F'y$ in T folgendes Verhalten: sie ist $= \infty^{n-3}$ in jedem der n Punkte ($x = \infty$, $y = \infty$); sie ist $= 0^1$ in einem Doppelpunkt für jeden der beiden Zweige desselben; sie ist ferner $= 0^1$ in den unbestimmt gelassenen, im Endlichen auf $F = 0$ oder in T gelegenen Nullpunkten von S und sie ist endlich und von 0 verschieden in allen übrigen Punkten insbesondere in den Verzweigungspunkten. Die Ordnung der Function ist gleich der Zahl ihrer ∞^1 Punkte, also gleich $n(n-3)$. Da die Function $S \cdot F'y$ nur ∞ wird in den Punkten ($x = \infty$, $y = \infty$) und da sie in jedem Doppelpunkte für jeden der beiden Zweige denselben Werth (0^1) annimmt, so ist sie nach Satz (I) § 8 eine rationale, ganze Function in (x, y) vom Grade $n - 3$; und da sie gleichzeitig $F = 0$ adjungirt ist, so ist sie eine Φ-Function. Die allgemeinste rationale Function S, die den Bedingungen (α, β, γ) genügt, ist also in der That von der Form (1).

Da p linear unabhängige Φ-Functionen $\Phi_1, \ldots, \Phi_p$ existiren (Satz II § 10), so gibt es auch p linear unabhängige Integranden 1. Gattung, nämlich

$$\frac{\Phi_1}{F'y}, \ldots, \frac{\Phi_p}{F'y}. \tag{2}$$

---

1 Riemann, Ges. W. S. 110.

Daher der Satz:

(I) Der allgemeinste Integrand 1. Gattung ist von der Form (1), d. h. Quotient einer allgemeinen Φ-Function durch $F'y$. Die Zahl der linear unabhängigen Integranden 1. Gattung ist $= p$, d. h. gleich dem Geschlecht der Gleichung $F(x, y) = 0$.

Sei nun ferner

$$P(x, y) \tag{3}$$

eine beliebige, ganze oder gebrochene, rationale Function der Ordnung μ. Setzt man $P(x, y) = \varrho$ und betrachtet x als die unabhängige Variable, so ist mit Rücksicht auf $F(x, y) = 0$

$$\frac{d\varrho}{dx} = \frac{P'(x)\,dx + P'y\,dy}{dx} = \frac{F'y\,P'x - F'x\,P'y}{F'y}. \tag{4}$$

Daher ist auch $\frac{d\varrho}{dx}$ und ebenso $\frac{dx}{d\varrho}$ eine rationale Function von (x, y) oder eine irrationale Function von x. Bildet man mit Hilfe des allgemeinen Integranden 1. Gattung (1) die Function

$$\frac{\Phi}{F'y}\,\frac{dx}{d\varrho}, \tag{5}$$

so ist auch diese eine rationale Function von (x, y) oder eine irrationale Function von x. Man denke sich nun durch die Gleichungen $P(x, y) = \varrho$ und $F(x, y) = 0$ statt x die Grösse ϱ als unabhängige Variable eingeführt, betrachte also (5) als irrationale Function von ϱ. Zu einem bestimmten Werthe ϱ von $P(x, y)$ gehören nach Voraussetzung μ Punkte in T, die bezeichnet seien mit (x_l, y_l) $(l = 1, .., \mu)$. Dieselben ändern bei stetiger Werthänderung von ϱ ebenfalls stetig ihre Lage in T, oder die Coordinaten (x_l, y_l) der μ Punkte sind stetige Functionen des Werthes ϱ. Bildet man nun die rationale Function (5) von (x, y) für die μ Punkte (x_l, y_l) und bezeichnet die Summe dieser μ Werthe durch

$$\sum_{l=1}^{\mu} \left[\frac{\Phi}{F'y}\,\frac{dx}{d\varrho}\right]_{x_l y_l}, \tag{6}$$

so ist dieser Ausdruck ebenfalls eine Function von ϱ. Um den Charakter dieser Function festzustellen, denke man sich eine besondere Ebene als Ort der complexen Variabeln ϱ. Beschreibt ϱ in derselben eine geschlossene Curve C — die nicht durch einen solchen Punkt ϱ führt, dass von den μ entsprechenden Punkten (x_l, y_l) eine in einen Verzweigungspunkt oder Doppelpunkt von T fällt — so be-

schreiben die μ zugehörigen Punkte (x_ι, y_ι) in T μ getrennte Wege $C_1, .., C_\mu$, die wieder nach den μ Punkten (x_ι, y_ι) zurücklaufen, jedoch im Allgemeinen so, dass die Endpunkte eine Permutation der Anfangspunkte sind. Daher ist der Endwerth von (6) gleich dem Anfangswerth, da (6) eine symmetrische Function der μ Punkte (x_ι, y_ι) ist. Hieraus folgt, dass (6) eine einwerthige Function von ϱ ist. Wenn sich nun zeigt, dass (6) nur für eine endliche Zahl von Werthen ϱ ∞ wird und für jeden dieser Werthe nur in endlicher Ordnung ∞ wird, so muss (6) eine rationale Function von ϱ sein, und wenn sich weiter zeigt, dass (6) für keinen Werth von ϱ ∞ wird, so muss (6) eine Constante sein, d. h. ganz unabhängig von dem Werthe von ϱ, dem das Punktsystem (x_ι, y_ι) in (6) entspricht. Diese Constante ist bestimmt, sobald man den Werth von (6) für einen Werth von ϱ kennt. Untersuchen wir also den Ausdruck (6) für alle Werthe von ϱ, für die er möglicherweise ∞ werden kann.

1) Nimmt ϱ einen solchen Werth an, dass einer der μ Punkte (x_ι, y_ι) in einen Doppelpunkt von T fällt, so bleibt das entsprechende Glied in (6) endlich.

   Denn in einem Doppelpunkt ist für jeden der beiden Zweige $F'x = 0$, $F'y = 0$; es ist aber $\Phi : F'y$ und ebenso nach (4) $\frac{dx}{d\varrho}$ endlich und von 0 verschieden.

2) Nimmt ϱ einen solchen Werth an, dass einer der μ Punkte (x_ι, y_ι) in einen Verzweigungspunkt von T fällt, so bleibt wieder das entsprechende Glied in (6) endlich.

   Denn in einem Verzweigungspunkt ist $F'y = 0^1$, also $\Phi : F'y = \infty^1$; zugleich aber ist nach (4) $\frac{dx}{d\varrho} = 0^1$; das Product ist endlich und von 0 verschieden.

3) Nimmt ϱ einen solchen Werth an, dass einer der μ Punkte (x_ι, y_ι) in einen der n Punkte $(x = \infty, y = \infty)$ fällt, so ist das entsprechende Glied in (6), also auch (6) selber, endlich (oder 0).

   Denn ist ϱ in dem betreffenden Punkte $(x = \infty, y = \infty)$ endlich, so gelten die Entwicklungen

$$\varrho = A + A_1 x^{-1} + \cdots; \quad \frac{d\varrho}{dx} = -A_1 x^{-2} + \cdots,$$

   also ist $\frac{dx}{d\varrho} = \infty^2$, während $\Phi : F'y = 0^2$ wird, so dass in dem betreffenden Punkte das entsprechende Glied von (6) endlich bleibt.

   Ist aber ϱ in dem betreffenden Punkte $(x = \infty, y = \infty)$ selber ∞, etwa in q^{ter} Ordnung, so gelten die Entwicklungen

$$\varrho = A_0 x^q + A_1 x^{q-1} + \cdots; \quad \frac{d\varrho}{dx} = q A_0 x^{q-1} + \cdots,$$

daher ist $\frac{dx}{d\varrho} = 0^{q-1}$, während $\Phi : F'y = 0^2$ wird, so dass in dem betreffenden Punkte das entsprechende Glied von (6) $= 0^{q+1}$ wird.

4) Wird schliesslich $\varrho = \infty$ in einem Punkte $(x, y) = (b, y_b)$ mit endlichen Coordinaten, so wird jedes Glied in (6) $= 0^2$ also (6) selber $= 0^2$.

Denn in einem solchen Punkt ist

$$\varrho \text{ proportional mit } (x - b)^{-1}, \; \frac{d\varrho}{dx} \text{ mit } (x - b)^{-2},$$

also wird $\frac{dx}{d\varrho} = 0^2$, während $\Phi : F'y$ endlich bleibt.

Hiernach wird die Summe (6) nirgends ∞; sie ist folglich eine Constante und diese Constante ist 0, weil für den Werth $\varrho = \infty$ der Ausdruck (6) $= 0$ ist, wie in 4) gezeigt wurde.

Führt man in (6) die Werthe (x_l, y_l) in das Innere der Klammer ein und lässt den allen Gliedern im Nenner gemeinsamen Factor $d\varrho$ weg, so hat man die Gleichung

$$(7) \qquad \sum_{l=1}^{\mu} \frac{\Phi(x_l, y_l)}{F'(y_l)} \, dx_l = 0.$$

Ein Ausdruck der Form $\Phi(x, y)\, dx : F'y$ heisst ein Abel'sches Differential 1. Gattung; dasselbe hängt nur von $F(x, y) = 0$ ab. Die Gleichung (7) enthält das sogenannte Abel'sche Theorem für Differentiale 1. Gattung[1]), nämlich:

(II) Für jedes Differential 1. Gattung ist die Summe der Differentiale, gebildet mit den Punkten (x_l, y_l) $(l = 1, .., \mu)$, in welchen eine ganze oder gebrochene, rationale Function $P(x, y)$ von der Ordnung μ denselben Werth annimmt, gleich 0.

Dieser Satz ist ein specieller Fall des Abel'schen Theorems für das allgemeine Abel'sche Differential, das sich in derselben Weise wie oben die Gleichung (7) ableiten lässt. (Vgl. § 19 Satz VI.) Da es p linear unabhängige Φ-Functionen gibt, die durch $\Phi_1, .., \Phi_p$ bezeichnet sein mögen, so zerfällt auch die Gleichung (7) in p Gleichungen, nämlich

$$(8) \qquad \sum_l \frac{\Phi_1(x_l, y_l)}{F'(y_l)} \, dx_l = 0, \; .., \; \sum_l \frac{\Phi_p(x_l, y_l)}{F'(y_l)} \, dx_l = 0.$$

---

1) Riemann, Ges. W. S. 116.

Dies giebt den Satz:

(III) Wenn eine rationale Function $P(x, y)$ von der Ordnung μ denselben Werth ϱ annimmt in den μ Punkten (x_l, y_l), so bestehen zwischen diesen μ Punkten und den μ Differentialen dx_l (die eine gewisse Fortschrittsrichtung der Punkte (x_l, y_l) in der Fläche T angeben) stets p Relationen der Form (8), unabhängig von dem jedesmaligen Werth von ϱ.

Wir wenden diesen Satz auf die im vorigen § betrachtete Function $R(x, y)$ von der Ordnung m an, für welche die m ∞^1 Punkte durch b_l und die zugehörigen m Residuen durch B_l bezeichnet wurden; wir führen aber zugleich statt R eine rationale Function r von derselben Ordnung m ein mittels der Substitution

$$R = \frac{r - a}{r - b}. \tag{9}$$

Dann sind $b_1, \ldots, b_m$ diejenigen m Punkte, in welchen die rationale Function r den Werth b annimmt. Daher gelten die p Gleichungen (8), wenn man in denselben μ durch m und $x_1, \ldots, x_\mu$ durch $b_1, \ldots, b_m$ ersetzt, wobei wir unter b_l zugleich die x-Ordinate des Punktes b_l verstehen. Nun ist das zu b_l gehörige Residuum B_l von R nach (9)

$$\left.\begin{aligned} B_l = \lim_{x=b_l} R \cdot (x - b_l) = (b - a) \cdot \lim_{x=b_l} \frac{x - b_l}{r - b} &= (b - a) \left(\frac{dx}{dr}\right)_{x=b_l} \\ &= (b - a) \frac{db_l}{db}. \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Setzt man daher für dx_l in (8) den Werth $db_l = \frac{B_l db}{b - a}$ und unterdrückt den allen Gliedern gemeinsamen Factor $\frac{db}{b - a}$, so erhält man die p Gleichungen[1]):

$$\sum_{l=1}^{m} B_l \left[\frac{\Phi_1(x, y)}{F'y}\right]_{b_l} = 0, \ldots, \quad \sum_{l=1}^{m} B_l \left[\frac{\Phi_p(x, y)}{F'y}\right]_{b_l} = 0, \tag{11}$$

oder den Satz:

(IV) Ist $R(x, y)$ eine rationale Function von der Ordnung m und sind die m ∞^1 Punkte $b_1, \ldots, b_m$ derselben einfache Punkte im Endlichen von T, so bestehen zwischen ihnen und den m zugehörigen Residuen $B_1, \ldots, B_m$ die p Gleichungen (11), die ausser diesen Elementen nur von $F(x, y) = 0$ abhängen.

---

1) Vgl. (5) § 19.

Wir verweilen noch kurz bei den Gleichungen (11). Riemann gelangt zu denselben auf transcendentem Wege, indem er die rationale Function R durch eine Summe von Integralen zweiter Gattung darstellt und die Bedingungen aufsucht, unter denen eine solche Summe in der Fläche T eindeutig ist (s. Gl. 7 § 17). Er kommt dabei unter Voraussetzung des fundamentalen Satzes (der ebenfalls auf transcendentem Wege gewonnen wird), dass es stets p linear unabhängige Φ-Functionen oder Differentiale 1. Gattung gibt, gerade zu den obigen Gleichungen (11) als den einzigen Bedingungen, die zwischen den ∞^1 Punkten b_ι und den zugehörigen Residuen B_ι der rationalen Function bestehen müssen. Die Discussion der Gleichungen (11) führt alsdann zu dem Riemann'schen Satze (in der Form (I) § 11) und seiner Erweiterung durch Roch (in der Form (II) § 11). Es ist von Interesse, diese Riemann-Roch'sche Discussion kennen zu lernen, da bei derselben die Bedeutung der Φ-Functionen besonders deutlich hervortritt. Wir nehmen also an, man habe die Gleichungen (11), ohne über die Ordnungszahl m und die Lage der ∞^1 Punkte b_ι von R in T eine Annahme zu machen, auf dem angegebenen Riemann'schen Wege (§ 17, Gl. 7) gewonnen und stellen die Aufgabe, aus diesen Gleichungen die Grenzen für die Ordnungszahl m und das Gesetz der Abhängigkeit zwischen den ∞^1 und 0^1 Punkten der rationalen Function R zu ermitteln.

Es wird von der Beschaffenheit der Function R oder der m Punkte b_ι abhängen, ob die p Gleichungen (11) linear unabhängig sind oder nicht d. h. ob es p constante Factoren gibt, mit denen sie multiplicirt die Summe 0 geben oder ob dies nicht zutrifft. Hiernach sind (wie in § 12) zwei Fälle zu unterscheiden; im ersten Falle ist R eine Function von allgemeiner, im zweiten Falle eine Function von besonderer Art; wir beginnen mit dem ersten Fall, der dem ersten Fall in § 12 S. 87 entspricht.

1. Fall. Hier gilt der Satz:

(V) Sind die p Gleichungen (11) linear unabhängig, so sind die m Punkte b_ι, in welchen die rationale Function R ∞^1 wird, derart unabhängig von einander, dass sie nicht auf ein und derselben Φ-Curve liegen.

Denn, angenommen die m Punkte b_ι lägen auf einer Φ-Curve $\lambda_1 \Phi_1 + \cdots + \lambda_p \Phi_p = 0$, so würden die p Gleichungen (11), multiplicirt mit diesen Factoren λ und addirt, identisch 0 geben, was der Voraussetzung, dass die Gleichungen (11) linear unabhängig seien, widerspricht. (q. e. d.)

(Va) Umgekehrt: Sind die m Punkte b_ι, in denen eine ratio-

nale Function R ∞^1 wird, derart unabhängig, dass sie nicht sämmtlich auf ein und derselben Φ-Curve liegen, so sind die p Gleichungen (11) linear unabhängig.

Denn, angenommen, die p Gleichungen (11) seien linear abhängig und das zugehörige Factorensystem sei $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$, so müssten bei der Addition, damit die Summe identisch 0 würde, die Coefficienten von $B_1, \ldots, B_m$ verschwinden d. h. die m Punkte b_l auf derselben Φ-Curve liegen, was der Voraussetzung widerspricht. (q. e. d.)

Zugleich muss in diesem Falle $m > p$ sein; denn für $m = p$ (und ähnlich für $m < p$) hätte man aus (11) durch Elimination der B_l

$$\sum \pm \Phi_1(b_1) \cdots \Phi_p(b_p) = 0$$

d. h. ebensowohl die m Punkte b_l müssten auf derselben Φ-Curve liegen als auch die Gleichungen (11) wären linear abhängig. Wir fassen dies so zusammen:

(VI) Sind die m ∞^1 Punkte b_l einer rationalen Function derart willkürlich, dass sie nicht 0-Punkte ein und derselben Φ-Function sind, so muss $m > p$ sein. Von den m Residuen B_l sind alsdann noch $m - p$ willkürlich, die p letzten aber durch sie und die Punkte b_l eindeutig bestimmt.

2. Fall. Hier gilt der Satz[1]):

(VII) Sind die p Gleichungen (11) linear abhängig von einander derart, dass q derselben eine identische Folge der übrigen sind, so müssen die m Punkte b_l 0-Punkte der nämlichen q linear unabhängigen Φ-Functionen sein.

Zum Beweise seien die $p - q$ letzten der Gleichungen (11) linear unabhängig, die q ersten aber eine identische Folge derselben, so dass man hat $p > q \geqq 1$ und $m > p - q$. Alsdann müssen die $p - q$ letzten Gleichungen (11), mit gewissen Factoren $\lambda'_{q+1}, \ldots, \lambda'_p$ multiplicirt und addirt, die erste Gleichung (11) ergeben, mit andern Factoren $\lambda''_{q+1}, \ldots, \lambda''_p$ multiplicirt und addirt, die zweite Gleichung (11) u. s. f. bis zur q^{ten} Gleichung (11). Man erhält so die q Gleichungen

$$\lambda_1 \Phi_1 - \sum_{i=q+1}^{p} \lambda'_i \Phi_i = 0, \; \ldots, \; \lambda_q \Phi_q - \sum_{i=q+1}^{p} \lambda_i^{(q)} \Phi_i = 0 \qquad (12)$$

und jeder dieser q Gleichungen genügen die sämmtlichen m ∞^1 Punkte b_l der Function R. Mehr als q Gleichungen aber können nicht durch die sämmtlichen m Punkte b_l befriedigt werden, weil sonst mehr als

1) Roch, Journ. für Math. Bd. 64, p. 372 ff. (1864); vgl. auch Brill und Nöther, Math. Ann. VII. S. 290 (1873).

q der Gleichungen (11) eine identische Folge der übrigen wären. (q. e. d.)

(VIIa) Umgekehrt: Sind die m Punkte b_ι, in denen eine rationale Function R ∞^1 wird, von der speciellen Lage, dass für jeden derselben die nämlichen q linear unabhängigen Φ-Functionen verschwinden, so sind von den p Gleichungen (11) q eine identische Folge der übrigen.

In der That, die q linear unabhängigen Φ-Curven, welche durch die m Punkte b_ι gehen, lassen sich, wenn $\Phi_1, .., \Phi_p$ linear unabhängige Φ-Functionen sind, auf die Form (12) bringen. Jede dieser Gleichungen wird also durch die sämmtlichen m Punkte b_ι befriedigt. Denkt man sich die hieraus entstehenden mq Gleichungen in m Reihen angeschrieben, deren jede die q Gleichungen (12) enthält, gebildet für einen der m Punkte b_ι; multiplicirt man ferner je m untereinander stehende, zu demselben Ausdruck (12) gehörige Gleichungen, indem man unter $B_1, .., B_m$ vorläufig ganz beliebige Grössen versteht, bez. mit

$$B_1 : (F'y)_{b_1}, \; \ldots, \; B_m : (F'y)_{b_m}$$

und addirt, so erhält man die q Gleichungen

$$\lambda_1 \sum_{h=1}^{m} \left[\frac{B_h \Phi_1}{F'y}\right]_{b_h} - \lambda'_{q+1} \sum_{h=1}^{m} \left[\frac{B_h \Phi_{q+1}}{F'y}\right]_{b_h} - \cdots - \lambda'_p \sum_{h=1}^{m} \left[\frac{B_h \Phi_p}{F'y}\right]_{b_h} = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\lambda_q \sum_{h=1}^{m} \left[\frac{B_h \Phi_q}{F'y}\right]_{b_h} - \lambda^{(q)}_{q+1} \sum_{h=1}^{m} \left[\frac{B_h \Phi_{q+1}}{F'y}\right]_{b_h} - \cdots - \lambda^{(q)}_p \sum_{h=1}^{m} \left[\frac{B_h \Phi_p}{F'y}\right]_{b_h} = 0.$$

Unterwirft man nun die m Grössen $B_1, .., B_m$ den $p - q$ Gleichungen

$$\sum_{h=1}^{m} \left[\frac{B_h \Phi_{q+1}}{F'y}\right]_{b_h} = 0, \; \ldots, \; \sum_{h=1}^{m} \left[\frac{B_h \Phi_p}{F'y}\right]_{b_h} = 0,$$

wobei, da $m > p - q$ ist, ein Theil der m Grössen B_h, nämlich $m - p + q$ derselben, beliebig bleibt, so folgen von selber die q weiteren Gleichungen

$$\sum_{h=1}^{m} \left[\frac{B_h \Phi_1}{F'y}\right]_{b_h} = 0, \; \ldots, \; \sum_{h=1}^{m} \left[\frac{B_h \Phi_q}{F'y}\right]_{b_h} = 0.$$

Das heisst aber, von den p Gleichungen (11) sind q eine identische Folge der übrigen. (q. e. d.)

Diese Betrachtungen geben den Satz:

(VIII) Sind die m ∞^1 Punkte b_ι einer rationalen Function R nicht unabhängig, sondern so beschaffen, dass für

jeden derselben die nämlichen q linear unabhängigen Φ-Functionen verschwinden, so muss $m > p - q$ sein. Von den m Residuen B_l der Function R sind alsdann noch $m - p + q$ willkürlich, die $p - q$ letzten aber durch sie und die m Punkte b_l eindeutig bestimmt.

Die Sätze (VI) und (VIII) sind nun identisch mit den Sätzen (I) und (II) in § 11. Denn die hier gefundene Abhängigkeit zwischen den ∞^1 Punkten b_l und den Residuen B_l lässt sich mittels der Form (7) § 12 der Function R leicht in die früher (§ 11) gefundene Abhängigkeit zwischen den ∞^1 Punkten b_l und 0^1 Punkte a_l von R umsetzen.

Der Fall 2 tritt immer ein, wenn $m \overline{\gtrless} p$ ist; es kann indess auch $m > p$ sein. Aber es hat m eine obere Grenze, nämlich $m \overline{\gtrless} 2p - 2$, da eine Φ-Curve, abgesehen von den Doppelpunkten, nur $2p - 2$ 0^1 Punkte besitzt und es hat andrerseits m eine untere Grenze, nämlich $m \overline{\gtrless} \frac{p}{2} + 1$, wie in § 11 Gl. (5) gezeigt wurde. Das letztere ergibt sich auch durch eine einfache Abzählung[1]), wenn man die m ∞^1 Punkte b_l von R nicht als gegeben annimmt, sondern so bestimmt, dass die Ordnung m von R eine möglichst niedere wird. Nach (Ia) § 12 hat eine rationale Function R von der Ordnung m im Ganzen $2m + 1$ Elemente, nämlich die m ∞^1 Punkte b_l, die m 0^1 Punkte a_l und einen constanten Factor; zwischen den $2m$ ersten Elementen bestehen p Bedingungsgleichungen. Ferner muss von den m Punkten b_l und von den m Punkten a_l je einer willkürlich sein. Denn ist $R = M : N$ von der Ordnung m, so ist auch die Function $\lambda_0 (M + \lambda N) : (M + \mu N)$, wo λ_0, λ, μ constante Coefficienten sind, von der Ordnung m. In dieser Function ist wegen der willkürlichen Parameter λ und μ je einer der 0^1 und der ∞^1 Punkte willkürlich; dasselbe muss von der Function $R = M : N$ gelten. Nach willkürlicher Bestimmung je eines der Punkte a_l und b_l und des Factors λ_0 hat R noch $2m - 2$ Elemente, welche p Bedingungsgleichungen genügen müssen. Dies ist nur möglich, wenn $2m - 2 \overline{\gtrless} p$ oder $m \overline{\gtrless} \frac{p}{2} + 1$ ist. (q. e. d.)

---

1) Riemann, Ges. W. S. 101.

Dritter Abschnitt.

Die Abel'schen Integrale.

Im zweiten Abschnitt wurden die zu $F(x, y) = 0$ gehörigen rationalen Functionen von (x, y) auf ihre charakteristischen Eigenschaften und ihre Bildungsweise untersucht. Das Gleiche soll jetzt mit den Integralen dieser rationalen Functionen, den sogenannten Abel'schen Integralen geschehen, deren Differentiale zum Theil schon im zweiten Abschnitt aufgetreten sind. Wie bei den rationalen Functionen die Curve n^{ter} Ordnung, so ist bei den Abel'schen Integralen die n-blättrige Verzweigungsfläche T von y als geometrisches Bild der Gleichung $F(x, y) = 0$ vorzuziehen. Wir untersuchen zuerst in § 14—17 die Abel'schen Integrale selber; es zeigt sich, dass dieselben in einzelnen Punkten der Verzweigungsfläche T nicht nur algebraisch, sondern im Allgemeinen auch logarithmisch unendlich werden, und dass sie in T nicht eindeutige, sondern unendlich vieldeutige Functionen des Ortes von bestimmtem Charakter sind. Man kann das allgemeine Abel'sche Integral zusammensetzen aus dreierlei Gattungen von Integralen, deren Eigenschaften und Bildungsweise besonders einfach und charakteristisch ist. Wir betrachten zweitens in § 18—21 die Beziehungen, die zwischen Abel'schen Integralen unter sich oder zwischen ihnen und rationalen Functionen stattfinden. Dabei ergeben sich eine Reihe von Darstellungen und Sätzen, von denen wir als das Wichtigste hier nur das Abel'sche Theorem hervorheben.

§ 14. Das allgemeine, Abel'sche Integral.[1])

Wir beginnen mit den Eigenschaften des allgemeinen, zu $F(x,y) = 0$ gehörigen, Abel'schen Integrals. Dasselbe hat, wenn $P(x, y)$ eine rationale Function von (x, y) bezeichnet, die Form

$$(1) \qquad W = \int_{\xi, \eta}^{x, y} P(x, y)\, dx,$$

wobei der Integrationsweg eine beliebige Curve in der n-blättrigen

1) Puiseux-Fischer, Unters. üb. algebr. Funct. Halle 1861. S. 129 ff.

Verzweigungsfläche T zwischen einem festen Anfangspunkt (ξ, η) und einem variabeln Endpunkt (x, y) ist.

Betrachtet man W als Function der Coordinaten des Punktes (x, y) in T, so ist diese Function charakterisirt einerseits durch ihre Unstetigkeiten, andrerseits durch ihre Vieldeutigkeit. Bei der Besprechung derselben mögen vorerst noch die allgemeinen Voraussetzungen gelten, die in § 2 über die Fläche T und in § 6 über eine rationale Function $P(x, y)$ gemacht wurden.

Wir untersuchen zuerst die Integralfunction W auf ihr Verhalten in einzelnen Punkten von T. W ist stetig in einem Punkte (x_1, y_1) von T (auch wenn derselbe ein Verzweigungspunkt ist), falls für $(x = x_1, y = y_1) \lim (x - x_1) P(x, y) = 0$ und stetig in einem der n Punkte $(x = \infty, y = \infty)$, wenn für diese Werthe $\lim x^{-1} P(x, y) = 0$ ist. Im Allgemeinen ergibt sich das Verhalten von W in einem Punkte (x_1, y_1) von T aus der in der Umgebung dieses Punktes gültigen Reihenentwicklung der Function $P(x, y)$ nach Potenzen von $x - x_1$ durch Integration nach x. Um verschiedene Lagen des Punktes gleichzeitig zu berücksichtigen, sei jedem Punkte von T die Grösse s zugeordnet, die in ihm unendlich klein von der ersten Ordnung ist, so dass s die Bedeutung $x - x_1$, $(x - x_1)^{\frac{1}{\lambda}}$ oder x^{-1} hat, je nachdem der Punkt ein einfacher Punkt (mehrfache Punkte ohne Verzweigung inbegriffen) oder ein $(\lambda - 1)$-facher Verzweigungspunkt im Endlichen von T oder einer der Punkte $(x = \infty, y = \infty)$ ist. In der Umgebung dieser Punkte ist alsdann $P(x, y)$ jedesmal dargestellt durch eine Entwicklung von der Form (§ 6 Satz II)

$$P(x, y) = \mathfrak{P}(s) + B_1 s^{-1} + B_2 s^{-2} + \cdot\cdot, \tag{2}$$

wo $\mathfrak{P}(s)$ eine nach ganzen Potenzen von s mit positiven Exponenten fortschreitende Reihe bezeichnet und wo die nachfolgenden Glieder mit negativen Exponenten, welche die Art der Unstetigkeit von $P(x, y)$ in dem betrachteten Punkte angeben, nur in endlicher Zahl vorkommen. Aus (2) ergibt sich, wenn man mit dx multiplicirt und die Integration ausführt, nachdem s durch seine verschiedenen Werthe ersetzt ist, für W im Allgemeinen ein Ausdruck von der Form

$$W = \mathfrak{P}_1(s) + A \log s + A_1 s^{-1} + A_2 s^{-2} + \cdot\cdot, \tag{3}$$

wo $\mathfrak{P}_1(s)$ wieder eine aufsteigende Potenzreihe von s ist und wo die Glieder mit negativen Exponenten wieder bis zu einer endlichen Ordnung ansteigen.

Hieraus ist ersichtlich, dass das Abel'sche Integral W im Allgemeinen nicht nur algebraisch, sondern auch logarithmisch unendlich wird. Ein im Endlichen von T liegender Punkt (x_1, y_1) ohne oder mit

Verzweigung ist ein logarithmischer Unstetigkeitspunkt von W, wenn in der Entwicklung von $P(x, y)$ in der Umgebung des Punktes das Glied $(x - x_1)^{-1}$ vorkommt; einer der n Punkte $(x = \infty, y = \infty)$ von T, wenn in der Entwicklung von $P(x, y)$ in der Umgebung dieses Punktes das Glied x^{-1} vorkommt.

Wir untersuchen zweitens die Vieldeutigkeit der Integralfunction W in der Verzweigungsfläche T. Nach den allgemeinen Methoden von Cauchy und Riemann hat man die m Punkte (x_l, y_l) $(l = 1, .., m)$ der Fläche T, in denen W logarithmisch unendlich wird und zu denen auch Verzweigungspunkte oder einzelne der Punkte $(x = \infty, y = \infty)$ gehören können, durch kleine Kreise auszuschneiden und die so durchlöcherte Fläche durch Querschnitte in eine einfach zusammenhängende Fläche T' zu verwandeln.

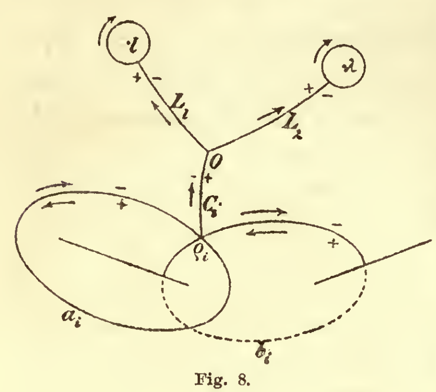


Fig. 8.

Diese Querschnitte, die einander nicht schneiden sollen, bestehen nach § 2 (s. Fig. 8; die Punkte λ und die Schnitte $\mathfrak{L}_\lambda$ sind hier wegzudenken).

1) in den p Querschnittpaaren a_i, b_i und den zugehörigen Schnitten c_i, die je ein Paar mit dem beliebigen Punkte O verbinden $(i = 1, .., p)$,
2) in m Schnitten $\mathfrak{L}_l$, welche den Punkt O mit den um die m Punkte (x_l, y_l) gelegten Kreisen verbinden $(l = 1, .., m)$.

Sind keine logarithmischen Unstetigkeitspunkte vorhanden, wie bei den Integralen 1. und 2. Gattung, so fallen die Schnitte $\mathfrak{L}$ weg.

Ferner unterscheide man an jedem Querschnitt beliebig einen positiven (+) und einen negativen (—) Rand, bezeichne den Werth von W in gegenüberliegenden Punkten dieser Ränder bez. mit W^+ und W^- und ermittle die constanten Werthdifferenzen $P = W^+ - W^-$, die W längs jedes Querschnittes besitzt. Dies geschieht, indem man W auf einer Curve von einem Punkte des — Randes zu dem gegenüberliegenden Punkte des + Randes führt, ohne dabei einen Querschnitt zu überschreiten. Diese Werthdifferenzen P sind charakteristisch für W und heissen nach Riemann die Periodicitätsmoduln von W.[1]) Im Einzelnen ergibt sich Folgendes:

1) Nach Puiseux, l. c. S. 84 auch kürzer „Perioden" von W.

Die Periodicitätsmoduln von W an den Schnitten c_i sind gleich 0; die Schnitte c_i können daher ganz unberücksichtigt bleiben.

In der That, um den Periodicitätsmodul von W an c_i oder die Differenz der Werthe von W in einem Punkt α des — Randes und dem gegenüberliegenden Punkt α' des + Randes von c_i zu erhalten, hat man das Integral (1) vom Punkt α aus längs des — Randes von c_i bis zum Kreuzungspunkt des Querschnittpaares a_i, b_i, alsdann längs der beiden Ränder dieses Paares (entgegengesetzt der Pfeilrichtung) und schliesslich längs des + Randes von c_i bis zu dem Punkt α' zu führen. Dabei ist die Richtung, in der man die Ränder je eines der Querschnitte a_i und b_i und ebenso die des Stückes von c_i durchläuft, in je zwei gegenüberliegenden Punkten dieser Schnitte entgegengesetzt, während der Werth der zu integrirenden rationalen Function $P(x, y)$ in solchen zwei Punkten der gleiche ist. Daher heben sich die Elemente des Integrals (1) in je zwei solchen Punkten gegenseitig auf und der Gesammtwerth des Integrals ist 0. (q. e. d.)

Die Periodicitätsmoduln von W an den Querschnitten a_i und b_i sind gewisse, endliche Werthe

$$\text{an } a_i\colon\ M_i, \qquad \text{an } b_i\colon\ N_i. \tag{4}$$

Der Werth M_i wird gefunden, indem man W in T' vom — zum + Rande von a_i führt, was etwa längs der — Seite von b_i im Sinne des Pfeiles geschehen kann; der Werth N_i, indem man W in T' vom — zum + Rande von b_i führt, was längs der + Seite von a_i im Sinne des Pfeiles geschehen kann. Man überzeugt sich leicht, dass der Werth von W, der für einen gewissen Integrationsweg zwischen (ξ, η) und (x, y) in der Fläche T gilt, bei Verlegung des Weges jedesmal um M_i wächst, so oft der neue Weg einmal den Schnitt a_i von der + zur — Seite und um N_i, so oft der neue Weg einmal den Schnitt b_i von der + zur — Seite überschreitet.

Die Periodicitätsmoduln von W an den Schnitten $\mathfrak{L}_l$ sind ebenfalls endliche Werthe.

Ist nämlich ein logarithmischer Unstetigkeitspunkt (x_l, y_l) von W einfacher Punkt im Endlichen von T und A_l der Coefficient von $(x - x_l)^{-1}$ in der Entwicklung von $P(x, y)$ in der Umgebung von (x_l, y_l), so ist der Periodicitätsmodul von W

$$\text{an } \mathfrak{L}_l\colon\ + 2i\pi A_l, \tag{5}$$

wie sich ergibt, wenn man W in T' vom — zum + Rande von $\mathfrak{L}_l$ führt, was auf einem kleinen, den Punkt (x_l, y_l) umgebenden Kreise geschehen kann, so dass dieser Punkt zur Linken liegt, der Kreis

also entgegengesetzt der Pfeilrichtung durchlaufen wird. Ist der logarithmische Unstetigkeitspunkt (x_l, y_l) von W ein $(\lambda - 1)$-facher Verzweigungspunkt, so umläuft der Kreis den Punkt λ-mal (in jedem der λ zusammenhängenden Blätter einmal) und der Periodicitätsmodul von W an der Linie $\mathfrak{L}_l$ (die nur in einem der λ Blätter verläuft) ist $= 2i\pi\,\lambda A_l$. Ist einer der Punkte $(x = \infty,\ y = \infty)$ ein logarithmischer Unstetigkeitspunkt von W, und A der Coefficient von x^{-1} in der Entwicklung von $P(x, y)$, ferner $\mathfrak{L}$ der von O nach dem Punkte gehende Schnitt, so ist der zugehörige Periodicitätsmodul von W an $\mathfrak{L}$ gleich $2i\pi A$, wie sich ergibt, wenn man W auf einem kleinen Kreise um den betreffenden Punkt $(x = \infty,\ y = \infty)$ führt, so dass dieser Punkt zur Rechten liegt.

Man überzeugt sich wieder leicht, dass in allen diesen Fällen bei einer Verlegung des Integrationsweges W um die angegebenen Periodicitätsmoduln wächst, wenn der neue Weg die Linien $\mathfrak{L}_l$ oder a_i, b_i von dem $+$ zum $-$ Rande überschreitet.

Nach dieser Betrachtung ist die Integralfunction W in der einfach zusammenhängenden Fläche T' eine eindeutige, dagegen in der ursprünglichen Fläche T eine unendlich vieldeutige Function des Ortes (x, y) von besonderer Art. Ist nämlich einer ihrer Werthe in (x, y) gleich W, so erhält man den allgemeinsten Werth, den sie in demselben Endpunkt (x, y) durch Abänderung des Weges annehmen kann, indem man zu W den Ausdruck hinzufügt

$$(6) \qquad 2i\pi \sum_{l=1}^{m} \alpha_l A_l + \sum_{i=1}^{p} (\mu_i M_i + \nu_i N_i),$$

wo α_l, μ_i, ν_i ganze Zahlen sind, die angeben, wie oft der betreffende Querschnitt bei Verlegung des Weges von der $+$ zur $-$ Seite überschritten wurde. Zugleich folgt, dass der Werth von W, erstreckt über eine beliebige, geschlossene Curve in T, sich immer linear und mit ganzzahligen Coefficienten durch die Periodicitätsmoduln (4) und (5) ausdrückt.

Während also eine zu $F(x, y) = 0$ gehörige rationale Function $P(x, y)$ als eindeutige und reguläre Function in der Verzweigungsfläche T charakterisirt war, gilt für die Integralfunction W derselben der Satz:

(I) Die allgemeine, zu $F(x, y) = 0$ gehörige Abel'sche Integralfunction W unterscheidet sich von der rationalen Function dadurch,

1) dass sie in einzelnen Punkten von T im Allgemeinen

nicht nur algebraisch, sondern auch logarithmisch ∞ wird,

2) dass sie eine unendlich vieldeutige Function des Ortes (x, y) in T ist, deren Werthe in demselben Punkte von T um ganzzahlige Vielfache der $m + 2p$ Periodicitätsmoduln $2i\pi A_l$, M_i, N_i von einander verschieden sind.

Hierbei ist stets A_l durch λA_l zu ersetzen, wenn der logarithmische Unstetigkeitspunkt (x_l, y_l) ein $(\lambda - 1)$-facher Verzweigungspunkt ist.

Die Eigenschaften (I) sind charakteristisch für das Abel'sche Integral, denn es gilt umgekehrt der Satz[1]):

(II) Eine Function W von (x, y), die in der Fläche T im Allgemeinen eindeutig und stetig ist, die aber in einzelnen Punkten (x_l, y_l) algebraisch logarithmisch ∞ wird und an einzelnen Linien, nämlich den Querschnitten a_i und b_i und den nach den logarithmischen Unstetigkeitspunkten gezogenen Linien $\mathfrak{L}_l$ constante Werthdifferenzen oder Periodicitätsmoduln hat, ist ein Abel'sches Integral, d. h. das Integral einer rationalen Function von (x, y).

Nach Voraussetzung ist nämlich die Function $\frac{dW}{dx}$ in einzelnen Punkten nur noch algebraisch ∞; sie ist im Uebrigen stetig und eindeutig in T, da die constanten Werthdifferenzen an den Linien $a_i, b_i, \mathfrak{L}_l$ bei der Differentiation von W wegfallen; sie ist daher nach (§ 6) eine rationale Function von (x, y) und W selber das Integral einer solchen Function.

Wir erwähnen hier noch einen wichtigen Satz, der die Periodicitätsmoduln $2i\pi A_l$ des allgemeinen Abel'schen Integrales W betrifft[2]).

(III) Die Summe der Coefficienten A_l, die zu den logarithmischen Unstetigkeitspunkten (x_l, y_l) des Integrals W gehören, ist Null. Dabei ist wieder A_l durch λA_l zu

1) Riemann, (Ges. W. S. 97). Dort ergibt sich dieser Satz als specieller Fall des Dirichlet'schen Princips.

2) Puiseux, l. c. S. 117. Die Grössen A_l sind die Residuen der Function $P(x, y)$ in (1) bezüglich der Punkte (x_l, y_l) (vgl. § 12). Riemann, Ges. W. S. 97—99. Der Satz (III) lässt sich auch leicht aus den Gleichungen (11) § 13 herleiten, wie in § 16 Gl. (5a) näher angedeutet ist.

ersetzen, wenn der Punkt ein $(\lambda - 1)$-facher Verzweigungspunkt ist.

Denn führt man W oder $\int dW$ im Sinne der Pfeile um die ganze Begrenzung von T', so erhält man den Werth 0, weil sich der geschlossene Integrationsweg auf einen beliebigen Punkt, in dem W stetig ist, zusammenziehen lässt. Andrerseits aber zerfällt der Integralwerth in einzelne Integrale, genommen längs der beiden Ränder der Schnitte a_i, b_i, c_i und $\mathfrak{L}_l$ und über die Kreise um die Punkte (x_l, y_l). Von diesen Bestandtheilen sind die auf die Schnitte a_i, b_i, c_i, $\mathfrak{L}_l$ bezüglichen Null, weil jeder der Schnitte zweimal und zwar in entgegengesetzter Richtung durchlaufen wird, wobei sich die Elemente von W oder $\int dW$ in zwei gegenüberliegenden Punkten eines Schnittes aufheben. Es bleibt also nur die Summe der Integralwerthe für die Kreise um die Punkte (x_l, y_l). Diese Summe ist nach (5) $= -2i\pi \sum_l A_l$ und es ist demnach $\sum A_l = 0$. (q. e. d.)

Aus (III) folgt, dass ein Abel'sches Integral mit nur einem logarithmischen Unstetigkeitspunkt unmöglich ist oder der Satz:

(IV) Wenn in einem Abel'schen Integral logarithmische Unstetigkeitspunkte auftreten, so ist die Zahl derselben mindestens gleich zwei.

Als specielle Fälle gehören zu den Abel'schen Integralen auch die rationalen Functionen von (x, y) und die Logarithmen solcher Functionen. Die ersteren sind dadurch charakterisirt, dass sie nicht logarithmisch, sondern nur algebraisch unendlich werden, und dass für sie die Periodicitätsmoduln $2i\pi A_l$, M_i und N_i sämmtlich verschwinden; die letzteren dadurch, dass sie nicht algebraisch, sondern nur logarithmisch unendlich werden, dass in den Periodicitätsmoduln $2i\pi A_l$ die Grössen A_l sämmtlich ganze, positive oder negative Zahlen und dass ebenso die Moduln M_i und N_i ganzzahlige Vielfache von $2i\pi$ sind (vgl. § 17 Gl. 9). Die Betrachtung des Logarithmus einer rationalen Function $\log R(x, y)$ führt zu einem neuen Beweis des früheren Satzes (II) § 7, nämlich:

(V) Für jede rationale Function $R(x, y)$ ist die Zahl der ∞^1 Punkte und der 0^1 Punkte die gleiche.

Bei dieser Ausdrucksweise ist vorausgesetzt, dass ∞ und 0 Punkte höherer Ordnung ihren Ordnungszahlen entsprechend gerechnet werden. Der Beweis ist analog dem des Satzes (III). Sei $R(x, y)$ gleich 0 in m Punkten (x_l, y_l) und gleich ∞ in μ Punkten $(\xi_\lambda, \eta_\lambda)$

die wir der Einfachheit halber sämmtlich im Endlichen der Fläche T annehmen; es verhalte sich

$$\left.\begin{array}{llllll} \text{in}\,(x_l, y_l) & R(x,y) & \text{wie} & (x-x_l)^{p_l}, & \text{also}\,\log R(x,y) & \text{wie}\,+p_l\log(x-x_l) \\ \text{in}\,(\xi_\lambda, \eta_\lambda) & R(x,y) & „ & (x-\xi_\lambda)^{-q_\lambda}, & „\;\;\log R(x,y) & „\;\;-q_\lambda\log(x-\xi_\lambda). \end{array}\right\}(7)$$

Hier sind p_l und q_λ ganze, positive Zahlen. Man schliesse die Punkte (x_l, y_l) und $(\xi_\lambda, \eta_\lambda)$ durch kleine Kreise aus (s. Fig. 8) und lege von dem Punkte O (dem gemeinsamen Punkt der Schnitte c_i) nach diesen Kreisen Schnitte $\mathfrak{L}_l$ und $\mathfrak{L}_\lambda$, die weder einander noch a_i, b_i, c_i schneiden. Hierdurch entsteht eine einfach zusammenhängende Fläche T', in der das Integral $\int d\log R = \int \frac{1}{R}\frac{dR}{dx}dx$ eindeutig und stetig ist. Führt man daher dies Integral um die ganze Begrenzung von T', so erhält man den Werth 0. Andrerseits ist der Beitrag, den die Schnitte a_i, b_i, c_i, $\mathfrak{L}_l$ und $\mathfrak{L}_\lambda$ zu dem Integralwerth liefern, wie in dem Beweise von (III) gleich 0. Dagegen gibt nach (7) der Kreis um den Punkt (x_l, y_l) den Beitrag $-p_l$, der Kreis um $(\xi_\lambda, \eta_\lambda)$ den Beitrag $+q_\lambda$; folglich hat man $\sum_{l=1}^{m} p_l - \sum_{\lambda=1}^{\mu} q_\lambda = 0$. (q. e. d.)

Die weitere Untersuchung des allgemeinen Abel'schen Integrals beruht auf der Zerlegung desselben in möglichst einfache Integrale. Dabei ergeben sich drei wesentlich verschiedene Gattungen von Integralen, nämlich:

Integrale 1. Gattung, d. h. solche, die in T allenthalben endlich sind,

Integrale 2. Gattung, d. h. solche, die in T nur in einem Punkte algebraisch ∞ werden,

Integrale 3. Gattung, d. h. solche, die in T nur in zwei Punkten je logarithmisch ∞ werden.

Daneben können noch rationale Functionen und Logarithmen solcher Functionen auftreten. Diese Formen lassen sich ebenfalls auf Integrale der 1., 2., 3. Gattung zurückführen (s. § 17 Satz II und III). Man kann nun die Zerlegung des allgemeinen Integrals W direct und algebraisch vornehmen durch eine Partialbruchzerlegung[1]) der rationalen Function $\frac{dW}{dx} = P(x, y)$. Wir ziehen es vor, umgekehrt zu zeigen[2]), wie sich die Integrale der genannten drei Gattungen von

1) Clebsch-Gordan, Abel'sche Functionen S. 9 (1866). Nöther, Math. Ann. Bd. 37. S. 424 (1890).

2) Riemann, Ges. W. S. 100.

vornherein bilden lassen und wie sich das allgemeine Integral aus ihnen zusammensetzen lässt, womit indirect auch die Zerlegung geleistet ist. Wir setzen dabei wie im Abschnitt II voraus, dass in T von Verzweigungspunkten nur einfache und von singulären Punkten nur Doppelpunkte vorkommen.

§ 15. Die p Integrale erster Gattung.

Wir stellen uns die Aufgabe, ein Integral v erster Gattung zu bilden[1]), d. h. ein Integral, das in T allenthalben endlich ist. Damit v in den n Punkten $(x = \infty,\ y = \infty)$, den ω einfachen Verzweigungspunkten und den r Doppelpunkten endlich sei, muss die zugehörige rationale Function $\frac{dv}{dx}$ in diesen Punkten ein bestimmtes Verhalten zeigen, das sich aus den für v in der Umgebung dieser Punkte gültigen Entwicklungen ergibt. Es genügt, von denselben die ersten Glieder anzuschreiben.

In der Umgebung eines der n Punkte $(x = \infty,\ y = \infty)$ ist:

$$v = H_0 + H_1 x^{-1} + \cdots, \qquad \text{also } \frac{dv}{dx} = -H_1 x^{-2} + \cdots.$$

In der Umgebung eines Verzweigungspunktes $(x = \gamma,\ y = y_\gamma)$ ist:

$$v = M_0 + M_1 (x - \gamma)^{\frac{1}{2}} + \cdots, \qquad \text{also } \frac{dv}{dx} = \frac{1}{2} M_1 (x - \gamma)^{-\frac{1}{2}} + \cdots.$$

In der Umgebung eines Doppelpunktes $(x = \delta,\ y = y_\delta)$ ist für je einen Zweig:

$$v = N_0 + N_1 (x - \delta) + \cdots, \qquad \text{also } \frac{dv}{dx} = N_1 + \cdots.$$

Hieraus folgt: die rationale Function $\frac{dv}{dx}$ muss

$= 0^2$ sein in jedem der n Punkte $(x = \infty,\ y = \infty)$;
$= \infty^1$ sein in jedem Verzweigungspunkt und
endlich bleiben in allen übrigen Punkten von T.

Diesen Bedingungen wird nach früheren Betrachtungen (§ 13) in allgemeinster Weise genügt, wenn man $\frac{dv}{dx} = \varphi : F'(y)$, d. h. gleich einem Quotienten setzt, dessen Nenner $F'(y)$ und dessen Zähler eine allgemeine, adjungirte Function φ des $n - 3^{\text{ten}}$ Grades von $F = 0$ ist. Daher hat man den Satz:

---

1) Riemann, Ges. W. S. 98 u. 110.

(I) Das allgemeine Integral 1. Gattung v ist von der Form

$$v = \int_{\xi, \eta}^{x, y} \frac{\varphi}{F'y}\, dx. \tag{1}$$

Das Integral (1) hat nur $2p$ Periodicitätsmoduln, entsprechend den $2p$ Querschnitten a_i und b_i der Fläche T. Bezeichnet man dieselben an a_i mit A_i, an b_i mit B_i und ist v der Werth, den das Integral (1) auf irgend einem Wege in T zwischen (ξ, η) und (x, y) annimmt, so erhält man den allgemeinsten Werth, den das Integral durch Veränderung des Weges annehmen kann, indem man zu v den Ausdruck addirt

$$P = \Sigma m_i A_i + \Sigma n_i B_i \qquad (i = 1, .., p), \tag{2}$$

wo m_i und n_i ganze Zahlen sind, die angeben, wie oft bei Veränderung des Weges der Querschnitt a_i resp. b_i von der $+$ zur $-$ Seite überschritten wird. Der Ausdruck (2) ist der allgemeine Periodicitätsmodul des Integrals (1).

Es folgt auch hier:

(Ia) Der Werth von v, erstreckt über eine beliebige, geschlossene Curve in T, lässt sich ganzzahlig und linear durch die $2p$ Periodicitätsmoduln A_i und B_i ausdrücken in der Form (2),

und weiter:

(Ib) Wählt man statt des kanonischen Querschnittsystems (a_i, b_i) ein anderes System, so drücken sich die zu dem letzteren gehörigen $2p$ Periodicitätsmoduln von v linear und ganzzahlig durch die ursprünglichen Moduln A_i und B_i aus.

Um einen zweiten, wichtigen Satz zu beweisen, schicken wir einen Hilfssatz aus der allgemeinen Functionentheorie voraus.

Der Satz von Green lautet bekanntlich[1]):

Ist $z = x + iy$ eine complexe Variable und Z ein zusammenhängendes Flächenstück, das aus einem oder mehreren Blättern besteht und von einer oder mehreren geschlossenen Curven begrenzt ist, sind ferner X und Y sowie $\frac{\partial X}{\partial y}$ und $\frac{\partial Y}{\partial x}$ in Z eindeutige und stetige Functionen der reellen Variabeln x und y, so ist

1) Vgl. etwa Durège, Elemente der Theorie der Functionen. 4. A. S. 89.

$$\text{(a)} \qquad \int\!\!\int\left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right) dx\, dy = \int (X\, dx + Y\, dy),$$

wenn das Doppelintegral der linken Seite über die ganze Fläche Z, das einfache Integral der rechten Seite über alle Grenzcurven von Z ausgedehnt wird in positiver Richtung.

Positiv heisst eine Richtung der Grenzlinie von Z, wenn beim Durchlaufen derselben die Fläche Z zur Linken liegt, wobei vorausgesetzt ist, dass beim Durchlaufen der reellen Axe des Coordinatensystems in positiver Richtung die imaginäre Axe ebenfalls zur Linken liegt.

Die Gleichung (a) bleibt auch dann noch richtig, wenn $\frac{\partial Y}{\partial x}$ und $\frac{\partial X}{\partial y}$ in einzelnen Punkten der Fläche Z unstetig werden, wenn nur an diesen Stellen Y und X keine Unterbrechung der Stetigkeit erleiden.

Ist nämlich in einem Punkte $(x = \alpha,\ y = \beta)$ des Gebietes Z die Function $Y = Y(x, y)$ stetig, $\frac{\partial Y}{\partial x}$ aber unstetig und schliesst man den Punkt (α, β) in ein kleines Rechteck ein, begrenzt von den Seiten $x = x_0$ und $x = x_1$ parallel der y-Axe, und von $y = y_0$ und $y = y_1$ parallel der x-Axe, so ist leicht zu sehen, dass der für dies Rechteck gebildete, von Y abhängige Theil des Flächenintegrals in (a) gegen Null convergirt, wenn man das Rechteck unendlich klein werden lässt. Denn führt man zuerst die Integration nach x aus, so erhält man bereits

$$\lim_{x_0 = x_1} \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial Y}{\partial x}\, dx = \lim_{x_0 = x_1} [Y(x_1, y) - Y(x_0, y)] = 0,$$

weil $Y(x, y)$ für $(x = \alpha,\ y = \beta)$ stetig ist.

Entsprechendes gilt für den von X abhängigen Theil des Flächenintegrals in (a), wenn in einem Punkte von Z die Function X stetig, aber $\frac{\partial X}{\partial y}$ unstetig wird.

Aus dem Green'schen Satze folgt unmittelbar der in Rede stehende Hilfssatz:

(A) Ist Z definirt wie vorher, sind W und $\frac{\partial W}{\partial z}$ im Inneren von Z eindeutige und stetige Functionen der complexen Variabeln $z = x + iy$ und setzt man $W = U + iV$, so hat das Integral $\int U\, dV$, genommen in positiver Richtung über

die Grenzlinien von Z, stets einen positiven, von 0 verschiedenen Werth.

In der That: mit W und $\frac{dW}{dz}$ sind zugleich U und V sammt ihren ersten und höheren partiellen Ableitungen nach x und y in Z eindeutige und stetige Functionen von x und y; ausserdem gelten die Gleichungen

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y}, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{\partial V}{\partial x}. \tag{b}$$

Setzt man nun $Y = U\frac{\partial U}{\partial x}$, $X = -U\frac{\partial U}{\partial y}$, so sind für diese Functionen innerhalb Z die Bedingungen des Green'schen Satzes erfüllt; daher folgt aus (a) mit Rücksicht auf (b)

$$\left.\begin{aligned}\int\!\!\int\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2\right] dx\, dy &= \int U\left(-\frac{\partial U}{\partial y}\, dx + \frac{\partial U}{\partial x}\, dy\right)\\ = \int U\left(\frac{\partial V}{\partial x}\, dx + \frac{\partial V}{\partial y}\, dy\right) &= \int U\, dV,\end{aligned}\right\} \tag{c}$$

wo das Doppelintegral und die einfachen Integrale in demselben Sinne zu nehmen sind, wie oben. Da nun das zu Anfang stehende Flächenintegral positiv und von 0 verschieden ist, so gilt der obige Satz (A). Schreibt man das Doppelintegral in (c)

$$\int\!\!\int\left(\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial y} - \frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial x}\right) dx\, dy = \int\!\!\int dU\, dV, \tag{d}$$

so sieht man, dass dasselbe den Inhalt des Flächenstückes ausdrückt, welches die Gesammtheit der Werthe, die W innerhalb Z annimmt, in der W-Ebene oder in einer die W-Ebene mehrfach bedeckenden Fläche repräsentirt.

Man kann die Voraussetzungen des Satzes (A) zum Theil fallen lassen.

Die Gleichungen (c) und (d) behalten nämlich nach der obigen Bemerkung über Y und X ihre Gültigkeit, wenn die zweiten Ableitungen von U und V nach x und y in einzelnen Punkten der Fläche Z unstetig werden, wenn nur an diesen Stellen U und V und ihre ersten Ableitungen nach x und y keine Unterbrechung der Stetigkeit erleiden. Die Gleichungen (c) und (d) bleiben aber auch dann noch richtig, wenn die ersten Ableitungen von U und V nach x und y in gewissen Punkten von Z und in gewisser Weise unstetig werden. Sei z. B. die Fläche Z zweiblättrig und besitze einen einfachen Verzweigungspunkt $z = \gamma$ (oder $x + iy = \alpha + i\beta$), in dem $W = 0^1$ also $= 0$ wie $(z-\gamma)^{+\frac{1}{2}}$ sei. Dann sind $\frac{\partial U}{\partial x}$ und $\frac{\partial U}{\partial y}$ in $(x = \alpha,\ y = \beta)$

unstetig, das Flächenintegral in (c) aber bleibt endlich und die Gleichung (c) gültig.

Zum Beweise ziehe man um den Punkt $z = \gamma$ einen kleinen, die beiden in γ zusammenhängenden Blätter durchlaufenden Kreis K vom Radius r und berechne den Antheil des Flächenintegrals in (c) für die von K eingeschlossene, zweiblättrige Kreisfläche für sich. In der Umgebung des Punktes $z = \gamma$ mögen, wenn der conjugirt complexe Werth einer Grösse P mit P' bezeichnet wird, die Entwicklungen gelten:

$$W = U + iV = 2C(z-\gamma)^{+\frac{1}{2}} + C_0(z-\gamma) + C_1(z-\gamma)^{+\frac{3}{2}} + \cdots,$$

$$W' = U - iV = 2C'(z'-\gamma')^{+\frac{1}{2}} + C_0'(z'-\gamma') + C_1'(z'-\gamma')^{+\frac{3}{2}} + \cdots.$$

Nun ist die Function unter dem Integralzeichen in (c) wegen (b)

$$\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 = \frac{\partial(U+iV)}{\partial x} \cdot \frac{\partial(U-iV)}{\partial x} = \frac{dW}{dz}\frac{dW'}{dz'}$$

$$= CC'(z-\gamma)^{-\frac{1}{2}}(z'-\gamma')^{-\frac{1}{2}} + \cdots = CC'\left[(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2\right]^{-\frac{1}{2}} + \cdots.$$

Setzt man $x - \alpha = r\cos\varphi$; $y - \beta = r\sin\varphi$ und führt die Polarcoordinaten r, φ ein, so liefert das erste Glied dieser Entwicklung zu dem Flächenintegral in (c) für das Innere des Kreises K den Beitrag

$$CC'\int\int\left[(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2\right]^{-\frac{1}{2}}dx\,dy = CC'\int\int dr\,d\varphi = CC'\,4\pi r.$$

Dieser Beitrag aber verschwindet, wenn r gegen 0 convergirt. Dasselbe gilt in erhöhtem Maasse für die folgenden Glieder der Entwicklung in der Umgebung von $z = \gamma$.

Hiermit ist die Behauptung erwiesen und die angegebene Erweiterung der Voraussetzungen des Satzes (A) gerechtfertigt.

Der Satz (A) dient nun zum Beweise des folgenden Satzes, der sich auf die reellen und imaginären Bestandtheile der Periodicitätsmoduln des Integrals 1. Gattung v bezieht.

(II) Ist $v = v_1 + iv_2$ ein beliebiges Integral 1. Gattung mit den Periodicitätsmoduln $A_i = A_i' + iA_i''$ an dem Querschnitt a_i und $B_i = B_i' + iB_i''$ an dem Querschnitt b_i, so ist der Ausdruck

$$\sum_{i=1}^{p}(A_i'B_i'' - B_i'A_i'') \tag{3}$$

stets positiv und nur $= 0$, wenn v eine Constante ist[1].

---

1) Riemann, Ges. W. S. 125.

Wendet man nämlich den Hilfssatz (A) auf das Integral v und die von den Querschnitten a_i, b_i begrenzte Fläche T' an, was gestattet ist, weil v in T' den Bedingungen des Satzes (A) in der erweiterten Fassung genügt, so folgt, dass $\int v_1\, dv_2$, genommen in positiver Richtung über die Begrenzung von T', d. h. über das System der $2p$ Querschnitte a_i, b_i, positiv ist. Nach den in (II) angegebenen Werthen ist nun für die Periodicitätsmoduln $v^+ - v^-$ des Integrals $v = v_1 + iv_2$

$$\left.\begin{aligned} &\text{an } a_i: \; v_1{}^+ - v_1{}^- = A_i' \qquad v_2{}^+ - v_2{}^- = A_i'', \\ &\text{an } b_i: \; v_1{}^+ - v_1{}^- = B_i' \qquad v_2{}^+ - v_2{}^- = B_i''. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Hiernach ist das Integral $\int v_1\, dv_2$, genommen im Sinne der Pfeile (Figur 8 S. 104) über die beiden Ränder des Querschnitts a_i,

$$= \int (v_1{}^+ - v_1{}^-)\, dv_2 = \int A_i'\, dv_2;$$

das letzte Integral ist nur noch längs dem $+$ Rande von a_i zu nehmen, hat also nach (4) den Werth $A_i' B_i''$.

Ferner ist das Integral $\int v_1\, dv_2$, genommen im Sinne der Pfeile über die beiden Ränder des Querschnitts b_i,

$$= \int (v_1{}^+ - v_1{}^-)\, dv_2 = \int B_i'\, dv_2;$$

das letzte Integral ist nur noch längs dem $+$ Rande von b_i zu nehmen, hat also nach (4) den Werth $- B_i' A_i''$.

Das Integral $\int v_1\, dv_2$, genommen im Sinne der Pfeile über sämmtliche Ränder des Querschnittsystems a_i, b_i, ist also gleich $\sum_{i=1}^{p} (A_i' B_i'' - B_i' A_i'')$ und dieser Ausdruck ist folglich positiv. (q. e. d.)

Aus (II) erhält man unmittelbar die Zusätze:

(IIa) Ein Integral 1. Gattung, dessen Periodicitätsmoduln an p unter den $2p$ Querschnitten a_i und b_i sämmtlich $= 0$ sind, ist nothwendig eine Constante.

(IIb) Ein Integral 1. Gattung, dessen Periodicitätsmoduln an den $2p$ Querschnitten a_i und b_i entweder sämmtlich reell oder sämmtlich rein imaginär sind, ist nothwendig eine Constante.

Wir schliessen noch folgende Bemerkung an. Der Ausdruck (3) stellt nach Hilfssatz (A) den Inhalt der Fläche S dar, die man erhält, wenn man die von den Querschnitten a_i und b_i begrenzte Fläche

T' mittels des Integrals v conform abbildet. Die Fläche S besteht aus p krummlinig begrenzten Parallelogrammen in p übereinander liegenden Blättern. Die vier Seiten eines solchen Parallelogrammes entsprechen den vier Rändern je eines der p Querschnittpaare a_i, b_i $(i = 1, .., p)$. Die Fläche S besitzt $2p - 2$ einfache Verzweigungspunkte und $p - 1$ Verzweigungsschnitte, längs deren die p Blätter der Parallelogramme in einander übergehen[1]).

Weitere Sätze beziehen sich auf Systeme von p Integralen 1. Gattung. Der Ausdruck (1) stellt das allgemeinste Integral 1. Gattung dar. Da es nach (II § 10) stets p und nur p linear unabhängige φ Functionen $\varphi_1, \varphi_2, .., \varphi_p$ gibt, so hat man den Satz:

(III) Es gibt ein ganzes System von p Integralen 1. Gattung

$$v_1 = \int \frac{\varphi_1 dx}{F'(y)}, \ldots, v_p = \int \frac{\varphi_p dx}{F'(y)}, \tag{5}$$

die linear unabhängig sind, d. h. zwischen denen keine lineare Gleichung der Form $c_1 v_1 + \cdots + c_p v_p + c_0 = 0$ mit constanten Coefficienten c_i besteht. Aus ihnen setzt sich jedes weitere Integral 1. Gattung v linear und mit constanten Coefficienten zusammen in der Form

$$v = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_p v_p + \lambda_0. \tag{6}$$

Wir denken uns die Integrale (5) genommen zwischen denselben Punkten (ξ, η) und (x, y) und betrachtet als Functionen der oberen Grenzen (x, y). Auch weiterhin sind die Grenzen der Integrale hinzuzudenken. Um das System der p Integrale (5) näher zu untersuchen, seien die Periodicitätsmoduln derselben an den Querschnitten a_i und b_i dargestellt durch das Schema:

(7)

	a_1	a_2	..	a_p	b_1	b_2	..	b_p
v_1	A_{11}	A_{21}	..	A_{p1}	B_{11}	B_{21}	..	B_{p1}
v_2	A_{12}	A_{22}	..	A_{p2}	B_{12}	B_{22}	..	B_{p2}
:	.	.	.	.	.	.	.	.
v_p	A_{1p}	A_{2p}	..	A_{pp}	B_{1p}	B_{2p}	..	B_{pp}.

Dasselbe sagt aus, dass die Integrale $v_1, .., v_p$ bei einer für alle gleichen Aenderung des Integrationsweges sich gleichzeitig bezüglich um Ausdrücke der Form $(i = 1, .., p)$:

---

1) Riemann, Ges. W. S. 113 f.

$$\sum_i m_i A_{i1} + \sum_i n_i B_{i1}, \ldots, \sum_i m_i A_{ip} + \sum_i n_i B_{ip} \tag{8}$$

ändern, in welchen m_i und n_i dieselben ganzen Zahlen sind.

Die Ausdrücke (8) bilden ein System von zusammengehörigen oder simultanen Periodicitätsmoduln der p Integrale v_i.

Für die Determinanten, gebildet aus den Periodicitätsmoduln (7), gilt der Satz[1]):

(IV) Sind p Integrale erster Gattung $v_1, \ldots, v_p$ linear unabhängig, so ist jede aus p unter den $2p$ Verticalreihen von Periodicitätsmoduln in (7) gebildete Determinante verschieden von 0.

Denn angenommen, es sei eine dieser Determinanten in (7), etwa die erste

$$A = \sum \pm A_{11} A_{22} \cdots A_{pp}$$

gleich 0, so könnte man p von 0 verschiedene (complexe) Constanten $M_1, \ldots, M_p$ bestimmen derart, dass

$$M_1 A_{i1} + \cdots + M_p A_{ip} = 0 \qquad (i = 1, \ldots, p)$$

wäre; in diesem Falle hätte man in

$$v = M_1 v_1 + \cdots + M_p v_p$$

ein Integral 1. Gattung, dessen Periodicitätsmoduln an den p ersten Querschnitten $a_1, \ldots, a_p$ sämmtlich 0 wären, das also nach (IIa) gleich einer Constanten wäre. Zwischen den p Integralen v_i bestünde demnach eine lineare Gleichung mit constanten Coefficienten, was gegen die Voraussetzung ist. Nur wenn die sämmtlichen p^2 Unterdeterminanten von A verschwänden, wäre die Bestimmung der M_i aus den obigen Gleichungen unmöglich. In diesem Falle[2]) könnte man aus dem Verschwinden je einer dieser Unterdeterminanten dieselben Schlüsse ziehen, wie aus dem Verschwinden von A, nämlich entweder, dass die v_i linear abhängig wären, oder dass die zweiten Unterdeterminanten von A sämmtlich verschwänden u. s. f. Da nun die Integrale v_i nach Voraussetzung linear unabhängig sind, so würde aus dem Verschwinden von A schliesslich folgen, dass sämmtliche Elemente $A_{ik} = 0$ wären; es müssten dann nach (IIa) die Integrale v_i sämmt-

---

1) Riemann, Ges. W. S. 98.

2) C. Neumann, Vorlesungen über Riemann's Theorie der Abel'schen Integrale. 2. A. S. 244 (1884).

lich Constanten sein, was selbstverständlich ausgeschlossen. (q. e. d.) Umgekehrt gilt der Satz:

(V) Sind $v_1, .., v_p$ in (7) p beliebige Integrale 1. Gattung und verschwindet keine der aus p unter den $2p$ Verticalreihen von Periodicitätsmoduln in (7) gebildeten Determinanten, so sind die p Integrale $v_1, .., v_p$ linear unabhängig.

Angenommen, es sei $c_1 v_1 + \cdot\cdot + c_p v_p + c_0 = 0$, so würde man, indem man für die linke Seite dieser Gleichung als Function von (x, y) die Periodicitätsmoduln an den $2p$ Querschnitten a_i und b_i bildet, die $2p$ Gleichungen erhalten $(i = 1, .., p)$:

$$c_1 A_{i1} + \cdot\cdot + c_p A_{ip} = 0, \quad c_1 B_{i1} + \cdot\cdot + c_p B_{ip} = 0,$$

d. h. es würden die sämmtlichen in (V) genannten Determinanten verschwinden, was gegen die Voraussetzung ist. (q. e. d.)

In ähnlicher Weise leitet man einen Satz her, der sich auf die reellen und imaginären Bestandtheile der Periodicitätsmoduln in (7) bezieht; setzt man $A_{ik} = A'_{ik} + iA''_{ik}$ und $B_{ik} = B'_{ik} + iB''_{ik}$, so lautet dieser Satz:

(VI) Sind die p Integrale $v_1, .., v_p$ linear unabhängig, so ist die aus den $4p^2$ reellen und imaginären Bestandtheilen der $2p^2$ Periodicitätsmoduln in (7) gebildete Determinante, die abgekürzt durch

$$\left|\begin{array}{c|c} A'_{ik} & A''_{ik} \\ \hline B'_{ik} & B''_{ik} \end{array}\right| \tag{9}$$

bezeichnet sei, von 0 verschieden.

Denn angenommen, die Determinante (9) verschwände, so könnte man $2p$ reelle Constanten $M_1', .., M_p'; M_1'', .., M_p''$ bestimmen, derart, dass

$$M'_1 A'_{i1} + \cdot\cdot + M'_p A'_{ip} - M''_1 A''_{i1} - \cdot\cdot - M''_p A''_{ip} = 0,$$
$$M'_1 B'_{i1} + \cdot\cdot + M'_p B'_{ip} - M''_1 B''_{i1} - \cdot\cdot - M''_p B''_{ip} = 0$$

wäre. Man hätte alsdann, wenn $M'_k + iM''_k = M_k$ gesetzt wird, in

$$v = M_1 v_1 + \cdot\cdot + M_p v_p$$

ein Integral 1. Gattung, für welches die reellen Bestandtheile der Periodicitätsmoduln an den $2p$ Querschnitten a_i und b_i sämmtlich 0 wären, das also nach (IIa) oder (IIb) gleich einer Constanten sein müsste. Die p Integrale v_i wären also nicht linear unabhängig, was der Voraussetzung widerspricht. Nur wenn die ersten Unterdeter-

minanten von (9) sämmtlich verschwänden, wäre die Bestimmung der M', M'' aus den obigen Gleichungen unmöglich; dann aber würde dieselbe Schlussweise wie beim Beweis des Satzes (IV) dahin führen, dass die Integrale v_i sämmtlich Constante sein müssten. Umgekehrt gilt der Satz:

(VII) Ist die Determinante (9) von 0 verschieden, so sind die p Integrale $v_1, .., v_p$ linear unabhängig.

Denn angenommen, es sei $c_1 v_1 + \cdots + c_p v_p + c_0 = 0$, so würde man, indem man für die Function von (x, y) auf der linken Seite dieser Gleichung die reellen und imaginären Bestandtheile der Periodicitätsmoduln an den $2p$ Querschnitten a_i und b_i bildet, $2p$ Gleichungen erhalten, die das Verschwinden der Determinante (9) nach sich zögen, was der Voraussetzung widerspricht.

Aus den vorstehenden Sätzen ergeben sich wichtige Folgerungen; zunächst aus (IV) der Satz:

(VIII) Ein Integral 1. Gattung v ist (bis auf eine additive Constante) vollständig bestimmt, wenn seine Periodicitätsmoduln an irgend p unter den $2p$ Querschnitten a_i und b_i willkürlich gegeben sind; nur dürfen dieselben nicht sämmtlich $= 0$ sein.

Besitzt nämlich v etwa an den p ersten Querschnitten $a_1, .., a_p$ die vorgegebenen Periodicitätsmoduln $A_1, .., A_p$ und versteht man unter $v_1, .., v_p$ p linear unabhängige Integrale 1. Gattung mit den Periodicitätsmoduln (7), so kann man v in die Form (6) setzen und hat dann zur Bestimmung der p Coefficienten $\lambda_1, .., \lambda_p$ die p Gleichungen $(i = 1, .., p)$:

$$\lambda_1 A_{i1} + \cdots + \lambda_p A_{ip} = A_i,$$

aus welchen sich, da die Determinante A nicht verschwindet, bestimmte Werthe für die p λ_i ergeben. Damit ist v bis auf die additive Constante λ_0 vollkommen bestimmt.

Ebenso ergibt sich aus (VI) der Satz:

(IX) Ein Integral 1. Gattung v ist (bis auf eine additive Constante) vollständig bestimmt, wenn die $2p$ reellen (oder aber die $2p$ imaginären) Bestandtheile seiner Periodicitätsmoduln an den sämmtlichen $2p$ Querschnitten a_i und b_i beliebig gegeben sind; nur dürfen diese $2p$ Bestandtheile nicht sämmtlich $= 0$ sein.

Die Sätze VIII und IX geben je ein System von unabhängigen und hinreichenden Stücken zur Bestimmung eines

Integrals 1. Gattung an[1]). Sie zeigen ferner, dass die Periodicitätsmoduln eines einzelnen Integrals 1. Gattung nicht unabhängig von einander sind; durch die eine Hälfte der Periodicitätsmoduln ist die andere Hälfte oder durch die reellen Theile der Periodicitätsmoduln sind die imaginären Theile bereits mitbestimmt.

Wir erwähnen hier noch einen Satz, der aussagt, dass auch zwischen den Periodicitätsmoduln von je zwei Integralen 1. Gattung eine Beziehung besteht[2]); nämlich:

(X) Zwischen den Periodicitätsmoduln zweier Integrale 1. Gattung v_k und v_l besteht die Gleichung

$$\sum_{i=1}^{p}(A_{ik}B_{il} - A_{il}B_{ik}) = 0; \tag{9a}$$

zwischen den $2p^2$ Perioditätsmoduln (7) der p linear unabhängigen Integrale $v_1, .., v_p$ bestehen daher $\frac{1}{2}p(p-1$ solcher Relationen.

Wir benutzen bereits im Folgenden diesen Satz, wenn auch sein Beweis erst in § 19 gegeben wird.

Man kann aus einem System von p linear unabhängigen Integralen 1. Gattung $v_1, .., v_p$ ein zweites solches System $u_1, .., u_p$ ableiten. Zur Bestimmung der Integrale u_i können die p^2 Periodicitätsmoduln, welche diese Integrale an p von den $2p$ Querschnitten a_i und b_i besitzen, beliebig vorgegeben sein, nur mit der Bedingung, dass die Determinante dieser p^2 Moduln nicht verschwindet. Die noch fehlenden Periodicitätsmoduln an den p übrigen Querschnitten sind alsdann eindeutig bestimmt.

Dies gibt Anlass zur Einführung eines gewissen Normalsystems von p linear unabhängigen Integralen 1. Gattung[3]). Wir bezeichnen dieselben in der Folge stets mit $u_1, .., u_p$ und setzen:

$$u_1 = \int \frac{f_1\, dx}{F'y}, \; .., \; u_p = \int \frac{f_p\, dx}{F'y}, \tag{10}$$

wo $f_1, .., f_p$ p noch näher zu bestimmende, linear unabhängige, adjungirte Functionen vom $n - 3^{\text{ten}}$ Grade sind.

1) Bei Riemann, (Ges. W. S. 98) erscheinen diese Sätze wieder als eine Folge aus dem Dirichlet'schen Princip.

2) Riemann, Ges. W. S. 124.

3) Riemann, Ges. W. S. 122.

(XI) Die p linear unabhängigen Normalintegrale 1. Gattung $u_1, \ldots, u_p$ seien dadurch charakterisirt, dass ihre Periodicitätsmoduln an den p Querschnitten a_i eine Determinante bilden, deren Diagonalglieder sämmtlich $=\pi i$, während die übrigen Elemente $= 0$ sind. Die Periodicitätsmoduln der Integrale $u_1, \ldots, u_p$ an den Querschnitten a_i und b_i seien also dargestellt durch das Schema:

$$\left.\begin{array}{c|cccc|cccc} & a_1 & a_2 & \ldots & a_p & b_1 & b_2 & \ldots & b_p \\ \hline u_1 & \pi i & 0 & \ldots & 0 & a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{p1} \\ u_2 & 0 & \pi i & \ldots & 0 & a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{p2} \\ \vdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ u_p & 0 & 0 & \ldots & \pi i & a_{1p} & a_{2p} & \ldots & a_{pp} \end{array}\right\} \tag{11}$$

Nimmt man die p linear unabhängigen Functionen $\varphi_1, \ldots, \varphi_p$ oder Integrale $v_1, \ldots, v_p$ (5) als gegeben an, so hat man zur Bestimmung der p Functionen $f_1, \ldots, f_p$ oder der p Integrale $u_1, \ldots, u_p$ (10) Gleichungen anzusetzen von der Form ($k = 1, \ldots, p$):

$$\left.\begin{aligned} f_k &= M_{k1}\varphi_1 + \cdots + M_{kp}\varphi_p \\ u_k &= M_{k1}\, v_1 + \cdots + M_{kp}\, v_p. \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Man sieht aber sofort durch Vergleichung von (11) mit (7), dass die Integrale v_i mit den Integralen u_k durch die p Gleichungen verbunden sind

$$\left.\begin{aligned} \pi i\, v_1 &= A_{11}\, u_1 + A_{21}\, u_2 + \cdots + A_{p1}\, u_p \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \pi i\, v_p &= A_{1p}\, u_1 + A_{2p}\, u_2 + \cdots + A_{pp} u_p. \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Die Auflösung derselben nach den Grössen $u_1, \ldots, u_p$, die stets möglich ist, da die Determinante

$$A = \Sigma \pm A_{11} A_{22}, \ldots, A_{pp} \tag{14}$$

nicht verschwindet, gibt die Gleichungen (12) oder die Coefficienten M_{ik} in denselben. Zugleich folgt, dass auch die p Normalintegrale u_k linear unabhängig sind. Denn bestünde zwischen ihnen eine lineare Gleichung mit constanten Coefficienten $c_1 u_1 + \cdots + c_p u_p + c_0 = 0$, so würde aus (12) eine ebensolche Gleichung zwischen den p Integralen v_i folgen, was der Voraussetzung widerspricht.

Die zweite Hälfte der Periodicitätsmoduln der Integrale u_k, also das System der Grössen a_{ik} in (11), ergibt sich aus (13), indem man $u_1, \ldots, u_p$ durch $a_{\mu 1}, \ldots, a_{\mu p}$ und gleichzeitig $v_1, \ldots, v_p$ durch die entsprechenden Werthe $B_{\mu 1}, \ldots, B_{\mu p}$ ersetzt; man erhält so die Gleichungen ($\mu = 1, \ldots, p$):

$$(15)\quad \begin{cases} \pi i\, B_{\mu 1} = A_{11}\, a_{\mu 1} + A_{21}\, a_{\mu 2} + \cdots + A_{p1}\, a_{\mu p} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \pi i\, B_{\mu p} = A_{1p}\, a_{\mu 1} + A_{2p}\, a_{\mu 2} + \cdots + A_{pp}\, a_{\mu p}. \end{cases}$$

Für das System der p Normalintegrale $u_1, \ldots, u_p$ (10) hat man nun nach dem Früheren die folgenden Sätze. Aus (8) folgt:

(XII) Ein System von zusammengehörigen Periodicitätsmoduln der p Normalintegrale u_i wird gebildet von den Ausdrücken

$$(16)\qquad m_1\,\pi i + \sum_{i=1}^{p} n_i\, a_{i1}, \ldots, m_p\,\pi i + \sum_{i=1}^{p} n_i\, a_{ip},$$

wo die m_i und n_i ganze Zahlen und die n_i in diesen p Ausdrücken *dieselben* Zahlen sind.

Aus (X) folgt für die zweite Hälfte der Periodicitätsmoduln der Normalintegrale u_i an den Querschnitten b_k oder für die Elemente a_{ki} der zweiten Determinante (11):

(XIII) Zwischen den p^2 Moduln a_{ki} bestehen $\frac{1}{2}p(p-1)$ Gleichungen[1]), nämlich:

$$(17)\qquad a_{ki} = a_{ik},$$

welche aussagen, dass die Determinante der a_{ik} in (11) symmetrisch ist,

oder dass der Periodicitätsmodul von u_i am Querschnitt b_k gleich dem Periodicitätsmodul von u_k an b_i ist.

Aus (VI) folgt, wenn man $a_{ik} = a'_{ik} + i a''_{ik}$ setzt:

(XIV) Die Determinante, gebildet aus den reellen Theilen der Periodicitätsmoduln a_{ik}, also

$$(18)\qquad \sum \pm\, a'_{11}\, a'_{22} \ldots a'_{pp},$$

ist stets von 0 verschieden.

Endlich besteht für die Periodicitätsmoduln von p linear unabhängigen Integralen 1. Gattung noch ein Satz, den wir nur für die Normalintegrale $u_1, \ldots, u_p$ so, wie er später benutzt wird, aussprechen:

(XV) Ist a_{ik} der Periodicitätsmodul des Normalintegrals u_k

---

1) Es zeigt sich später (Schluss von § 33), dass von den Moduln a_{ik} nur $3p-3$ unabhängig sind, dass also zwischen ihnen noch $\frac{1}{2}(p-2)(p-3)$ weitere Relationen bestehen müssen; diese sind transcendenter Natur.

an dem Querschnitt b_i und sind $r_1, \ldots, r_p$ reelle Zahlen, so ist stets der reelle Theil von $\sum_{ik} a_{ik} r_i r_k$ $(i, k = 1, \ldots, p)$,

$$\sum_{ik} a'_{ik} r_i r_k \quad \text{negativ}[1]. \tag{19}$$

Bildet man nämlich aus den Integralen u_i das Integral 1. Gattung

$$u = r_1 u_1 + \cdots + r_p u_p$$

mit den reellen Coefficienten r_i und bezeichnet die Periodicitätsmoduln desselben an den Querschnitten a_i und b_i durch $A_i = A_i' + iA_i''$ und $B_i = B_i' + iB_i''$, so ist nach (11)

$$A_i = r_i \pi i \qquad \text{also} \quad A_i' = 0 \qquad A_i'' = r_i \pi$$

$$B_i = \sum_k r_k a_{ik} \qquad \text{,,} \quad B_i' = \sum_k r_k a'_{ik} \quad B_i'' = \sum_k r_k a''_{ik}.$$

Hieraus folgt nach Satz (II), dass

$$\sum_i (A_i' B_i'' - B_i' A_i'') = -\pi \sum_{ik} a'_{ik} r_i r_k \qquad \text{positiv ist. (q. e. d.)}$$

Das durch den Satz (XI) definirte System von p Normalintegralen u_i ist offenbar nicht das einzige System dieser Art; man erhält vielmehr eine endliche Anzahl solcher Systeme, indem man die erste Determinante der Periodicitätsmoduln in (11) nicht den Querschnitten a_i, sondern beliebigen p unter den $2p$ Querschnitten a_i und b_i zuordnet. Es gibt aber nicht nur eine endliche Anzahl, sondern unendlich viele Systeme von Normalintegralen 1. Gattung oder Systeme von Periodicitätsmoduln a_{ik}. Man kann nämlich, wie schon in § 2 S. 31 erwähnt wurde, das anfangs gewählte, kanonische Querschnittsystem a_i, b_i von T durch unendlich viele andere, gleichwerthige kanonische Querschnittsysteme ersetzen; zu jedem derselben gehört ein neues System von Normalintegralen 1. Gattung, die sich linear durch die ursprünglichen Normalintegrale u_i ausdrücken und ein neues System von Periodicitätsmoduln, die sich linear durch die ursprünglichen Periodicitätsmoduln πi und a_{ik} ausdrücken. Wie aber auch das kanonische Querschnittsystem a_i, b_i und die zugehörigen Normalintegrale u_i gewählt seien, stets gelten für das zugehörige Modulsystem a_{ik} die in den Sätzen (XII) bis (XV) ausgesprochenen Eigenschaften. Wir kommen auf die unendlich vielen Systeme von

---

1) Riemann, Ges. W. S. 125.

Normalintegralen u_i und die zugehörigen Systeme von Moduln a_{ik} zurück bei der linearen Transformation der Thetafunctionen (Abschnitt VIII).

§ 16. Das Integral 2. und 3. Gattung[1]).

Es sei nunmehr die Aufgabe:

A. Ein Abel'sches Integral W zu bilden, das in ϱ beliebig gegebenen Punkten $(x_1, y_1), \ldots, (x_\varrho, y_\varrho)$ logarithmisch ∞ wird bezüglich wie

$$A_1 \log(x - x_1), \ldots, A_\varrho \log(x - x_\varrho), \tag{1}$$

wobei nach (III) § 14 $\sum_i A_i = 0 \quad (i = 1, \ldots, \varrho)$ ist.

Die ϱ Punkte (x_i, y_i) seien einfache Punkte im Endlichen von T; für andere Annahmen (wenn einzelne der ϱ Punkte in Verzweigungspunkte oder ins Unendliche fallen) ist die Behandlung der Aufgabe nur wenig abzuändern.

Damit W den gestellten Forderungen genügt, muss die zugehörige rationale Function $\frac{dW}{dx}$ von (x, y) in den ϱ Punkten (x_i, y_i), in den n Punkten $(x = \infty, y = \infty)$, den Verzweigungspunkten und den Doppelpunkten ein bestimmtes Verhalten zeigen, das sich wieder aus der Entwicklung von W in der Umgebung dieser Punkte ergibt.

In der Umgebung eines der n Punkte $(x = \infty, y = \infty)$ ist:

$$W = H_0 + H_1 x^{-1} + \cdots, \quad \text{also} \quad \frac{dW}{dx} = -H_1 x^{-2} + \cdots.$$

In der Umgebung eines Verzweigungspunktes $(x = \gamma, y = y_\gamma)$ ist:

$$W = M_0 + M_1 (x - \gamma)^{\frac{1}{2}} + \cdots, \quad \text{also} \quad \frac{dW}{dx} = \frac{1}{2} M_1 (x - \gamma)^{-\frac{1}{2}} + \cdots.$$

In der Umgebung eines Doppelpunktes $(x = \delta, y = y_\delta)$ ist für jeden Zweig:

$$W = N_0 + N_1 (x - \delta) + \cdots, \quad \text{also} \quad \frac{dW}{dx} = N_1 + \cdots.$$

In der Umgebung des Punktes (x_i, y_i) ist:

$$W = A_i \log(x - x_i) + A_i^0 + A_i' (x - x_i) + \cdots, \quad \text{also}$$

$$\frac{dW}{dx} = A_i (x - x_i)^{-1} + A_i' + \cdots.$$

---

1) Riemann, Ges. W. S. 99 u. 110.

Hieraus folgt: Die rationale Function $\frac{dW}{dx}$ muss sein

$$\left.\begin{array}{l} = 0^2 \text{ in jedem der } n \text{ Punkte } (x = \infty,\ y = \infty), \\ = \infty^1 \text{ in jedem der } \omega = 2(n + p - 1) \text{ Verzweigungspunkte}, \\ = \infty^1 \text{ wie } A_i (x - x_i)^{-1} \text{ in dem Punkte } (x_i, y_i)\ (i = 1, .., \varrho), \end{array}\right\} \quad (2)$$

und sie muss endlich bleiben in allen übrigen Punkten von T.

Die Ordnung der Function $\frac{dW}{dx}$ ist hiernach $= \varrho + \omega = \varrho + 2(n + p - 1)$ und die Zahl der im Endlichen gelegenen 0^1 Punkte $= \varrho + 2p - 2$.

Um zunächst eine specielle Function herzustellen, welche die Eigenschaften (2) besitzt, füge man zu den ϱ Punkten (x_i, y_i) noch $p - 1$ willkürliche Punkte $(\xi_\lambda, \eta_\lambda)$ $(\lambda = 1, .., p - 1)$ hinzu und bilde aus zwei adjungirten Functionen M und N von gleichem Grade μ eine rationale Function $M : N$ von der Ordnung $m = \varrho + p - 1$, deren ∞^1 Punkte die $\varrho + p - 1$ Punkte (x_i, y_i) und $(\xi_\lambda, \eta_\lambda)$ sind, was nach (I § 12) stets möglich ist, wenn $\varrho + p - 1 > p$ oder $\varrho \overline{\geq} 2$ ist.

Der Zähler M hat dann noch $m - p + 1 = \varrho$ homogene, willkürliche Coefficienten. Sei ferner Φ_0 eine adjungirte Function des $n - 3^{\text{ten}}$ Grades und die $p - 1$ willkürlichen 0^1 Punkte derselben die oben gewählten $p - 1$ Punkte $(\xi_\lambda, \eta_\lambda)$. Dann genügt der Ausdruck

$$\frac{M \Phi_0}{N F'y} \quad (3)$$

den Bedingungen (2), wenn man die ϱ in M noch willkürlichen Coefficienten so bestimmt, dass (3) in den Punkten (x_i, y_i) sich verhält wie $A_i (x - x_i)^{-1}$, was bei allgemeiner Lage dieser Punkte stets möglich ist. Man hat hierzu die ϱ Gleichungen[1] $(i = 1, .., \varrho)$:

$$\left[\frac{M \Phi_0}{N'x\ F'y - N'y\ F'x}\right]_{x_i} = A_i. \quad (4)$$

Für diese Ausdrücke (4) ist wirklich

$$\sum A_i = 0, \quad (5)$$

denn die letztere Gleichung ist nichts anderes, als das Abel'sche Theorem für Differentiale 1. Gattung (§ 13 Gl. (11)), angewandt auf die ∞^1 Punkte und Residuen der Function $M : N$, wie leicht zu sehen.

---

1) Wir bezeichnen hier, wie im Folgenden, häufig einen Punkt mit den Coordinaten (x_i, y_i) kurz durch x_i; so soll der Index x_i in (4) andeuten, dass in dem Klammerausdruck die Coordinaten (x, y) durch (x_i, y_i) zu ersetzen sind.

Die Function (3) ist hierdurch völlig bestimmt; sie ist indess noch nicht die allgemeinste Function, welche den Bedingungen (2) genügt. Die Differenz aber zwischen der gesuchten, allgemeinen Function $\frac{dW}{dx}$ und dem Ausdruck (3) ist eine Function, die in jedem der n Punkte $(x = \infty,\ y = \infty) = 0^2$ und in jedem der ω Verzweigungspunkte $= \infty^1$ wird, während sie in den übrigen Punkten von T endlich bleibt. Die allgemeinste Function dieser Art ist nach (1) § 13 $\Phi : F'y$, wo Φ eine beliebige, adjungirte Function des $n - 3^{\text{ten}}$ Grades ist, die noch p lineare, homogene Coefficienten enthält. Man hat daher als allgemeinsten Ausdruck für die gesuchte Function:

$$\frac{dW}{dx} = \frac{M\Phi_0 + N\Phi}{NF'y}. \tag{6}$$

Geht man zur Integralfunction über und bezeichnet mit W_0 das Integral von (3), also

$$W_0 = \int \frac{M\Phi_0}{NF'y}\,dx, \tag{7}$$

so erhält man aus (6), wenn $u_1, \ldots, u_p$ die p linear unabhängigen Normalintegrale 1. Gattung mit denselben Grenzen, die W_0 hat, bedeuten,

$$W = W_0 + \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_p u_p + \alpha_0. \tag{7a}$$

Hiermit ist die Aufgabe (A) gelöst. Man kann die p Coefficienten α_i immer so bestimmen, dass die p Periodicitätsmoduln des Integrals (7a) an den p Querschnitten a_i beliebig gegebene Werthe annehmen; man kann ferner dem Integral W noch einen constanten Factor geben und denselben so bestimmen, dass eine der Grössen A_i (1) einen gegebenen Werth erhält.

Wegen der Bedingung $\varrho \geqq 2$ oder der Bedingung $\sum A_i = 0$ gibt es, wie schon früher erwähnt, kein Abel'sches Integral mit nur einem logarithmischen Unstetigkeitspunkt. Setzt man in (7a) $\varrho = 2$, so hat man das sog. Abel'sche Integral 3. Gattung mit den 2 logarithmischen Unstetigkeitspunkten (x_1, y_1) und (x_2, y_2) und mit der Bedingung $A_2 = -A_1$. Dividirt man noch durch $-A_1$ und bestimmt die p Coefficienten α_i so, dass die Periodicitätsmoduln des Integrals an den p Querschnitten a_i Null werden, so erhält man das sog. Normalintegral 3. Gattung w_{12}. Wir fassen dies so zusammen:

(I) Das Normalintegral w_{12} mit den 2 logarithmischen Unstetigkeitspunkten (x_1, y_1) und (x_2, y_2) ist dadurch definirt

1) dass es sich in (x_1, y_1) wie $-\log(x - x_1)$, in (x_2, y_2) wie $+\log(x - x_2)$ verhält,

2) dass die Periodicitätsmoduln an den p Querschnitten a_i sämmtlich 0 sind.

Die übrigen Periodicitätsmoduln des so normirten Integrals w_{12} sind nun völlig bestimmt; sie sind nämlich an den von O nach den Punkten (x_1, y_1) und (x_2, y_2) gelegten Schnitten $\mathfrak{L}_1$ und $\mathfrak{L}_2$ (Figur 8 S. 104) bez. gleich $-2i\pi$ und $+2i\pi$; ferner, wie in § 18 (III) gezeigt wird, an dem Querschnitt b_i gleich

$$w_{12}^{+} - w_{12}^{-} = 2\int_{x_1}^{x_2} du_i, \tag{8}$$

wobei vorausgesetzt ist, dass der Integrationsweg zwischen (x_1, y_1) und (x_2, y_2) die Querschnitte a_l, b_l $(l = 1, .., p)$ und die Linien $\mathfrak{L}_1$ und $\mathfrak{L}_2$ nicht schneidet. Der allgemeinste Werth, den die Integralfunction w_{12} durch Abänderung des Weges zwischen zwei Grenzpunkten (ξ, η) und (x, y) in T annehmen kann, wird erhalten, indem man zu w_{12} den Ausdruck hinzufügt:

$$m\,2i\pi + 2\sum_{i=1}^{p} n_i \int_{x_1}^{x_2} du_i, \tag{9}$$

wo m und die n_i ganze Zahlen sind.

Aus der Definition (I) ergeben sich zwei wichtige Sätze. Seien w_{01}, w_{02}, w_{12} u. s. w. Normalintegrale 3. Gattung mit denselben Grenzpunkten (ξ, η) und (x, y) und sei vorerst angenommen, dass ihre Integrationswege zwischen diesen Grenzpunkten in der einfach zusammenhängenden Fläche T' (mit der von den Rändern der Schnitte a_i, b_i, c_i, $\mathfrak{L}_0$, $\mathfrak{L}_1$, $\mathfrak{L}_2$ . . gebildeten Grenzlinie) verlaufen, so gelten die Gleichungen

$$w_{12} + w_{21} = 0, \quad w_{12} + w_{20} + w_{01} = 0 \quad \text{u. s. f.} \tag{10}$$

Denn die linken Seiten dieser Gleichungen sind Integralfunctionen, die in keinem Punkt der Fläche ∞ werden und längs der Linien $\mathfrak{L}_0$, $\mathfrak{L}_1$, $\mathfrak{L}_2$, . . stetig sind; sie stellen daher Integrale 1. Gattung dar (§ 15). Diese reduciren sich aber auf Constanten, da auch die Periodicitätsmoduln an den p Querschnitten a_i gleich 0 sind (§ 15 Satz IIa) und diese Constanten sind 0, weil die Grenzpunkte der Integrale die nämlichen sind.

Schreibt man die Gleichungen (10) in der Form

(11) $$w_{12} = - w_{21}, \quad w_{12} = w_{10} - w_{20},$$

so hat man die Sätze:

(II) Das Normalintegral 3. Gattung ändert sein Zeichen, wenn man die zwei logarithmischen Unstetigkeitspunkte vertauscht.

(III) Ein Normalintegral 3. Gattung w_{12} mit den Unstetigkeitspunkten (x_1, y_1) und (x_2, y_2) ist gleich der Differenz zweier Normalintegrale 3. Gattung, die nur in je einem der Punkte (x_1, y_1) und (x_2, y_2) und ausserdem in dem nämlichen dritten, beliebigen Punkt (x_0, y_0) logarithmisch ∞ werden; für diesen Punkt (x_0, y_0) bleibt das Integral w_{12} stetig.

Lässt man die Beschränkung, dass die Wege der Integrale in (10) und (11) nur in T' verlaufen sollen, fallen und nimmt dieselben beliebig in der mehrfach zusammenhängenden Fläche T, so gelten die nämlichen Gleichungen (10) und (11), nur mit dem Zusatze, dass zu jedem Integral noch eine Constante hinzutreten kann, die sich linear und ganzzahlig aus den Periodicitätsmoduln der Integrale an den Schnitten b_i und $\mathfrak{L}_0, \mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_2, \ldots$ zusammensetzt und von dem Weg des betreffenden Integrals in T abhängt.

Wir kommen schliesslich zur Bildung des Integrals 2. Gattung, d. h. eines Integrals, das nur in einem Punkt (x_1, y_1) ∞ wird und zwar algebraisch ∞ wie $A_1 (x - x_1)^{-1}$. Ein solches Integral lässt sich in ähnlicher Weise herstellen, wie das Integral 3. Gattung. Bestimmt man nämlich eine rationale Function von (x, y), welche

$= 0^2$ in jedem der n Punkte $(x = \infty, y = \infty)$,

$= \infty^1$ in jedem der ω Verzweigungspunkte,

$= \infty^2$ wie $- A_1 (x - x_1)^{-2}$ in dem Punkt (x_1, y_1),

so ist das Integral dieser Function, vermehrt um ein Aggregat von p linear unabhängigen Integralen 1. Gattung, das allgemeinste Integral 2. Gattung mit dem Unstetigkeitspunkt (x_1, y_1).

Indem man dies Integral durch A_1 dividirt und die Coefficienten der Integrale 1. Gattung passend bestimmt, erhält man das Normalintegral 2. Gattung t_1, das wir so definiren:

(IV) Das Normalintegral 2. Gattung t_1 mit dem algebraischen Unstetigkeitspunkt (x_1, y_1) ist so bestimmt,

1) dass es in (x_1, y_1) ∞ wird wie $(x - x_1)^{-1}$,
2) dass die Periodicitätsmoduln an den p Querschnitten a_i sämmtlich $= 0$ sind.

Man bildet indess das Normalintegral 2. Gattung t_1 einfacher durch einen Grenzübergang aus dem Normalintegral 3. Gattung w_{12}. Hierzu dient die zweite Gleichung (11). Lässt man in derselben (x_2, y_2) unendlich nahe an (x_1, y_1) heranrücken, so werden zunächst beide Seiten unendlich kleine Grössen. Dividirt man beiderseits durch die constante Grösse $x_1 - x_2$, so hat man den Grenzübergang

$$\lim_{x_2 = x_1} \frac{w_{12}}{x_1 - x_2} = \lim_{x_2 = x_1} \frac{w_{10} - w_{20}}{x_1 - x_2} = \frac{d w_{10}}{d x_1}. \tag{12}$$

Dieser Ausdruck stellt nun ein Integral 2. Gattung dar und zwar grade das in (IV) definirte Normalintegral t_1. Denn nach dem Verhalten von w_{10} hat der Ausdruck (12) folgende Eigenschaften:

Er wird nur ∞ in (x_1, y_1) und zwar wie $-\frac{d \log(x - x_1)}{d x_1} = (x - x_1)^{-1}$; er bleibt dagegen in (x_0, y_0) endlich, da w_{12} hier endlich ist.

Die Periodicitätsmoduln von (12) an den Querschnitten a_i sind 0, wie die von w_{12} oder w_{10} selber.

An den Querschnitten $\mathfrak{L}$ sind die Periodicitätsmoduln von (12) ebenfalls $= 0$, da sie für w_{12} oder w_{10} gleich $+ 2i\pi$ waren.

Bei der Bildung des Differentialquotienten (12) ist wesentlich, dass das Integral w_{10} bereits normirt ist, oder dass der Coefficient des Logarithmus in der Entwicklung von w_{10} in der Umgebung von (x_1, y_1) gleich -1, also unabhängig von (x_1, y_1) ist. Wäre dieser Coefficient abhängig von (x_1, y_1), so würde man durch Differentiation von w_{10} nach x_1 ein Integral erhalten, das in (x_1, y_1) zugleich algebraisch und logarithmisch ∞ wäre.

Man hat so den Satz[1]):

(V) Das Normalintegral 2. Gattung t_1 mit dem Unstetigkeitspunkt (x_1, y_1) ist

$$t_1 = \frac{d w_{10}}{d x_1}, \tag{13}$$

d. h. es ist gleich der Ableitung des Normalintegrals 3. Gattung w_{10} nach x_1, wobei der Punkt (x_0, y_0) ganz beliebig ist.

Aus (8) folgt, dass der Periodicitätsmodul von t_1 an dem Querschnitt b_i den Werth hat

1) Riemann, Ges. W. S. 100.

$$(14) \qquad t_1^+ - t_1^- = 2\frac{d}{dx_1}\int_{x_1}^{x_0} du_i = -2\left(\frac{du_i}{dx}\right)_{x_1},$$

wie auch im § 18 (II) noch besonders gezeigt wird.

Der allgemeinste Werth, den das Integral t_1 durch Abänderung des Integrationsweges in T annehmen kann, wird daher erhalten, indem man zu t_1 den Ausdruck addirt

$$(15) \qquad 2\sum n_i\left(\frac{du_i}{dx}\right)_{x_1},$$

wo die n_i beliebige, ganze Zahlen sind.

In ähnlicher Weise, wie oben, findet man, dass ein Integral, das nur in einem Punkt (x_1, y_1) ∞ wird, und zwar wie $(x - x_1)^{-2}$ oder wie $2(x - x_1)^{-3}$ u. s. f. und das an den Querschnitten a_i die Periodicitätsmoduln 0 hat, identisch ist mit der 1., 2., . . Ableitung von t_1 nach x_1 oder mit der 2., 3., . . Ableitung von w_{10} nach x_1. Auch diese Integrale lassen sich leicht direct bilden.

Umgekehrt kann man nach (13) das Integral w_{12} durch einen Integrationsprocess aus dem Integral 2. Gattung herleiten. Ist nämlich t_0 ein Normalintegral 2. Gattung mit dem Unstetigkeitspunkt (x_0, y_0), so ist nach (11) und (13)

$$(16) \qquad w_{12} = \int_{x_2}^{x_1} t_0\, dx_0,$$

oder, wenn $\frac{dt_0}{dx}$ als rationale Function von (x, y) und (x_0, y_0) mit $\psi(x; x_0)$ bezeichnet wird,

$$(17) \qquad w_{12} = \int_{\xi}^{x} dx \int_{x_2}^{x_1} \psi(x; x_0)\, dx_0.$$

Das Normalintegral 3. Gattung kann also auch erhalten werden durch zweimalige Integration einer algebraischen Function.

§ 17. Zerlegung des allgemeinen Integrals.

Wir kehren zurück zu dem allgemeinen, Abel'schen Integral

$$(1) \qquad W = \int P(x, y)\, dx$$

und zeigen, wie sich dasselbe aus Integralen der drei Gattungen zusammensetzen oder in solche zerlegen lässt.

Man nehme zuerst an, es sei die Form von W (1) gesucht und

es seien zu diesem Zweck die Unstetigkeitspunkte von W und die Entwicklungen von W in der Umgebung derselben gegeben. Die Unstetigkeitspunkte von W seien einfache Punkte im Endlichen von T mit den Coordinaten (x_l, y_l) $(l = 1, .., m)$ und die Entwicklung von W in der Umgebung des Punktes (x_l, y_l) sei

$$A_l \log(x-x_l)+B_l(x-x_l)^{-1}+C_l(x-x_l)^{-2}+D_l(x-x_l)^{-3}+\cdots+\mathfrak{P}(x-x_l), \quad (2)$$

wo $\sum A_l = 0$ ist, wo ferner die Glieder mit negativen Exponenten in endlicher Zahl auftreten und $\mathfrak{P}(x - x_l)$ eine aufsteigende Potenzreihe bezeichnet. Eine Betrachtung, ähnlich der zu Anfang des § 16 angestellten, zeigt, dass $P(x, y)$ die bestimmte Form

$$P(x, y) = Q\Phi : F'(y) \qquad (2a)$$

haben muss, wo Φ eine beliebige, adjungirte Function vom Grade $n - 3$ und $Q(x, y)$ eine rationale, gebrochene Function von gleichem Grade im Zähler und Nenner ist, welche die Punkte (x_l, y_l) zu ∞ Punkten erster oder höherer Ordnung hat. Man gelangt aber zur Lösung der gestellten Aufgabe und damit indirect zur Bildung der Function Q unmittelbar mit Hilfe des in § 16 definirten Normalintegrals 3. Gattung. Bildet man nämlich aus den ∞ Punkten (x_l, y_l) und den Coefficienten $A_l, B_l, C_l, D_l, ..$ den Ausdruck

$$\sum_{l=1}^{m}\left(A_l\omega_{l0}+B_l\frac{d\omega_{l0}}{dx_l}+C_l\frac{d^2\omega_{l0}}{dx_l^2}+\frac{1}{2}D_l\frac{d^3\omega_{l0}}{dx_l^3}+\cdots\right), \qquad (3)$$

in welchem der Punkt (x_0, y_0) ganz willkürlich ist, so ist die Differenz zwischen W und der Function (3) in allen Punkten der Fläche T endlich, in (x_l, y_l), weil sich die unstetigen Glieder aufheben, in (x_0, y_0), weil $\sum A_l = 0$ ist. Die Differenz ist daher ein allgemeines Integral 1. Gattung, das sich aus den p Normalintegralen 1. Gattung $u_1, .., u_p$ mit p Coefficienten $\mu_1, .., \mu_p$ zusammensetzt. Man hat folglich für W den Ausdruck

$$W=\sum_{l=1}^{m}\left(-A_l\omega_{l0}+B_l\frac{d\omega_{l0}}{dx_l}+C_l\frac{d^2\omega_{l0}}{dx_l^2}+\cdots\right)+\sum_{k=1}^{p}\mu_k u_k+\text{Const.} \quad (4)$$

Kennt man weiter die Periodicitätsmoduln $M_1, .., M_p$ von W an den Querschnitten $a_1, .., a^p$, so erhält man noch p Gleichungen zur Bestimmung der p Coefficienten μ_k.

Ist umgekehrt W oder $P(x, y)$ in (1) gegeben und die Zerlegung (4) gesucht, so ermittelt man auf algebraischem Wege die Unstetigkeitspunkte von $P(x, y)$ und zu jedem derselben die Reihen-

entwicklung dieser Function. Damit sind die Punkte (x_l, y_l) und die zugehörigen Coefficienten $A_l, B_l, C_l, \ldots$ gegeben, aus denen man den Ausdruck (4) bilden kann. Dies gibt den Satz:

(I) Ein System von hinreichenden und unabhängigen Stücken zur Bestimmung eines Abel'schen Integrals besteht

1) in den Unstetigkeitspunkten (x_l, y_l) und den zugehörigen Entwicklungscoefficienten $A_l, B_l, C_l, \ldots$ mit der Bedingung $\sum A_l = 0$ und

2) in den Periodicitätsmoduln an p der $2p$ Querschnitte a_i, b_i oder auch in den reellen Theilen der Periodicitätsmoduln an allen $2p$ Querschnitten.

Durch diese Stücke ist das Integral bis auf eine additive Constante bestimmt. Bei Riemann ergibt sich der Satz (I) wieder als specieller Fall des Dirichlet'schen Princips.

Differentiirt man die Gleichung (4) nach x, so erhält man für die rationale Function $P(x, y)$ eine Zerlegung in eine Reihe von einfachen, rationalen Functionen, die in den Unstetigkeitspunkten von P in bestimmter Weise ∞ werden, eine Zerlegung, die sich auch direct vornehmen lässt.

Man kann diese Darstellungen noch mannigfach abändern, indem man auf der rechten Seite in (4) die Integrale 2. Gattung zum Theil durch eine rationale Function von (x, y) und die Integrale 3. Gattung zum Theil durch den Logarithmus einer rationalen Function von (x, y) ersetzt.

So lässt sich z. B. ein Integral W, das in einer beliebigen Zahl m von Punkten (x_l, y_l) $(l = 1, \ldots, m)$ ∞^1 wird, bez. wie $B_l(x - x_l)^{-1}$, darstellen durch ein Aggregat, gebildet aus den p Normalintegralen 1. Gattung u_r, aus p Normalintegralen 2. Gattung t_r mit beliebigen Unstetigkeitspunkten (ξ_r, η_r) $(r = 1, \ldots, p)$ und aus einer rationalen Function von (x, y).

Denn sind M_i und N_i die Periodicitätsmoduln von W an den Querschnitten a_i und b_i, sind ferner $t_1, \ldots, t_p$ die p Normalintegrale 2. Gattung, bez. mit den Unstetigkeitspunkten $(\xi_1, \eta_1), \ldots, (\xi_p, \eta_p)$, sind endlich $u_1, \ldots, u_p$ die p Normalintegrale 1. Gattung und bildet man das Integral $(r = 1, \ldots, p)$:

$$W + \sum_r \nu_r t_r - \sum_r \mu_r u_r, \tag{5}$$

so lassen sich die $2p$ constanten Coefficienten μ_r, ν_r so wählen, dass die $2p$ Periodicitätsmoduln von (5) an den Querschnitten a_i, b_i sämmt-

lich verschwinden. Dabei bestimmen sich die $2p$ Grössen μ_r, ν_r nach (11) § 15 und (14) § 16 aus den $2p$ Gleichungen ($i = 1, .., p$):

$$M_i - \mu_i \pi i = 0, \quad N_i - 2\sum_r \nu_r \left(\frac{du_i}{dx}\right)_r - \sum_r \mu_r a_{ir} = 0,$$

wo $\left(\frac{du_i}{dx}\right)_r$ der für (ξ_r, η_r) gebildete Werth von $\frac{du_i}{dx}$ ist. Es ist daher nur noch die Bedingung hinzuzufügen, dass die Determinante, gebildet aus den Grössen $\left(\frac{\partial u_i}{\partial x}\right)_r$ $(i, r = 1, .., p)$, nicht verschwinden darf. Nach dieser Bestimmung der Grössen μ_r, ν_r ist (5) eine rationale Function R von (x, y), deren ∞^1 Punkte die m Punkte (x_l, y_l) und die p Punkte (ξ_r, η_r) und deren Residuen in diesen Punkten bez. B_l und ν_r sind, die sich daher nach § 12 leicht bilden lässt. Damit ist das Integral W in der angegebenen Weise dargestellt.

Ebenso kann man offenbar ein Integral W, das in m Punkten (x_l, y_l) logarithmisch ∞ wird bez. wie $A_l \log(x - x_l)$, darstellen durch ein Aggregat, gebildet aus den p Normalintegralen 1. Gattung, aus p Normalintegralen 3. Gattung mit beliebigen Unstetigkeitspunkten und aus dem Logarithmus einer rationalen Function von (x, y), und man kann allgemein ein Integral W mit beliebigen algebraischen oder logarithmischen Unstetigkeitspunkten darstellen durch ein Aggregat, gebildet aus p Normalintegralen 1. Gattung, aus p Normalintegralen, die theils 2. Gattung, theils 3. Gattung sind und aus einer rationalen Function von (x, y) und dem Logarithmus einer solchen Function.

Wichtiger als diese Darstellungen sind die folgenden Anwendungen des Satzes (I), welche die Darstellung einer rationalen Function von (x, y) durch Integrale 2. Gattung und die des Logarithmus einer solchen Function durch Integrale 3. Gattung enthalten.

Um eine gegebene rationale Function $R(x, y) = R$ von der Ordnung $m\ (> p)$ durch Abel'sche Integrale darzustellen, sei der Einfachheit halber vorausgesetzt, dass die ∞ Punkte (β_l, y_{β_l}) $(l = 1, .., m)$ von R beliebige, einfache Punkte im Endlichen von T seien, und dass R in jedem derselben nur in 1. Ordnung ∞ werde, in (β_l, y_{β_l}) wie $B_l(x - \beta_l)^{-1}$. Tritt nun in (4) R an Stelle von W, so hat man $x_l = \beta_l$, $A_l = 0$, $C_l = 0$, .. und es folgt, wenn $\frac{d\omega_{l0}}{dx_l} = t_{\beta_l}$ gesetzt wird (vgl. (13) § 16), für R der Ausdruck $(l = 1, .., m)$:

$$R = \sum_l B_l t_{\beta_l} + B_0, \tag{6}$$

wo B_0 eine Constante ist. Das in (4) auftretende Integral 1. Gattung fällt hier weg oder die Coefficienten μ_k sind hier 0, weil die Periodicitätsmoduln der Function R und ebenso der Normalintegrale 2. Gattung t an den Querschnitten a_i sämmtlich 0 sind. Die Gleichung (6) gibt den Satz[1]):

(II) Eine rationale Function $R(x, y)$ lässt sich darstellen als ein Aggregat von Normalintegralen 2. Gattung, deren Unstetigkeitspunkte die ∞^1 Punkte und deren Coefficienten die zugehörigen Residuen der Function R sind.

Das Charakteristische der rationalen Function R, betrachtet als Abel'sches Integral, besteht darin, dass die $2m$ Elemente (β_l, y_{β_l}) und B_l nicht willkürlich, sondern durch p Gleichungen an einander gebunden sind (Satz IV § 12). Diese p Gleichungen ergeben sich hier, indem man die Periodicitätsmoduln an den p Querschnitten b_i auf der rechten Seite der Gleichung (6) gleich 0 setzt, nach (14) § 16 in der Form $(i = 1, .., p)$:

$$\sum_{l=1}^{m} B_l \left(\frac{du_i}{dx}\right)_{\beta_l} = 0. \tag{7}$$

Diese Gleichungen sind identisch mit (12) § 13 und stellen das Abel'sche Theorem für Differentiale 1. Gattung dar, angewandt auf die Function $R(x, y)$. Wir haben an jener Stelle gesehen, wie man durch Discussion der Gleichungen (7) den Riemann-Roch'schen Satz findet. In der That war die Darstellung der rationalen Function R in der Form (6) und der zugehörigen Bedingungsgleichungen in der Form (7) für Riemann und Roch der Ausgangspunkt zur Herleitung des Satzes.

Um den Logarithmus einer gegebenen, rationalen Function $R(x, y)$ durch Abel'sche Integrale darzustellen, muss man nach (I) von $\log R$ wieder die Unstetigkeitspunkte und die zugehörigen Entwicklungscoefficienten, sowie die Periodicitätsmoduln an den Querschnitten a_i kennen. Die m ∞^1 Punkte von R seien wieder (β_l, y_{β_l}), die m 0^1 Punkte (α_l, y_{α_l}). In der Umgebung dieser Punkte ist für

$$(8) \quad \begin{cases} \beta_l\colon\ R = B_l\,(x-\beta_l)^{-1} + \cdots & \text{also} \quad \log R = -\log(x-\beta_l) + \cdots \\ \alpha_l\colon\ R = A_l\,(x-\alpha_l)^{+1} + \cdots & \text{,,} \quad\ \ \log R = +\log(x-\alpha_l) + \cdots \end{cases}$$

d. h. für die sämmtlichen Punkte α_l und β_l ist $\log R$ logarithmisch ∞. Tritt nun $\log R$ an Stelle von W in (4) ein, so hat man

1) Riemann, Ges. W. S. 100.

$(x_l = \beta_l,\ A_l = -1)$ und $(x_l = \alpha_l,\ A_l = +1)$ zu setzen, während $B_l, C_l, \ldots$ gleich 0 sind. Es folgt daher für $\log R$ ein Ausdruck, den man mit Rücksicht auf die Gleichung $\omega_{10} - \omega_{20} = \omega_{12}$ (11) § 16 schreiben kann

$$\log R = \sum_{l=1}^{m} \omega_{\beta_l\,\alpha_l} + \sum_{k=1}^{p} \mu_k u_k + C.$$

Die Periodicitätsmoduln von $\log R$ an dem Querschnitt a_i (dasselbe gilt von b_i) müssen ganzzahlige Vielfache von $2i\pi$ sein, also von der Form $m_i 2i\pi$, wo m_i eine $\pm$ ganze Zahl (oder 0) ist, die man erhält, indem man $\log R$ von der $-$ zur $+$ Seite des Querschnitts a_i führt. Hiernach sind die Coefficienten $\mu_i = 2m_i$ und man hat die Gleichung

$$\log R = \sum_{l} \omega_{\beta_l\,\alpha_l} + 2\sum_{k} m_k u_k + C \tag{9}$$

oder den Satz:

(III) Der Logarithmus einer rationalen Function $R(x, y)$ lässt sich, abgesehen von einem Integral 1. Gattung, darstellen als eine Summe von Normalintegralen 3. Gattung, deren Unstetigkeitspunkte die ∞^1 und 0^1 Punkte der Function R sind.

Das Charakteristische des Logarithmus einer rationalen Function $R(x, y)$, betrachtet als Abel'sches Integral, besteht darin, dass die $2m$ Elemente (β_l, y_{β_l}) und (α_l, y_{α_l}) nicht willkürlich, sondern durch p Gleichungen an einander gebunden sind. Diese p Gleichungen ergeben sich hier, indem man die Periodicitätsmoduln an den Querschnitten b_i auf beiden Seiten der Gleichung (9) gleich setzt, nach (8) § 16 in der Form $(i = 1, \ldots, p)$:

$$\sum_{l} \int_{\beta_l}^{\alpha_l} du_i = n_i \pi i. \tag{10}$$

Die ganzen Zahlen n_i in diesen Gleichungen hängen von den Integrationswegen zwischen den Punkten β_l und α_l ab und können durch passende Wahl derselben auch $= 0$ gemacht werden. Die Gleichungen (10) stellen das Abel'sche Theorem für Integrale 1. Gattung dar, angewandt auf die rationale Function $R(x, y)$; sie werden in § 20 eingehender untersucht.

§ 18. **Beziehungen zwischen zwei Abel'schen Integralen.**

In den §§ 14—17 wurden die Eigenschaften und die Bildungsweise der Abel'schen Integrale besprochen. Wir fragen jetzt nach den Beziehungen der Abel'schen Integrale zu einander. Es besteht eine allgemeine Formel[1]) zwischen den Elementen zweier beliebigen Abel'schen Integrale V und W, aus der sich durch Specialisirung von V und W eine Reihe von Sätzen und Darstellungen ergibt, die sich auf das Verhalten der drei Gattungen von Integralen zu einander und auf ihr Verhalten zu den rationalen Functionen beziehen.

Es seien zwei Abel'sche Integrale gegeben, V mit den Unstetigkeitspunkten (x_l, y_l) $(l = 1, .., m)$ und W mit den Unstetigkeitspunkten $(\xi_\lambda, \eta_\lambda)$ $(\lambda = 1, .., \mu)$ in der Verzweigungsfläche T. Man schliesse diese Punkte durch kleine Kreise aus, lege ferner die Querschnitte a_i, b_i, c_i $(i = 1, .., p)$ und von dem Punkte O (dem gemeinsamen Punkte der Schnitte c_i) nach den um die Punkte (x_l, y_l) und $(\xi_\lambda, \eta_\lambda)$ gezogenen Kreisen weitere Schnitte $\mathfrak{L}_l$ und $\mathfrak{L}_\lambda$, die weder einander noch a_i, b_i, c_i schneiden und wähle endlich den $+$ und $-$ Rand an jedem dieser Schnitte, wie in Figur 8 S. 104. In der so aus T entstandenen, einfach zusammenhängenden Fläche T' sind die Integrale V und W eindeutig und stetig und es ist folglich nach dem Cauchy'schen Fundamentalsatz[2]) über die Integration im complexen Gebiet

$$(1) \qquad \int V dW = 0,$$

wenn dies Integral etwa in positiver Richtung (im Sinne der Pfeile in Fig. 8) über die ganze Begrenzung von T' ausgedehnt wird. Die in Rede stehende Gleichung ergibt sich nun aus (1), indem man für das Integral die von den einzelnen Querschnitten der Fläche T', sowie die von den Kreisen um die Punkte (x_l, y_l) und $(\xi_\lambda, \eta_\lambda)$ herrührenden Beiträge bestimmt. Was die Querschnitte betrifft, so kommen die Linien c_i nicht in Betracht, weil für sie, wie früher bemerkt, die Periodicitätsmoduln jedes Abel'schen Integrals gleich 0 sind. Für die übrigen Schnitte $a_i, b_i, \mathfrak{L}_l$ und $\mathfrak{L}_\lambda$ lässt sich mit Hilfe der Periodici-

---

1) Das Princip zur Herleitung dieser Formel durch Auswerthung des Randintegrales (1) ist von Riemann (Ges. W. S. 124 und 133) für einen speciellen Fall entwickelt und von Clebsch-Gordan, Ab. F. S. 114 ff. (1866) zur Ableitung weiterer Relationen benutzt worden. Die allgemeinste, derartige Formel hat Herr Prym (Journ. für Math. Bd. 71. S. 305) (1869) gegeben.

2) S. etwa Durège, Elemente der Theorie der Functionen. 4. A. § 18.

tätsmoduln der Weg des Integrals (1) beschränken auf den + Rand dieser Schnitte.

Wir machen vorerst vereinfachende Annahmen, die sich später leicht aufheben lassen, nämlich, dass die Unstetigkeitspunkte (x_l, y_l) und $(\xi_\lambda, \eta_\lambda)$ weder in Verzweigungspunkte noch ins Unendliche von T fallen, dass keiner der Punkte (x_l, y_l) mit einem der Punkte $(\xi_\lambda, \eta_\lambda)$ zusammenfalle, und dass V und W algebraisch nur bis zur ersten Ordnung ∞ werden. Es sei also in der Umgebung von

$$\left.\begin{array}{l} (x_l, y_l): \ V = C_l \log(x - x_l) + D_l (x - x_l)^{-1} + \mathfrak{P}_l (x - x_l), \\ (\xi_\lambda, \eta_\lambda): \ W = \mathsf{C}_\lambda \log(x - \xi_\lambda) + \mathsf{D}_\lambda (x - \xi_\lambda)^{-1} + \mathsf{P}_\lambda (x - \xi_\lambda), \end{array}\right\} \quad (2)$$

wobei

$$\sum_l C_l = 0, \quad \sum_\lambda \mathsf{C}_\lambda = 0 \quad (3)$$

ist und $\mathfrak{P}_l (x - x_l)$ und $\mathsf{P}_\lambda (x - \xi_\lambda)$ aufsteigende Potenzreihen bez. von $(x - x_l)$ und $(x - \xi_\lambda)$ bedeuten.

Ferner sei in der Umgebung von

$$\left.\begin{array}{ll} (x_l, y_l): & W = W_{x_l} + (x - x_l) \left(\frac{dW}{dx}\right)_{x_l} + \cdots \\ (\xi_\lambda, \eta_\lambda): & V = V_{\xi_\lambda} + (x - \xi_\lambda) \left(\frac{dV}{dx}\right)_{\xi_\lambda} + \cdots \end{array}\right\} \quad (4)$$

Endlich seien die Periodicitätsmoduln von

$$\left.\begin{array}{lll} V & \text{an } a_i: M_i, & \text{an } b_i: N_i, \\ W & \text{,, } a_i: \mathsf{M}_i, & \text{,, } b_i: \mathsf{N}_i. \end{array}\right\} \quad (5)$$

Unter diesen Voraussetzungen bestimmen sich die Beiträge zu dem Integral (1) folgendermassen (Fig. 8):

1) Für die Querschnitte a_i, b_i sind die Werthe von dW in zwei entsprechenden Punkten zu beiden Seiten jedes Querschnittes gleich und von entgegengesetzten Vorzeichen; ferner ist an

$$a_i: \ V^+ - V^- = M_i, \quad b_i: \ V^+ - V^- = N_i;$$

folglich ist, da die positive Grenzrichtung

auf der + Seite von a_i von dem — zum + Rande von b_i,
" " + " " b_i " " + " — " " a_i

führt, der Beitrag zu (1) für

$$a_i: \ M_i \int_{a_i}^{+} dW = M_i \mathsf{N}_i, \quad b_i: \ N_i \int_{b_i}^{+} dW = - N_i \mathsf{M}_i,$$

wo $\int\limits_{a_i}^{+}$ andeutet, dass das Integral nur noch längs der $+$ Seite des Querschnitts a_i im Sinne des Pfeiles zu nehmen ist. Demnach ist der Gesammtbeitrag von allen Querschnitten a_i, b_i zum Integral (1)

$$= \sum_{i=1}^{p} (M_i \mathsf{N}_i - N_i \mathsf{M}_i). \tag{6}$$

2) Für den Schnitt $\mathfrak{L}_\lambda$ ist $V^+ - V^- = 0$, also ist der Beitrag von sämmtlichen Schnitten $\mathfrak{L}_\lambda$ zum Integral (1) $= 0$.

Für den Schnitt $\mathfrak{L}_l$ ist $V^+ - V^- = 2i\pi C_l$, also ist der Beitrag zum Integral (1)

$$= 2i\pi\, C_l \int\limits_{\mathfrak{L}_l}^{+} dW = 2i\pi\, C_l \int_0^{x_l} dW.$$

Daher ist der Gesammtbeitrag von allen Schnitten $\mathfrak{L}_l$ zum Integral (1)

$$= 2i\pi \sum_l C_l \int_0^{x_l} dW. \tag{7}$$

3) Für den Kreis um $(\xi_\lambda, \eta_\lambda)$ erhält man nach (2) und (4), indem man in der Entwicklung von $V\frac{dW}{dx}$ in der Umgebung von $(\xi_\lambda, \eta_\lambda)$ die Glieder mit $(x - \xi_\lambda)^{-1}$ zusammenfasst, als Beitrag zu (1)

$$\left\{\begin{aligned} &= \int\limits_{(\xi_\lambda)} V \frac{dW}{dx}\, dx = \left[\mathbf{C}_\lambda V_{\xi_\lambda} - \mathbf{D}_\lambda \left(\frac{dV}{dx}\right)_{\xi_\lambda}\right] \int\limits_{(\xi_\lambda)} (x - \xi_\lambda)^{-1}\, dx \\ &= -2i\pi \left[\mathbf{C}_\lambda V_{\xi_\lambda} - \mathbf{D}_\lambda \left(\frac{dV}{dx}\right)_{\xi_\lambda}\right]. \end{aligned}\right. \tag{8}$$

Für den Kreis um (x_l, y_l) findet man in ähnlicher Weise als Beitrag zu (1)[1])

$$\int\limits_{(x_l)} V \frac{dW}{dx}\, dx = \left(\frac{dW}{dx}\right)_{x_l} D_l \int\limits_{(x_l)} (x - x_l)^{-1}\, dx = -2i\pi\, D_l \left(\frac{dW}{dx}\right)_{x_l}. \tag{9}$$

---

1) Da $\int\limits_{(x_l)} \log (x - x_l)\, dx$ und eben jedes $\int\limits_{(x_l)} (x - x_l)^k \log (x - x_l)\, dx = 0$ ist, wenn $k > 0$, wie sich durch theilweise Integration ergibt.

Fasst man die Beiträge (6) bis (9) zusammen, so erhält man aus (1) die gesuchte fundamentale Gleichung:

$$\left.\begin{array}{r}\sum_l \left[C_l \int_O^{x_l} dW - D_l \left(\frac{dW}{dx}\right)_{x_l}\right] - \sum_\lambda \left[\mathsf{C}_\lambda \int_O^{\xi_\lambda} dV - \mathsf{D}_\lambda \left(\frac{dV}{dx}\right)_{\xi_\lambda}\right] \\ + \frac{1}{2i\pi} \sum_{i=1}^{p} (M_i \mathsf{N}_i - N_i \mathsf{M}_i) = 0.\end{array}\right\} \quad (10)$$

Die Lage des Punktes O ist von keinem Einfluss, da $\sum C_l = 0$ und $\sum \mathsf{C}_\lambda = 0$ ist.

Wir heben nachträglich die bei der Herleitung der Gleichung (10) gemachten, vereinfachenden Voraussetzungen auf. Zunächst war angenommen, dass die Integrationswege Ox_l und $O\xi_\lambda$ in T weder einander noch die Querschnitte a_i, b_i schneiden. Lässt man diese Beschränkung fallen, also die Wege Ox_l und $O\xi_\lambda$ ganz beliebig in T verlaufen, so ist jedes der Integrale $\int dW$ und $\int dV$, so oft der Weg Ox_l oder $O\xi_\lambda$ einen der Schnitte a_i, b_i, $\mathfrak{L}_l$, $\mathfrak{L}_\lambda$ von der $+$ zur $-$ Seite überschreitet, um den zugehörigen Periodicitätsmodul zu vermehren. Die linke Seite in (10) ist daher bei allgemeinen Integrationswegen in T um eine Summe von ganzzahligen Vielfachen von sämmtlichen Periodicitätsmoduln der Integrale $C_l \int dW$ und $\mathsf{C}_\lambda \int dV$ zu vermehren, d. h. um einen Ausdruck der folgenden Form

$$+\sum_l \sum_i C_l (m_{li} \mathsf{M}_i + n_{li} \mathsf{N}_i) - \sum_\lambda \sum_i \mathsf{C}_\lambda (\mu_{\lambda i} M_i + \nu_{\lambda i} N_i), \quad (10a)$$

wo die m, n, μ, ν ganze Zahlen sind, die von den gewählten Integrationswegen abhängen. Dieselbe Bemerkung gilt für die späteren aus (10) abgeleiteten, speciellen Gleichungen.

Ferner war vorausgesetzt, dass in den Entwicklungen (2) die algebraisch unendlichen Glieder nur von der ersten Ordnung seien. Nimmt man in den Entwicklungen (2) noch Glieder auf, die in höherer Ordnung ∞ sind, so treten in (10) noch Aggregate mit höheren Ableitungen von V und W hinzu, wie sich ergibt, wenn man die Entwicklungen auch in (4) fortsetzt. Es wurde endlich angenommen, dass die Unstetigkeitspunkte (x_l, y_l) und $(\xi_\lambda, \eta_\lambda)$ der Integrale V und W weder in Verzweigungspunkte noch ins Unendliche von T fallen. Um ganz allgemein zu verfahren, seien s_l und σ_λ zwei Grössen, die bez. in (x_l, y_l) und $(\xi_\lambda, \eta_\lambda)$ unendlich klein von der ersten Ordnung sind, so dass

$$
(10\text{b}) \quad \begin{cases} s_l = x - x_l, \quad \text{oder} \quad (x - x_l)^{\frac{1}{\mu_l}}, \quad \text{oder} \quad x^{-1}, \\ \sigma_\lambda = x - \xi_\lambda, \quad \text{„} \quad (x - \xi_\lambda)^{\frac{1}{\nu_\lambda}}, \quad \text{„} \quad x^{-1}, \end{cases}
$$

je nachdem (x_l, y_l) und $(\xi_\lambda, \eta_\lambda)$ im ersten Falle einfache Punkte, im zweiten Falle Verzweigungspunkte der Ordnung μ_l und ν_λ sind, im dritten Falle zu den n Punkten $(x = \infty, y = \infty)$ gehören. Ferner sei in der Umgebung von

$$
\begin{aligned}
&(x_l, y_l) \qquad V = C_l \log s_l + D_l\, s_l^{-1} + \mathfrak{P}_l(s_l), \\
&(\xi_\lambda, \eta_\lambda) \qquad W = \mathsf{C}_\lambda \log \sigma_\lambda + \mathsf{D}_\lambda\, \sigma_\lambda^{-1} + \mathsf{P}_\lambda(\sigma_\lambda),
\end{aligned}
$$

wobei wieder $\qquad \sum C_l = 0, \quad \sum \mathsf{C}_\lambda = 0,$

und es sei in der Umgebung von

$$
\begin{aligned}
&(x_l, y_l) \qquad W = W_{x_l} + T_l\, s_l + \cdots \\
&(\xi_\lambda, \eta_\lambda) \qquad V = V_{\xi_\lambda} + \mathsf{T}_\lambda\, \sigma_\lambda + \cdots.
\end{aligned}
$$

Die Grössen T_l und T_λ sind nur für $s_l = x - x_l$ und $\sigma_\lambda = x - \xi_\lambda$ bez. gleich $\left(\frac{dW}{dx}\right)_{x_l}$ und $\left(\frac{dV}{dx}\right)_{\xi_\lambda}$; für die anderen Fälle hat man die Substitution (10b) zu machen und die Entwicklung auszuführen. Wiederholt man die Berechnung der Beiträge zum Integral (1), so zeigt sich, dass in (8) und (9) und folglich auch in (10) an Stelle von $\left(\frac{dW}{dx}\right)_{x_l}$ und $\left(\frac{dV}{dx}\right)_{\xi_\lambda}$ die Grössen T_l und T_λ treten, während alles andere ungeändert bleibt.

Wir leiten zunächst aus der allgemeinen Formel (10) einige specielle Sätze ab, die sich auf die Periodicitätsmoduln der drei Gattungen von Abel'schen Integralen beziehen, nämlich der Normalintegrale 1. Gattung u_k $(k = 1, \ldots, p)$, des Normalintegrals 2. Gattung t_{x_1} mit dem algebraischen Unstetigkeitspunkt (x_1, y_1) und des Normalintegrals 3. Gattung $w_{x_1 x_2}$ mit den logarithmischen Unstetigkeitspunkten (x_1, y_1) und (x_2, y_2).

Es sei $W = u_k$, also

$$
\mathsf{C}_\lambda = 0, \quad \mathsf{D}_\lambda = 0, \quad \mathsf{M}_i = 0, \quad \mathsf{M}_k = \pi i, \quad \mathsf{N}_i = a_{ik} \quad (i, k = 1, \ldots, p).
$$

Dann folgt aus (10)

$$
(11) \qquad \sum_l \left[C_l \int_0^{x_l} du_k - D_l \left(\frac{du_k}{dx}\right)_{x_l} \right] = \frac{1}{2 i \pi} \left(\pi i\, N_k - \sum_i M_i\, a_{ik} \right).
$$

Setzt man in (11) der Reihe nach

$$\left.\begin{array}{lll} V=u_l & \text{also} & C_l=0,\quad D_l=0,\quad M_i=0,\ M_l=\pi i,\ N_i=a_{il} \\ V=t_{x_1} & ,, & C_1=0,\quad D_1=1,\quad M_i=0, \\ V=w_{x_1x_2} & ,, & C_1=-1,\ C_2=+1,\ D_1=D_2=0,\ M_i=0, \end{array}\right\} \quad (12)$$

so erhält man die Gleichungen ($k,\ l = 1, .., p$):

$$a_{kl} = a_{lk}, \quad (13)$$

$$N_k = -2\left(\frac{du_k}{dx}\right)_{x_1}, \quad (14)$$

$$N_k = 2\left[\int_0^{x_2} du_k - \int_0^{x_1} du_k\right] = 2\int_{x_1}^{x_2} du_k. \quad (15)$$

Die Gleichungen (14) ergeben sich auch aus (15) durch den Differentiationsprocess, der das Normalintegral 3. Gattung in das Normalintegral 2. Gattung überführt (Satz V § 16).

Die Gleichungen (13) bis (15) enthalten den Beweis der schon in § 15 Gl. (17) und § 16 Gl. (8 und 14) benutzten Sätze, nämlich:

(I) Der Periodicitätsmodul des Normalintegrals 1. Gattung u_l an dem Querschnitte b_k ist gleich dem Periodicitätsmodul des Normalintegrals 1. Gattung u_k an dem Querschnitte b_l.

(II) Die Periodicitätsmoduln des Normalintegrals 2. Gattung t_{x_1} an den Querschnitten b_k sind die mit -2 multiplicirten Ableitungen der p Normalintegrale 1. Gattung u_k nach x, gebildet für den Unstetigkeitspunkt x_1.

(III) Die Periodicitätsmoduln des Normalintegrals 3. Gattung $w_{x_1 x_2}$ an den Querschnitten b_k sind gleich den mit 2 multiplicirten, zwischen den Unstetigkeitspunkten x_1 und x_2 genommenen Normalintegralen 1. Gattung u_k, wenn der Integrationsweg zwischen x_1 und x_2 die Querschnitte a_i, b_i nicht schneidet.

Die Gleichungen (13) beziehen sich auf das System der p Normalintegrale 1. Gattung $u_1, .., u_p$ und die zugehörigen Periodicitätsmoduln. Betrachtet man statt dessen ein beliebiges System von p linear unabhängigen Integralen 1. Gattung $v_1, .., v_p$, deren Periodicitätsmoduln an den Querschnitten a_i, b_i durch das Schema (7) § 15 gegeben sind, so hat man in (10) zu setzen

$$V = v_k,\ \ W = v_l;\ \ M_i = A_{ik},\ \ N_i = B_{ik},\ \ \mathsf{M}_i = A_{il},\ \ \mathsf{N}_i = B_{il}$$

und erhält daher zwischen den Periodicitätsmoduln der Integrale $v_1, .., v_p$ die Relationen $(k, l = 1, .., p)$:

$$(16) \qquad \sum_{i=1}^{p} (A_{ik} B_{il} - A_{il} B_{ik}) = 0$$

und damit den Beweis der Gleichungen (9a) § 15.

In ähnlicher Weise wie die Sätze über Periodicitätsmoduln ergeben sich gewisse Vertauschungssätze für die Abel'schen Integrale. Setzt man in der Gleichung (10) der Reihe nach

$(V = t_{x_1},\ W = t_{x_2}),\ (V = t_{x_0},\ W = w_{x_1 x_2}),\ (V = w_{x_1 x_2},\ W = w_{\xi_1 \xi_2}),$

so erhält man die folgenden Gleichungen

$$(17) \qquad \left(\frac{dt_{x_1}}{dx}\right)_{x_2} = \left(\frac{dt_{x_2}}{dx}\right)_{x_1},$$

$$(18) \qquad \int_{x_1}^{x_2} dt_{x_0} = -\left(\frac{dw_{x_1 x_2}}{dx}\right)_{x_0},$$

$$(19) \qquad \int_{x_1}^{x_2} dw_{\xi_1 \xi_2} = \int_{\xi_1}^{\xi_2} dw_{x_1 x_2}.$$

Auch hier lässt sich wieder (17) aus (18) und (18) aus (19) ableiten durch den Differentiationsprocess, der das Normalintegral 3. Gattung in das Normalintegral 2. Gattung überführt. Die Gleichungen (17) bis (19) geben die Sätze:

(IV) In der Ableitung des Normalintegrals 2. Gattung mit dem Unstetigkeitspunkt x_1 nach x, gebildet für den Punkt x_2, kann man x_1 mit x_2 vertauschen. (Vertauschungssatz der Normaldifferentiale 2. Gattung.)

(V) Das Normalintegral 2. Gattung t_{x_0}, genommen zwischen den Grenzen x_1 und x_2, drückt sich algebraisch aus durch die Ableitung des Normalintegrals 3. Gattung $w_{x_1 x_2}$ nach x, gebildet für x_0.

(VI) In dem Normalintegral 3. Gattung $w_{x_1 x_2}$, genommen zwischen den Grenzen ξ_1 und ξ_2, kann man die Unstetigkeitspunkte x_1, x_2 mit den Integrationsgrenzen ξ_1, ξ_2 vertauschen. (Vertauschungssatz der Normalintegrale 3. Gattung.)

Man nennt in einem Integral 3. Gattung die Coordinaten der

Unstetigkeitspunkte die Parameter und die Coordinaten der Grenzpunkte die Argumente und bezeichnet demgemäss den Satz (VI) als den Vertauschungssatz von Parameter und Argument.

§ 19. Das Abel'sche Theorem[1]).

Man erhält weiter eine Reihe wichtiger Relationen, die in ihrer Gesammtheit das Abel'sche Theorem vorstellen, indem man, wie vorher zwei Abel'sche Integrale, so jetzt ein Abel'sches Integral mit einer rationalen Function oder mit dem Logarithmus einer solchen Function combinirt.

Es sei $R(x, y)$ eine beliebige, rationale Function von der Ordnung m mit den m ∞^1 Punkten $(b_1, y_{b_1}), \ldots, (b_m, y_{b_m})$ oder kurz $b_1, \ldots, b_m$ und den m 0^1 Punkten $(a_1, y_{a_1}), \ldots, (a_m, y_{a_m})$ oder kurz $a_1, \ldots, a_m$, die sämmtlich einfache Punkte im Endlichen von T seien. Es verhalte sich in

$$\left.\begin{array}{llll} b_l\colon R \text{ wie } B_l(x-b_l)^{-1}, & \text{also } \log R & \text{wie} & -\log(x-b_l) \\ a_l\colon R \quad ,, \quad A_l(x-a_l)^{+1}, & \quad ,, \quad \log R & ,, & +\log(x-a_l). \end{array}\right\} \quad (1)$$

Für eine zweite rationale Function $P(x, y)$ sollen α_λ, β_λ, A_λ, B_λ dieselbe Bedeutung haben wie a_l, b_l, A_l, B_l für $R(x, y)$.

Setzt man in (10) § 18 zuerst $V = 1$, $W = \log P$, so erhält man den Satz, dass für jede rationale Function $P(x, y)$ die Zahl der ∞^1 Punkte und der 0^1 Punkte dieselbe ist (vgl. § 7 Satz II und § 14 Satz V); setzt man $V = 1$, während W ein allgemeines Abel'sches Integral bleibt, so erhält man die Gleichung $\sum \mathsf{C}_\lambda = 0$, d. h. den Satz, dass für jedes Abel'sche Integral die Summe der Coefficienten der logarithmischen Glieder verschwindet (vgl. § 14 Satz III).

Man setze nunmehr

$$V = R, \text{ also } C_l = 0, \ D_l = B_l, \ M_i = 0, \ N_i = 0;$$

dann geht (10) § 18 über in

$$\sum_l B_l \left(\frac{dW}{dx}\right)_{b_l} + \sum_\lambda \left[\mathsf{C}_\lambda (R)_{\xi_\lambda} - \mathsf{D}_\lambda \left(\frac{dR}{dx}\right)_{\xi_\lambda}\right] = 0. \quad (2)$$

Diese Gleichung enthält das Abel'sche Theorem für das allgemeine Abel'sche Differential dW; wir geben demselben am Schluss dieses § eine bestimmte Fassung (Satz VI).

---

1) Abel, Oeuvres complètes I. S. 145 (1826) und S. 515 (1829). Riemann, Ges. W. S. 116 ff. Clebsch-Gordan, Abel'sche Functionen S. 44 u. 127 (1866).

Nimmt man in (2) für W der Reihe nach die Functionen

$$P, \quad \log P, \quad u_k, \quad t_{x_1}, \quad w_{x_1 x_2},$$

so folgen die Gleichungen

$$\sum_l B_l \left(\frac{dP}{dx}\right)_{b_l} = \sum_\lambda \mathsf{B}_\lambda \left(\frac{dR}{dx}\right)_{\beta_\lambda}, \tag{3}$$

$$\sum_l B_l \left(\frac{d \log P}{dx}\right)_{b_l} = \sum_\lambda (R_{\beta_\lambda} - R_{\alpha_\lambda}), \tag{4}$$

$$\sum_l B_l \left(\frac{du_k}{dx}\right)_{b_l} = 0 \quad (k = 1, .., p), \tag{5}$$

$$\sum_l B_l \left(\frac{dt_{x_1}}{dx}\right)_{b_l} = \left(\frac{dR}{dx}\right)_{x_1}, \tag{6}$$

$$\sum_l B_l \left(\frac{dw_{x_1 x_2}}{dx}\right)_{b_l} = R_{x_1} - R_{x_2}. \tag{7}$$

Die dritte dieser Formeln gibt den früher auf anderem Wege hergeleiteten Satz (vgl. (7) § 17 und (11) § 13):

Zwischen den m ∞^1 Punkten b_l und den zugehörigen m Residuen B_l einer rationalen Function $R(x, y)$ von der Ordnung m bestehen die p Gleichungen (5).

Man setze ferner in (10) § 18

$V = \log R$, also $C_l = -1$ für $x_l = b_l$ und $C_l = +1$ für $x_l = a_l$,

und $D_l = 0$ für alle x_l, $M_i = m_i 2i\pi$, $N_i = n_i 2i\pi$,

wo m_i, n_i bestimmte ganze Zahlen sind (vgl. 17). Dann folgt aus (10) § 18

$$\sum_l \int_{a_l}^{b_l} dW + \sum_\lambda \mathsf{C}_\lambda (\log R)_{\xi_\lambda} - \sum_\lambda \mathsf{D}_\lambda \left(\frac{d \log R}{dx}\right)_{\xi_\lambda} = 0. \tag{8}$$

Auf der linken Seite wäre noch der Ausdruck

$$-\sum_i (m_i N_i - n_i M_i) \tag{8a}$$

hinzuzufügen. Man kann denselben, da er eine allgemeine Periode des Integrals W darstellt, weglassen, wenn man die Integrationswege von $\int dW$ zwischen den Punkten a_l und b_l passend wählt, wie im Folgenden vorausgesetzt sein soll.

Die Gleichung (8) enthält das Abel'sche Theorem für das allgemeine Abel'sche Integral W, nämlich:

(I) Die Summe der Werthe eines allgemeinen Abel'schen Integrals W, genommen zwischen zwei Systemen von Punkten b_l und a_l, in welchen eine rationale Function $R(x, y)$ die Werthe ∞^1 und 0^1 annimmt, ist eine rational-logarithmische Function der Coordinaten der Unstetigkeitspunkte von W und der Coefficienten von R.

Nimmt man in (8) für W der Reihe nach die Functionen

$$\log P, \quad u_k, \quad t_{x_1}, \quad w_{x_1 x_2},$$

so erhält man, unter Π ein Productzeichen verstanden,

$$\prod_l (P)_{b_l} : \prod_l (P)_{a_l} = \prod_\lambda (R)_{\beta_\lambda} : \prod_\lambda (R)_{\alpha_\lambda}, \tag{9}$$

$$\sum_l \int_{a_l}^{b_l} du_k = 0 \qquad (k = 1, .., p), \tag{10}$$

$$\sum_l \int_{a_l}^{b_l} dt_{x_1} = \left(\frac{d \log R}{dx}\right)_{x_1}, \tag{11}$$

$$\sum_l \int_{a_l}^{b_l} dw_{x_1 x_2} = (\log R)_{x_1} - (\log R)_{x_2}. \tag{12}$$

Die Gleichungen (9) bis (12) enthalten die Sätze:

(II) Der Quotient der Producte, gebildet aus den Werthen einer rationalen Function R für die 0^1 und ∞^1 Punkte einer andern rationalen Function P, ist gleich dem Quotienten der Producte aus den Werthen von P für die 0^1 und ∞^1 Punkte von R.

(III) Für jedes Normalintegral 1. Gattung u_k ist die Summe der Integrale, genommen zwischen zwei Punktsystemen, in welchen eine rationale Function R die Werthe 0^1 und ∞^1 annimmt, gleich 0.

(IV) Für jedes Normalintegral 2. Gattung t_{x_1} ist die Summe der Integrale, genommen zwischen zwei Punktsystemen, in welchen eine rationale Function R die Werthe 0^1 und ∞^1 annimmt, gleich einer rationalen Function der Coordinaten des Unstetigkeitspunktes x_1.

(V) Für jedes Normalintegral 3. Gattung $w_{x_1 x_2}$ ist die Summe der Integrale, genommen zwischen zwei Punktsystemen,

in welchen eine rationale Function R die Werthe 0^1 und ∞^1 annimmt, gleich dem Logarithmus einer rationalen Function der Coordinaten der Unstetigkeitspunkte x_1 und x_2.

Die Sätze III bis V gelten nach (10) nicht blos für die Normalintegrale, sondern auch für die allgemeinen Integrale der 1., 2., 3. Gattung; sie bilden das Abel'sche Theorem für die Integrale der drei Gattungen.

Die Gleichungen (7) und (12) lassen sich in folgender Weise umformen. Nach dem Vertauschungssatz der Integrale 3. Gattung (19) § 18 ist

$$\left(\frac{dw_{x_1 x_2}}{dx}\right)_{b_l} = \frac{d}{db_l}\int_{a_l}^{b_l} dw_{x_1 x_2} = \frac{d}{db_l}\int_{x_2}^{x_1} dw_{b_l a_l} = \int_{x_2}^{x_1} dt_{b_l}.$$

Die Gleichung (7) geht daher, wenn man noch x für x_1 und x_0 für x_2, ferner R und R_0 für $(R)_x$ und $(R)_{x_0}$ schreibt, über in

$$R - R_0 = \sum_l B_l \int_{x_0}^{x} dt_{b_l} \text{ [1]}. \tag{13}$$

Ebenso geht (12), wenn man den Vertauschungssatz der Integrale 3. Gattung anwendet, über in

$$\log R - \log R_0 = \sum_l \int_{x_0}^{x} dw_{b_l a_l}. \tag{14}$$

Die Gleichungen (13) und (14) sind nichts anderes, als die früher gefundenen Gleichungen (6) und (9) § 17. Sie enthalten die Darstellung einer rationalen Function durch Integrale 2. Gattung und des Logarithmus einer solchen Function durch Integrale 3. Gattung. Der Unterschied in der Form der Gleichung (14) von der früheren Gleichung (9) § 17, wo noch ein allgemeiner Periodicitätsmodul des Integrals 3. Gattung auftritt, erklärt sich daraus, dass hier die Integrationswege speciell, früher allgemein genommen waren.

Von Interesse ist noch folgende Bemerkung. Zwischen der algebraischen Gleichung (2) und der transcendenten Gleichung (8), die durch die Substitutionen $V = R$ und $V = \log R$ aus (10) § 18 gewonnen wurden (und ebenso zwischen den aus (2) und (8) durch Specialisirung abgeleiteten Gleichungen) besteht ein enger Zusammen-

1) Riemann, Ges. W. S. 100.

hang. Beide Gleichungen sagen dasselbe aus und lassen sich eine aus der andern ableiten. Führt man nämlich statt R eine Function r ein durch die Substitution

$$R = \frac{r-a}{r-b}, \tag{15}$$

so dass r in den m Punkten a_ι und b_ι bez. die Werthe a und b annimmt, so geht (8) über in

$$\sum_\iota \int_{a_\iota}^{b_\iota} dW + \sum_\lambda \mathsf{C}_\lambda \left(\log \frac{r-a}{r-b}\right)_{\xi_\lambda} - \sum_\lambda \mathsf{D}_\lambda \left(\frac{d \log}{dx} \frac{r-a}{r-b}\right)_{\xi_\lambda} = 0. \tag{16}$$

Differenzirt man nach b und berücksichtigt, dass nach (1) und (15)

$$\frac{db_\iota}{db} = \lim_{x=b_\iota} \frac{x-b_\iota}{r-b} = \left(\frac{dx}{dr}\right)_{b_\iota} = \left(\frac{dR}{dr} : \frac{dR}{dx}\right)_{b_\iota} = \frac{B_\iota}{b-a}, \tag{17}$$

so folgt:

$$\frac{1}{b-a} \sum_\iota B_\iota \left(\frac{dW}{dx}\right)_{b_\iota} + \sum_\lambda \mathsf{C}_\lambda \left(\frac{1}{r-b}\right)_{\xi_\lambda} - \sum_\lambda \mathsf{D}_\lambda \left(\frac{d}{dx} \frac{1}{r-b}\right)_{\xi_\lambda} = 0. \tag{18}$$

Dies ist aber nichts anderes als die Gleichung (2), gebildet für die Function $\frac{1}{r-b}$ statt für die Function R. Denn das Residuum dieser Function $(r-b)^{-1}$ für den Punkt b_ι ist grade der Werth (17).

Die Gleichung (18) lässt sich auf die Form bringen

$$\sum_\iota \left(\frac{dW}{dx} \frac{dx}{dr}\right)_{b_\iota} = \sum_\lambda \mathsf{C}_\lambda (b - r_\lambda)^{-1} - \sum_\lambda \mathsf{D}_\lambda \left(\frac{dr}{dx}\right)_{\xi_\lambda} (b - r_\lambda)^{-2}, \tag{19}$$

wo r_λ den Werth von r für $(\xi_\lambda, \eta_\lambda)$ bezeichnet. Sie stellt, wie schon bei (2) bemerkt wurde, das Abel'sche Theorem für das allgemeine Abel'sche Differential dar.

Es ist leicht, die Gleichung (19) direct herzuleiten, in derselben Weise, wie dies speciell für das Differential 1. Gattung (Gl. 7 § 13) geschah. In der That, da das Integral W nur in einfachen Punkten im Endlichen von T ∞ wird, so ist $\frac{dW}{dx}$ nach Gleichung (2a) § 17 von der Form $Q\Phi : F'y$, wo Φ eine adjungirte Function von $F = 0$ des $n-3^{\text{ten}}$ Grades und Q eine rationale, gebrochene Function von gleichem Grade im Zähler und Nenner ist, die ∞ wird in den Punkten $(\xi_\lambda, \eta_\lambda)$ und zwar nach (2) § 18 so, dass in der Umgebung von $(\xi_\lambda, \eta_\lambda)$:

$$\frac{dW}{dx} = \frac{Q\Phi}{F'y} = \mathsf{C}_\lambda (x - \xi_\lambda)^{-1} - \mathsf{D}_\lambda (x - \xi_\lambda)^{-2} + \mathsf{P}'_\lambda (x - \xi_\lambda). \tag{19a}$$

Man bilde nun, indem man die Function $R(x, y) = \varrho$ setzt, wie in (5) § 13 den Ausdruck

(20) $$\frac{Q\,\Phi}{F'y} \cdot \frac{dx}{d\varrho}$$

und führe in denselben ϱ als unabhängige Variable ein. Bezeichnet man die m Punkte, für die $R(x, y)$ einen bestimmten Werth ϱ annimmt, mit (x_l, y_l) $(l = 1, .., m)$, so ist die Summe

(21) $$\sum_{l=1}^{m} \left(\frac{Q\,\Phi}{F'y} \cdot \frac{dx}{d\varrho}\right)_{x_l}$$

nach den früheren Darlegungen (§ 13) eine e i n d e u t i g e Function von ϱ, da sie in jedem Punkt der ϱ-Ebene nur einen Werth annimmt, und sie ist weiter eine r a t i o n a l e Function von ϱ, da sie nur für eine endliche Zahl von Werthen ϱ und für jeden nur in endlicher Ordnung ∞ wird. Um den Ausdruck (21) als Function von ϱ darzustellen, hat man für jeden seiner ∞ Punkte die Art des ∞ Werdens zu untersuchen. Hierbei kommen in Betracht:

1) die Punkte $(\xi_\lambda, \eta_\lambda)$, für die Q ∞ wird und für die $\varrho = \varrho_\lambda$ sei,
2) die Punkte (b_l, y_{b_l}), für die $\varrho = \infty$ wird,
3) die Verzweigungspunkte und Doppelpunkte in der Fläche T und die Punkte $(x = \infty, y = \infty)$.

Nimmt ϱ einen solchen Werth an, dass einer der m Punkte (x_l, y_l) mit dem Punkte $(\xi_\lambda, \eta_\lambda)$ zusammenfällt, so wird das entsprechende Glied in (21) $= \infty^2$; es ist nämlich für

$$(x, y) = (\xi_\lambda, \eta_\lambda):\ \varrho - \varrho_\lambda = (x - \xi_\lambda)\left(\frac{d\varrho}{dx}\right)_{\xi_\lambda},$$

folglich ist nach (19a)

$$\left(\frac{Q\,\Phi}{F'y}\frac{dx}{d\varrho}\right)_{\xi_\lambda} = \mathbf{C}_\lambda\,(\varrho - \varrho_\lambda)^{-1} - \mathbf{D}_\lambda\left(\frac{d\varrho}{dx}\right)_{\xi_\lambda}(\varrho - \varrho_\lambda)^{-2}.$$

Wird $\varrho = \infty^1$, so wird jedes Glied in (21) also auch (21) selber $= 0^2$.

Denn für einen zu $\varrho = \infty$ gehörigen Punkt (b_l, y_{b_l}) verhält sich

$$\varrho \ \text{ wie } \ (x - b_l)^{-1}, \quad \frac{d\varrho}{dx} \ \text{ wie } \ (x - b_l)^{-2}$$

und folglich der Ausdruck (21) wie $(x - b_l)^{+2}$.

Für die Verzweigungspunkte, die Doppelpunkte und die Punkte $(x = \infty, y = \infty)$ gilt nach unseren Voraussetzungen dasselbe, wie in dem Falle der Differentiale 1. Gattung, d. h. der Ausdruck (21) nimmt in diesen Punkten einen endlichen, von 0 verschiedenen Werth an.

Fasst man dies zusammen, so erhält man für die Summe (21) als Function von ϱ folgende Darstellung durch Partialbrüche

$$\sum_l \left(\frac{Q\Phi}{F'y}\frac{dx}{d\varrho}\right)_{x_l} = \sum_\lambda \mathsf{C}_\lambda\,(\varrho-\varrho_\lambda)^{-1} - \sum_\lambda \mathsf{D}_\lambda \left(\frac{d\varrho}{dx}\right)_{\xi_\lambda}(\varrho-\varrho_\lambda)^{-2}. \quad (22)$$

Denn beide Seiten dieser Gleichung werden als Function von ϱ in derselben Weise ∞; ihre Differenz ist also eine Constante und diese Constante ist 0, da für $\varrho=\infty$, d. h. für $(x_l, y_l)=(b_l, y_{b_l})$ beide Seiten in (22) verschwinden.

Hiermit ist die Gleichung (19) direct hergeleitet; denn (22) unterscheidet sich von (19) nur durch die Schreibweise.

Bringt man in (22) den allen Gliedern der linken Seite im Nenner gemeinsamen Factor $d\varrho$ auf die rechte Seite und führt W ein, so erhält man

$$\sum_l (dW)_{x_l} = \sum_\lambda \left[\mathsf{C}_\lambda\,(\varrho-\varrho_\lambda)^{-1} - \mathsf{D}_\lambda \left(\frac{d\varrho}{dx}\right)_{\xi_\lambda}(\varrho-\varrho_\lambda)^{-2}\right] d\varrho, \quad (23)$$

(VI) d. h.: Wenn eine rationale Function $R(x, y)$ von der angegebenen Art denselben Werth ϱ annimmt in den m Punkten (x_l, y_l) $(l=1, .., m)$, so ist die Summe der oben definirten Abel'schen Differentiale dW, gebildet für diese m Punkte, gleich dem Differential einer Function von ϱ von der Form (23). (Abel'sches Theorem für das allgemeine Differential.)

Die Integration von (23) nach ϱ zwischen zwei Werthen von ϱ und den zugehörigen Werthsystemen (x_l, y_l) führt, wie leicht zu sehen, zurück zur Gleichung (16), d. h. zum Abel'schen Theorem für das allgemeine Abel'sche Integral.

§ 20. Das Abel'sche Theorem für Integrale 1. Gattung und seine Umkehrung.[1]

Das Abel'sche Theorem für Integrale 1. Gattung soll seiner Wichtigkeit halber noch eingehender besprochen werden. Dasselbe war enthalten in den Gleichungen (10) § 19 $(l=1, .., m)$:

$$\sum_l \int_{a_l}^{b_l} du_1 = 0, \; .., \; \sum_l \int_{a_l}^{b_l} du_p = 0, \quad (1)$$

1) Litteratur s. § 19.

(I) d. h.: Für jedes Integral 1. Gattung ist die Summe der m Integrale, genommen zwischen zwei Punktsystemen a_l und b_l, in welchen eine rationale Function $R(x, y)$ der Ordnung m die Werthe 0^1 und ∞^1 oder eine rationale Function $r(x, y)$ die Werthe a und b annimmt, gleich 0.

Hierbei ist vorausgesetzt, dass die Integrationswege zwischen den Punkten a_l und b_l die Querschnitte a_i, b_i $(i = 1, .., p)$ nicht schneiden[1]).

Wählt man statt der m Anfangswerthe b_l, die einem bestimmten Werthe b von r entsprechen, ganz beliebige m Anfangswerthe b_l^0, so nehmen die Gleichungen (1) die Form an

$$\sum_l \int_{b_l^0}^{b_l} du_1 = c_1, \; .., \; \sum_l \int_{b_l^0}^{b_l} du_p = c_p, \tag{2}$$

wo $c_1, .., c_p$ Constanten sind, die nur von den unteren Grenzen der Integrale abhängen. Die Gleichung (2) lautet in Worten:

(II) Für jedes Integral 1. Gattung ist die Summe der Integrale, erstreckt von beliebigen festen Anfangspunkten b_l^0 bis zu einem System von Punkten b_l, in welchen eine rationale Function $r(x, y)$ einen bestimmten Werth b annimmt, constant, d. h. unabhängig von diesem Werth b.

Setzt man $r(x, y)$ in die Form $r_1(x, y) : r_2(x, y)$, so sind die Punkte b_l diejenigen Punkte in T, für welche $r_1(x, y) - b r_2(x, y) = 0$ ist, mit Ausschluss der Punkte, für welche gleichzeitig $r_1(x, y) = 0$ und $r_2(x, y) = 0$ ist. Da nun die Constanten c_k in (2) unabhängig von b sind, da ferner b ein beliebiger Coefficient in der Gleichung $r_1 - b r_2 = 0$ ist und dasselbe für jeden Coefficienten dieser Gleichung gelten muss, so folgt als dritte Form des Abel'schen Theorems:

(III) Für jedes Integral 1. Gattung ist die Summe der Integrale, erstreckt von beliebigen, festen Punkten bis zu solchen Punkten von T, in denen eine beliebige rationale Function von (x, y) verschwindet, constant, d. h. unabhängig von den Coefficienten dieser rationalen Function.

Deutet man die Gleichung $F(x, y) = 0$ als Curve vom Grade n und vom Geschlecht p, so lassen sich die Sätze (I) und (III) geometrisch so aussprechen:

---

1) Es ist wohl nicht zu befürchten, dass die vorübergehende Bezeichnung von Punkten einerseits und Querschnitten andrerseits durch dieselben Buchstaben a, b zu Verwechslungen führen könne.

(Ia) Für jedes Integral 1. Gattung ist die Summe der Integrale, genommen zwischen zwei Punktsystemen a_l und b_l, in welchen zwei algebraische Curven desselben Grades die Curve $F(x, y) = 0$ schneiden, gleich 0.

(IIIa) Für jedes Integral 1. Gattung ist die Summe der Integrale, erstreckt von beliebigen Anfangspunkten bis zu einem System von Punkten, in welchen eine algebraische Curve C die Curve $F(x, y) = 0$ schneidet, constant, d. h. unabhängig von den Coefficienten der Curve C.

Lässt man in (1) die Voraussetzung fallen, dass die Integrationswege zwischen den Punkten a_l und b_l die Querschnitte a_i, b_i nicht schneiden, lässt also jene Integrationswege ganz beliebig in T verlaufen, nur so, dass sie für die p Integrale u_k dieselben sind, so hat man die linken Seiten in (1) je um eine Summe von ganzzahligen Vielfachen der Periodicitätsmoduln des betreffenden Integrales u_k zu vermehren, wobei die Zahlencoefficienten für alle p Gleichungen dieselben sind. Bei allgemeinen Integrationswegen treten somit an Stelle von (1) die Gleichungen ($k = 1, \ldots, p$):

$$\sum_l \int_{a_l}^{b_l} du_k = \sum_i m_i a_{ik} + n_k \pi i, \tag{3}$$

wo die ganzen Zahlen m und n von den gewählten Integrationswegen abhängen. Der Ausdruck auf der rechten Seite der p Gleichungen (3) bildet ein System von gleichzeitigen oder simultanen Periodicitätsmoduln der p Normalintegrale u_k.

Die Hauptbedeutung des Abel'schen Theorems für Integrale 1. Gattung liegt nun in seiner Umkehrbarkeit, oder in dem Satze:

(IV) Sind $2m$ Punkte a_l und b_l in T so beschaffen, dass sie den p Gleichungen (3) genügen, so existirt immer eine (und abgesehen von einem constanten Factor nur eine) rationale Function $R(x, y)$ der Ordnung m, für welche die m Punkte a_l die 0^1 und die m Punkte b_l die ∞^1 Punkte sind.

Zum Beweise[1]) bilde man den Ausdruck

$$\Omega = \sum_l \int_{x_0}^{x} dw_{b_l a_l} + 2 \sum_i m_i \int_{x_0}^{x} du_i + \Omega_0, \tag{4}$$

wo $w_{b_l a_l}$ ein Normalintegral 3. Gattung mit den Unstetigkeitspunkten b_l und a_l, ferner m_i ($i = 1, \ldots, p$) ganze Zahlen und zwar dieselben

1) C. Neumann, Vorlesungen über Riemann's Theorie der Abel'schen Integrale 2. A. Leipzig 1884. S. 275.

Zahlen, wie in den Gleichungen (3) und Ω_0 eine beliebige Constante. Der Ausdruck (4) stellt ein Abel'sches Integral von besonderer Art dar; er wird nämlich nur logarithmisch ∞ in den Punkten b_l und a_l und zwar bez. wie $-\log(x-b_l)$ und $+\log(x-a_l)$; er hat also an den in T von dem Punkte O nach den Punkten b_l und a_l gelegten Schnitten $\mathfrak{L}_{b_l}$ und $\mathfrak{L}_{a_l}$ (Fig. 8. S. 104) die Periodicitätsmoduln $-2i\pi$ und $+2i\pi$. Ferner ist der Periodicitätsmodul von Ω an dem Querschnitt a_k gleich $m_k 2i\pi$ und von dem Querschnitt b_k nach (15) § 18 $= 2\sum_l \int_{b_l}^{a_l} du_k + 2\sum_i m_i a_{ik}$, d. h. wenn die Integrationswege wie in (3) gewählt werden $= -n_k\, 2i\pi$. Es sind also die sämmtlichen Periodicitätsmoduln von Ω ganzzahlige Vielfache von $2i\pi$. Hieraus folgt, dass Ω der Logarithmus einer rationalen Function mit den ∞^1 Punkten b_l und den 0^1 Punkten a_l ist. Denn die Function e^Ω wird $=\infty^1$ in b_l wie $B_l(x-b_l)^{-1}$ und $=0^1$ in a_l wie $A_l(x-a_l)^{+1}$, wo B_l und A_l gewisse Constanten sind, und ist sonst in der Fläche T allenthalben stetig, da sie an den Querschnitten a_i, b_i und den Linien $\mathfrak{L}$ stetig bleibt. Bezeichnet man die rationale Function e^Ω mit R, so ist R bis auf einen constanten Factor R_0 bestimmt durch die Gleichung:

$$\log R - \log R_0 = \sum_l \int_{x_0}^{x} dW_{b_l a_l} + 2\sum_i m_i \int_{x_0}^{x} du_i.$$

Hiermit ist der obige Satz bewiesen. Aus ihm ergibt sich weiter der wichtige Satz:

(V) Systeme von p Summen, gebildet aus je einem der p Integrale 1. Gattung, mit μ beliebigen unteren und oberen Grenzpunkten, die für jedes der p Integrale die nämlichen sind, lassen sich eindeutig und algebraisch auf Systeme von p ähnlich gebildeten Summen mit p unteren und oberen Grenzpunkten, von denen die ersteren Punkte gegeben sind, zurückführen, oder es lassen sich eindeutig und algebraisch die Gleichungen erfüllen ($k = 1, \ldots, p$):

$$\sum_{\lambda=1}^{\mu} \int_{\xi_\lambda^0}^{\xi_\lambda} du_k \equiv \sum_{i=1}^{p} \int_{x_i^0}^{x_i} du_k \tag{6}$$

durch Bestimmung der p Punkte x_i, während die Punktsysteme ξ_λ, ξ_λ^0, x_i^0 beliebig gegeben sind.

Das Congruenzzeichen $\equiv$ bedeutet, dass, je nach den Integrations-

wegen, auf der einen oder der andern Seite in (6) noch ein Ausdruck von der Form der rechten Seite in (3) hinzutreten kann, oder dass die beiden Seiten in (6) bis auf ein simultanes System von Periodicitätsmoduln der p Normalintegrale 1. Gattung einander gleich sind.

In den Gleichungen (6) sind die Punkte ξ_λ, ξ_λ^0, x_i^0 gegeben. Um die p Punkte x_i zu finden, bringe man alle Glieder in (6) auf die linke Seite. Dann existirt nach Satz IV eine rationale Function $\Psi(x, y) : X(x, y)$ von (x, y), die in den $\mu + p$ Punkten $\xi_1, .., \xi_\mu$; $x_1^0, .., x_p^0$ gleich ∞^1 und in den $\mu + p$ Punkten $\xi_1^0, .., \xi_\mu^0$; $x_1, .., x_p$ gleich 0^1 wird. Zur Bildung dieser Function bestimme man nach der Methode des § 12 (Fall 1) eine ganze Function $X(x, y)$ von hinreichend hohem Grade, die $F(x, y) = 0$ adjungirt ist und für die $\mu + p$ Punkte $\xi_1, .., \xi_\mu$; $x_1^0, .., x_p^0$ verschwindet. Die weiteren Nullpunkte dieser Function seien $\varepsilon_1, .., \varepsilon_s$; sie dienen als Hilfspunkte. Von ihnen sind nach (I § 12) noch $s - p$ willkürlich, die letzten p bestimmt. Alsdann bilde man eine zweite, ganze Function $\Psi(x, y)$ von demselben Grade wie X, die ebenfalls $F = 0$ adjungirt ist und die in den s Hilfspunkten $\varepsilon_1, .., \varepsilon_s$ und ausserdem in den μ Punkten $\xi_1^0, .., \xi_\mu^0$ verschwindet. Hierdurch ist die Function $\Psi(x, y)$ vollkommen bestimmt nach (I § 12). Zu ihrer Bildung sind also die p Punkte $x_1, .., x_p$ gar nicht nöthig. Diese Punkte sind vielmehr die p letzten und abhängigen 0^1 Punkte von $\Psi(x, y)$. Die p gesuchten Punkte $x_1, .., x_p$ ergeben sich daher eindeutig und algebraisch als Functionen der p Punkte x_i^0 und der 2μ Punkte ξ_λ und ξ_λ^0, indem man die p letzten Punkte aufsucht, die $\Psi(x, y) = 0$ mit $F(x, y) = 0$ ausser den Doppelpunkten von $F = 0$, den Hilfspunkten ε und den μ Punkten ξ_λ^0 gemein hat. (q. e. d.)

Da die Coefficienten der rationalen Function X für die Coordinaten eines jeden der zwei Punktsysteme ξ_λ und x_i^0 und folglich die der Function Ψ für die Coordinaten eines jeden der drei Punktsysteme ξ_λ, x_i^0 und ξ_λ^0 rational und symmetrisch sind, so folgt weiter:

(VI) Wenn 4 Punktsysteme $\xi_\lambda, \xi_\lambda^0; x_i, x_i^0$ $(\lambda = 1, .., \mu; i = 1, .., p)$ durch p Relationen der Form (6) verbunden sind, so sind die rationalen und symmetrischen Functionen der Coordinaten der p Punkte x_i rationale und symmetrische Functionen der Coordinaten eines jeden der 3 anderen Punktsysteme.

In ähnlicher Weise wie für die Integrale 1. Gattung lässt sich auch für die Differentiale 1. Gattung das Abel'sche Theorem

umkehren. Das letztere wurde (§ 13 Satz IV; § 17 Gl. 7) in der Form ausgesprochen:

(VII) Zwischen den m ∞^1 Punkten b_l und den zugehörigen Residuen B_l einer rationalen Function $R(x, y)$ der Ordnung m bestehen die p algebraischen Gleichungen ($k = 1, .., p$):

$$\sum_l B_l \left(\frac{du_k}{dx}\right)_{b_l} = 0. \tag{7}$$

Die Umkehrung dieses Satzes lautet:

(VIII) Sind m Punkte $b_1, .., b_m$ in T und m zugehörige Grössen $B_1, .., B_m$ so beschaffen, dass sie den p Gleichungen (7) genügen, so existirt immer eine (und abgesehen von einer additiven Constanten nur eine) rationale Function $R(x, y)$ von der Ordnung m, für welche die m Punkte b_l die ∞^1 Punkte und die m Grössen B_l die zugehörigen Residuen sind.

Bildet man nämlich aus den $2m$ gegebenen Elementen b_l und B_l, indem man unter t_{b_l} ein Normalintegral 2. Gattung mit dem Unstetigkeitspunkt b_l und unter R_0 eine Constante versteht, den Ausdruck

$$\sum_l B_l t_{b_l} + R_0, \tag{8}$$

so stellt derselbe ein Abel'sches Integral von besonderer Art dar. Es sind nämlich die Periodicitätsmoduln von (8) nicht nur an den p Querschnitten a_k, sondern gleichzeitig auch in Folge der Bedingungen (7) an den p Querschnitten b_k sämmtlich gleich 0. Ausserdem wird die Function (8) nur algebraisch ∞ in den Punkten $b_1, .., b_m$ und zwar in b_l wie $B_l(x - b_l)^{-1}$. Hieraus folgt, dass (8) eine rationale Function mit den Unstetigkeitspunkten b_l und den zugehörigen Residuen B_l ist. Bezeichnet man diese Function mit R, so hat man

$$R - R_0 = \sum_l B_l t_{b_l}, \tag{9}$$

womit R bis auf eine additive Constante R_0 bestimmt ist.

An Satz (IV) schliessen sich folgende Bemerkungen an. Sind $(x_1, y_1), .., (x_m, y_m)$ m Punkte, in welchen eine rationale Function R der Ordnung m denselben Werth annimmt, so sind die Gleichungen der Abel'schen Theorems für Differentiale 1. Gattung nach (8) § 13, wenn ($k = 1, .., p$; $l = 1, .., m$):

$$\sum_l \left(\frac{du_k}{dx}\right)_{x_l} dx_l = 0. \tag{10}$$

Unter der Voraussetzung, dass $m > p$ und dass die p Gleichungen (10) linear unabhängig seien, definiren dieselben p der Punkte (x_ι, y_ι) als Functionen der $m - p$ übrigen. Die Aufgabe, diese p Functionen herzustellen, wird ebenfalls durch den Satz (IV) gelöst. Man wähle nämlich ganz beliebig m Punkte b_ι und bilde nach (§ 12 Fall 1) ähnlich wie zu den Gleichungen (6) eine rationale Function $\Psi(x, y) : X(x, y)$ derart, dass $X = 0^1$ wird in den m Punkten b_ι und gewissen Hilfspunkten ε, und $\Psi = 0^1$ wird in denselben Hilfspunkten ε und den $m - p$ ersten und unabhängigen Punkten (x_ι, y_ι). Hierdurch ist die Function Ψ bis auf einen constanten Factor bestimmt. Die Coordinaten der p letzten 0^1 Punkte (x_ι, y_ι) von $\Psi = 0$ sind algebraische Functionen der Coordinaten der p ersten, unabhängigen Punkte (x_ι, y_ι) und der m Punkte b_ι. Das so bestimmte System der p letzten und der $m - p$ ersten Punkte (x_ι, y_ι) genügt den p Gleichungen (10). Da die m Punkte b_ι willkürlich waren, so hat die obige Aufgabe unendlich viele Lösungen. Man hat hiernach den Satz:

(IX) Ein System von m Punkten (x_ι, y_ι), das mit seinen Differentialen dx_ι den p Gleichungen (10) genügt, kann definirt werden als das System der gemeinsamen Schnittpunkte von $F(x, y) = 0$ mit einer Curve $(\Psi = 0)$, deren Coeffienten so sich ändern, dass alle übrigen Schnittpunkte constant bleiben.

Man kann mit Jacobi[1]) die Gleichungen (10) als ein System von p Differentialgleichungen ansehen, welches p der Punkte (x_ι, y_ι) als Functionen der $m - p$ unabhängigen Punkte (x_ι, y_ι) definirt. Da in den Gleichungen (10) die Variabeln getrennt sind, so lassen sich die p Integralgleichungen zunächst in Form von Quadraturen, also in transcendenter Form anschreiben, in dem Sinne, dass zu den m Punkten (x_ι, y_ι) m beliebig gegebene Anfangswerthe b_ι gehören, von denen die p letzten als Integrationsconstanten anzusehen sind, während die $m - p$ ersten numerisch sind. Die obigen Betrachtungen leisten aber die Integration des Systemes (10) in demselben Sinne auch in rein algebraischer Form. Denn mittels der obigen Gleichung $\Psi = 0$ stellen sich die p letzten und abhängigen Punkte (x_ι, y_ι) als Functionen der $m - p$ ersten, unabhängigen Punkte (x_ι, y_ι) dar und dabei können von den m in diese Lösungen eingehenden Punkten b_ι die $m - p$ ersten als numerisch gegeben, die p letzten als die p Integrationsconstanten angesehen werden.

Sind die Gleichungen (10) linear abhängig, derart, dass q der-

---

1) Jacobi, Journal für Math. Bd. 9. S. 402 (1832).

selben eine identische Folge der übrigen sind, so hat man in (10) ein System von $p - q$ Differentialgleichungen und es ist die Aufgabe, die $p - q$ abhängigen Punkte (x_l, y_l) als Functionen der $m - p + q$ unabhängigen Punkte (x_l, y_l) darzustellen. Dabei können den m Punkten (x_l, y_l) m Anfangspunkte b_l entsprechen, die aber jetzt nicht mehr beliebig, sondern Nullpunkte derselben q linear unabhängigen Φ-Functionen sind. Bildet man nun nach (§ 12 Fall 2) eine rationale Function $\Phi : \Phi_0$ derart, dass Φ_0 in den m Punkten b_l und $2p - 2 - m$ Hilfspunkten, Φ in denselben Hilfspunkten und den $m - p + q$ ersten Punkten (x_l, y_l) verschwindet, so stellen sich die $p - q$ letzten Punkte (x_l, y_l), welche $\Phi = 0$ mit $F = 0$ (abgesehen von den Doppelpunkten und den Hilfspunkten) gemein hat, als Functionen der $m - p + q$ ersten, unabhängigen Punkte (x_l, y_l) und der m Punkte b_l dar, womit das System (10) für den vorliegenden Fall algebraisch integrirt ist.

Ist z. B.[1]) $q = 1$; $m = 2p - 2$ und bezeichnet man die $p - 1$ unabhängigen Punkte (x_l, y_l) durch $x_1, .., x_{p-1}$, die $p-1$ abhängigen durch $\xi_1, .., \xi_{p-1}$, so wird die Aufgabe, die Punkte ξ_i als Functionen der Punkte x_i so zu bestimmen, dass die p Gleichungen $(k = 1, .., p)$:

$$\sum_{i=1}^{p-1} du_k^{(x_i)} + \sum_{i=1}^{p-1} du_k^{(\xi_i)} = 0 \tag{11}$$

erfüllt sind, gelöst, indem man eine Function Φ bildet, die in den $p - 1$ Punkten x_i verschwindet. Dann sind die $p - 1$ letzten 0^1 Punkte von Φ (ausser den Doppelpunkten) die den Gleichungen (11) genügenden Punkte ξ_i.

---

1) Riemann, Ges. W. S. 120.

Vierter Abschnitt.

Die eindeutigen Transformationen.

Die bisherigen Betrachtungen, die eine bestimmte Gleichung $F(x, y) = 0$ vom Grade n und vom Geschlecht p zur Grundlage hatten, lassen sich bedeutend verallgemeinern. Es gibt nämlich unendlich viele Gleichungen $F_1(x_1, y_1) = 0$, $F_2(x_2, y_2) = 0$.., die mit $F(x, y) = 0$ äquivalent sind und für die genau dieselben Sätze und Darstellungen bezüglich der rationalen Functionen und ihrer Integrale gelten, wie für $F(x, y) = 0$. Eine solche Gleichung z. B. $F_1(x_1, y_1) = 0$ ergibt sich aus $F(x, y) = 0$ durch eine sogenannte eindeutige, rationale Transformation, d. i. eine Transformation, bei der sich ebensowohl (x_1, y_1) rational durch (x, y) wie umgekehrt (x, y) rational durch (x_1, y_1) ausdrückt. Die Gesammtheit der durch solche Transformation in einander überführbaren Gleichungen, wie $F = 0$, $F_1 = 0$.., heisst eine zusammengehörige Klasse von algebraischen Gleichungen. Für die Theorie der rationalen Functionen und Abel'schen Integrale sind diejenigen Formen besonders wichtig, die für alle Gleichungen der Klasse die nämlichen oder die der eindeutigen Transformation gegenüber invariant sind. Man unterscheidet:

1) Invariante Constanten, d. h. solche zu $F(x, y) = 0$ gehörige, constante Grössen, deren numerischer Werth bei der Ueberführung in $F_1(x_1, y_1) = 0$ ungeändert bleibt; es sind dies:
   a) die Geschlechtszahl p von $F = 0$ oder die Zahl $2p$ der Querschnitte in der Verzweigungsfläche T;
   b) gewisse aus den Coefficienten von $F = 0$ gebildete Combinationen, welche die Moduln der zu $F = 0$ gehörigen Klasse heissen.
2) Invariante Functionen, d. h. solche zu $F = 0$ gehörige Functionen von (x, y), die in gleich gebildete zu $F_1 = 0$ gehörige Functionen von (x_1, y_1) übergehen; es sind dies:
   c) die Quotienten der zu $F = 0$ gehörigen Φ-Functionen oder adjungirten Functionen $(n - 3)^{\text{ten}}$ Grades und die mit ihrer

Benutzung gebildeten, an Stelle von $F(x, y) = 0$ tretenden Normalformen;

d) die zu $F = 0$ gehörigen, rationalen Functionen und Abel'schen Integrale, sobald dieselben allein durch Φ-Functionen dargestellt sind.

Dieser Stoff ist in den nächsten §§ zu behandeln.

§ 21. Die eindeutige Transformation. Hilfssätze.

Man gelangt zu der eindeutigen Transformation[1]) einer gegebenen Gleichung vom Grade n

$$F(x, y) = 0 \tag{1}$$

in folgender Weise. Seien η_1, η_2, η_3 ganze, rationale und linear unabhängige Functionen von (x, y) von demselben Grade σ, derart, dass für jedes Glied $x^i y^k$ in diesen Functionen die Dimension $i + k \leqq \sigma$ ist und seien die Quotienten

$$x_1 = \frac{\eta_1(x, y)}{\eta_3(x, y)}, \qquad y_1 = \frac{\eta_2(x, y)}{\eta_3(x, y)} \tag{2}$$

Functionen von gleicher Ordnung. Eliminirt man nun die Variabeln (x, y) aus (1) und (2), so tritt an Stelle von (1) eine Gleichung von gewissem Grade n_1 in den neuen Variabeln (x_1, y_1)

$$F_1(x_1, y_1) = 0. \tag{3}$$

Zugleich ergeben sich im Laufe der Elimination im Allgemeinen x und y als rationale Functionen von (x_1, y_1) in der Form

$$x = \frac{\vartheta_1(x_1, y_1)}{\vartheta_3(x_1, y_1)}, \qquad y = \frac{\vartheta_2(x_1, y_1)}{\vartheta_3(x_1, y_1)} \tag{4}$$

und von der Beschaffenheit, dass die ganzen, rationalen Functionen $\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3$ in (x, y) von gewissem Grade ϱ und die Quotienten (4) von gleicher Ordnung sind.

In der That kann man, um (3) zu erhalten, zuerst aus (1) und den beiden Gleichungen (2) durch Elimination von y zwei Gleichungen $P(x, x_1) = 0$, $Q(x, y_1) = 0$ und aus diesen durch Elimination von x die Gleichung (3) bilden. Man erhält aber zugleich aus $P = 0$, $Q = 0$ x rational dargestellt in (x_1, y_1), also die erste Gleichung (4) durch dasselbe Verfahren, das S. 65 angewandt wurde, um die y-Ordinate eines Schnittpunktes zweier Curven $F = 0$ und $N = 0$ rational in der zugehörigen x-Ordinate auszudrücken.

---

1) Riemann, Ges. W. S. 111 ff. Clebsch-Gordan, Abel'sche Functionen S. 50 ff.

Der Uebergang von (1) zu (3) mittels der Gleichungen (2) oder (4) heisst eine eindeutige Transformation zwischen $F=0$ und $F_1=0$. Denn es gehört zu jedem Punkt (x, y) von $F=0$ nach (2) nur ein Punkt (x_1, y_1) von $F_1=0$ und umgekehrt zu jedem Punkt (x_1, y_1) von $F_1=0$ nach (4) nur ein Punkt (x, y) von $F=0$. Daher ist auch $F_1(x_1, y_1)=0$ irreducibel, wenn $F(x, y)=0$ diese Eigenschaft hat.

In die Formeln (1—4) für die eindeutige Transformation führen wir zur weiteren Behandlung homogene Coordinaten ein. Ersetzt man x und y durch $\frac{x_1}{x_3}$ und $\frac{x_2}{x_3}$, x_1 und y_1 durch $\frac{y_1}{y_3}$ und $\frac{y_2}{y_3}$ und schreibt den Grad einer homogenen Form über die Variabeln, so besteht die eindeutige Transformation in der Verbindung der Gleichungen

$$F(\overline{x_1, x_2, x_3}^{\,n})=0 \quad \text{und} \quad \nu y_i=\eta_i(\overline{x_1, x_2, x_3}^{\,\sigma}) \qquad (i=1, 2, 3), \tag{5}$$

welche durch Elimination der x_i übergehen in die neuen Gleichungen

$$G(\overline{y_1, y_2, y_3}^{\,n_1})=0 \quad \text{und} \quad \mu x_i=\vartheta_i(\overline{y_1, y_2, y_3}^{\,\varrho}) \qquad (i=1, 2, 3). \tag{6}$$

Die Proportionalitätsfactoren μ und ν sind unbestimmte Functionen der x_i oder y_i.

Trägt man die Werthe der y_i aus (5) in $G=0$ ein, so erhält man

$$\nu^{n_1} G(\overline{y_1, y_2, y_3}^{\,n_1})=G(\overline{\eta_1, \eta_2, \eta_3}^{\,n_1})=F(\overline{x_1, x_2, x_3}^{\,n})\,\mathfrak{L}(\overline{x_1, x_2, x_3}^{\,n_1\sigma-n}), \tag{7}$$

wo $\mathfrak{L}$ ein Factor vom Grade $n_1\sigma-n$ in den x_i ist, der sich nothwendig absondern muss. Denn andernfalls würde nach (7) $F(x_1, x_2, x_3)$ eine Function der η_1, η_2, η_3 sein und der Eliminationsprocess würde die x als Functionen der y nicht anders geben, als durch Auflösung der drei letzten Gleichungen (5), mithin im Allgemeinen mit Irrationalitäten behaftet. Die Transformation wäre also nicht eindeutig umkehrbar. Die Curve $\mathfrak{L}=0$ wird in § 22 näher untersucht.

Die nächsten Fragen sind die nach dem Grade n_1 und der Zahl r_1 der Doppelpunkte der transformirten Gleichung $G=0$. Die Zahl n_1 ist leicht zu bestimmen. Die drei Curven $\eta_i=0$ mögen durch r_0 von den r Doppelpunkten δ von $F=0$ und ausserdem durch s einfache Punkte ε von $F=0$ hindurchgehen. Der Grad n_1 von $G=0$ ist gleich der Zahl der Schnittpunkte (y) von $G=0$ mit einer geraden Linie $a_1y_1+a_2y_2+a_3y_3=0$. Diesen Schnittpunkten entsprechen eindeutig diejenigen Schnittpunkte (x) von $F=0$ mit der Curve $a_1\eta_1+a_2\eta_2+a_3\eta_3=0$, die nicht in die festen Punkte δ

und ε fallen, sondern beweglich sind. Daher ist, weil die Doppelpunkte zweifach zählen,

(8) $$n_1 = n\sigma - 2r_0 - s.$$

Da die hier bestimmte Zahl n_1 zugleich angibt, in wieviel Punkten von $F = 0$, die nicht in die Punkte δ und ε fallen, die Functionen η_1, η_2, η_3 verschwinden, so hat man den Satz:

(I) Der Grad n_1 der transformirten Gleichung $G = 0$ ist die Ordnung der transformirenden Functionen (2).

Die Frage nach der Zahl r_1 der Doppelpunkte der transformirten Gleichung wird im folgenden § (Gl. 1) beantwortet. Zu ihrer Behandlung sind einige Vorbereitungen nöthig, die wir hier erledigen. Zunächst ist eine Bemerkung[1]) über die Doppelpunkte von $F = 0$ und die ihnen entsprechenden Punkte von $G = 0$ von Wichtigkeit. Aus (6) folgt:

(9) $$\nu dy_i + y_i d\nu = \frac{\partial \eta_i}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \eta_i}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial \eta_i}{\partial x_3} dx_3 \quad (i = 1, 2, 3).$$

Ist nun (x) ein Doppelpunkt der Curve $F = 0$, für den die drei η_i nicht zugleich verschwinden, so ist nach (5) auch ν nicht $= 0$ und folglich entspricht nach (9) jeder Fortschrittsrichtung oder jedem System der dx auf $F = 0$ eine Fortschrittsrichtung oder ein System der dy auf $G = 0$, d. h. dem Doppelpunkt auf $F = 0$ entspricht ein Doppelpunkt auf $G = 0$.

Ist dagegen (x) ein Doppelpunkt auf $F = 0$, für den die drei η_i einfach verschwinden, so ist für denselben auch $\nu = 0$ und jeder der beiden Fortschrittsrichtungen (dx) auf $F = 0$ entspricht ein Werthsystem y_i auf $G = 0$, d. h. dem Doppelpunkt auf $F = 0$ entspricht ein Punktepaar auf $G = 0$. Dies gibt den Satz:

(II) Jedem Doppelpunkt auf $F = 0$, durch den die drei Curven $\eta_i = 0$ nicht hindurchgehen, entspricht ein Doppelpunkt auf $G = 0$; dagegen jedem Doppelpunkt auf $F = 0$, durch den die drei Curven $\eta_i = 0$ hindurchgehen, entspricht ein Punktepaar auf $G = 0$.

Hieraus folgt unmittelbar:

(III) Sind η_1, η_2, η_3 in (5) adjungirte Functionen von $F = 0$, so sind auch ϑ_1, ϑ_2, ϑ_3 in (6) adjungirte Functionen von $G = 0$.

---

1) Clebsch-Gordan, Abel'sche Functionen S. 56.

Denn sind η_i adjungirte Functionen von $F = 0$, d. h. verschwinden sie für alle Doppelpunkte von $F = 0$, so entspricht einem Doppelpunkt von $F = 0$ niemals ein Doppelpunkt auf $G = 0$ (nach II), folglich auch einem Doppelpunkt auf $G = 0$ niemals ein Doppelpunkt auf $F = 0$, d. h. die Functionen ϑ_i müssen adjungirte Functionen von $G = 0$ sein.

Wir machen in den folgenden Untersuchungen zur Vereinfachung die Voraussetzung, dass die η_i adjungirte Functionen von F seien. Die Curven $\eta_i = 0$ sollen also durch sämmtliche r Doppelpunkte δ von $F = 0$ und sie mögen ausserdem durch s einfache Punkte ε von $F = 0$ hindurchgehen. Dann ist der Grad n_1 der transformirten Gleichung $G = 0$ nach (8)

$$n_1 = n\sigma - 2r - s. \tag{10}$$

Wir beweisen ferner zwei Hilfssätze[1]), die im Folgenden zur Verwendung kommen.

Sind A, B, C drei beliebige, homogene Functionen von x_1, x_2, x_3 bez. vom Grade a, b, c und setzt man $A'(x_i) = A_i$, so heisst bekanntlich die Functionaldeterminante

$$\varDelta = \Sigma \pm A_1 B_2 C_3 \tag{11}$$

die Jacobische Function von A, B, C oder $\varDelta = 0$ die Jacobische Curve von $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$. Für sie gelten die Sätze:

(IV) Die Jacobische Curve $\varDelta = 0$ der drei Curven $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$ geht durch jeden gemeinsamen Schnittpunkt dieser drei Curven; sie hat in einem solchen Punkt einen Doppelpunkt, wenn der Grad der drei Curven derselbe ist.

(V) Die Jacobische Curve $\varDelta = 0$ berührt in einem gemeinsamen Punkt der drei Curven $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$ die Curve $A = 0$, wenn $B = 0$ und $C = 0$ von gleichem Grade sind und hat, wenn ausserdem $A = 0$ einen solchen Punkt zum Doppelpunkt hat, diesen Punkt ebenfalls zum Doppelpunkt derart, dass ihre Tangenten mit denen von $A = 0$ zusammenfallen.

Es ist nämlich, wenn c_1, c_2, c_3 drei beliebige Constanten sind,

---

1) Hesse, Journ. für Math. Bd. 41 S. 286 (1850). Clebsch, Journ. für Math. Bd. 64 S. 215 (1864). Clebsch-Gordan, Abel'sche Functionen S. 60 ff. (1866).

$$(12)\qquad \varDelta\Sigma c_i x_i = \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & 0 \\ B_1 & B_2 & B_3 & 0 \\ C_1 & C_2 & C_3 & 0 \\ c_1 & c_2 & c_3 & \Sigma c_i x_i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & -aA \\ B_1 & B_2 & B_3 & -bB \\ C_1 & C_2 & C_3 & -cC \\ c_1 & c_2 & c_3 & 0 \end{vmatrix}.$$

Hieraus folgt, dass in einem Punkt x, für den A, B, C verschwinden, auch $\varDelta = 0$ wird. Ferner erhält man für einen solchen Punkt durch Differentiation von (12) nach x_k, wenn zugleich $b = c$ ist,

$$(13)\qquad \frac{\partial \varDelta}{\partial x_k}\Sigma c_i x_i = (a-b)\frac{\partial A}{\partial x_k}\Sigma \pm B_1 C_2 c_3 \qquad (k = 1, 2, 3).$$

Ist nun $a = b$, so folgt $\frac{\partial \varDelta}{\partial x_k} = 0$, d. h. $\varDelta = 0$ hat in dem gemeinsamen Punkt einen Doppelpunkt, womit (IV) bewiesen ist. Ist aber $a \gtrless b$, so folgt, dass sich $\varDelta = 0$ und $A = 0$ in dem betrachteten Punkt berühren. Ist der Punkt zugleich Doppelpunkt von $A = 0$, so ist er nach (13) auch Doppelpunkt von $\varDelta = 0$. Unter dieser Voraussetzung, d. h. wenn $\frac{\partial A}{\partial x_k} = 0$ und $\frac{\partial \varDelta}{\partial x_k} = 0$ $(k = 1, 2, 3)$ ist, erhält man aus (13) durch Differentiation nach x_l

$$(14)\qquad \frac{\partial^2 \varDelta}{\partial x_k\,\partial x_l}\Sigma c_i x_i = (a-b)\frac{\partial^2 A}{\partial x_k\,\partial x_l}\Sigma \pm B_1 C_2 c_3,$$

d. h. die Tangenten des Doppelpunktes von $\varDelta = 0$ fallen mit den Tangenten des Doppelpunktes von $A = 0$ zusammen, womit (V) bewiesen ist.

Die Sätze (IV) und (V) sind gleichbedeutend mit dem folgenden:

(VI) Die Functionaldeterminante von drei Functionen A, B, C verschwindet in 1. Ordnung für einen gemeinsamen Nullpunkt dieser drei Functionen; sie verschwindet in 2. Ordnung in einem solchen Punkt, wenn B und C von gleichem Grade sind und in 3. Ordnung, wenn der Punkt ausserdem ein Doppelpunkt von $A = 0$ ist.

Ist nämlich x der betrachtete Punkt und ξ ein beliebiger anderer Punkt, sind also $x_i + \lambda\xi_i$ die Coordinaten eines Punktes der Verbindungslinie von x und ξ, so sind die den Schnittpunkten der Geraden x, ξ mit $\varDelta = 0$ und $A = 0$ entsprechenden Parameter λ zu bestimmen aus den Gleichungen

$$(15)\left\{\begin{aligned} &\varDelta + \lambda\Sigma\xi_k\frac{\partial \varDelta}{\partial x_k} + \frac{\lambda^2}{1\cdot 2}\Sigma\xi_k\xi_l\frac{\partial^2 \varDelta}{\partial x_k\,\partial x_l} + \cdots = 0 \\ &A + \lambda\Sigma\xi_k\frac{\partial A}{\partial x_k} + \frac{\lambda^2}{1\cdot 2}\Sigma\xi_k\xi_l\frac{\partial^2 A}{\partial x_k\,\partial x_l} + \cdots = 0 \end{aligned}\right. \qquad (k, l = 1, 2, 3).$$

Ist nun x ein Schnittpunkt der drei Curven $A=0$, $B=0$, $C=0$, so ist für diesen Punkt nach (12) auch $\varDelta = 0$. Sind B und C von gleichem Grade, so ist in dem Punkt x nach (13) $\frac{\partial \varDelta}{\partial x_k}$ proportional mit $\frac{\partial A}{\partial x_k}$. Daher kann man das Glied 1. Ordnung in λ in der ersten Gleichung (15) mit Hilfe der zweiten Gleichung zerstören. Die erste Gleichung beginnt also mit λ^2, d. h. $\varDelta$ verschwindet in dem Punkt x in zweiter Ordnung. Ist ausserdem x Doppelpunkt von $A = 0$, sind also die Grössen $\frac{\partial A}{\partial x_k} = 0$, so sind nach (13) auch die Grössen $\frac{\partial \varDelta}{\partial x_k} = 0$ und es sind nach (14) die Grössen $\frac{\partial^2 \varDelta}{\partial x_k \partial x_l}$ proportional mit $\frac{\partial^2 A}{\partial x_k \partial x_l}$. Man kann daher in der ersten Gleichung (15) mit Hilfe der zweiten Gleichung das Glied in λ^2 zum Verschwinden bringen. Die erste Gleichung (15) beginnt dann mit λ^3, d. h. $\varDelta$ verschwindet in dem Punkt x in dritter Ordnung. Da A in zweiter Ordnung verschwindet, so absorbirt der Doppelpunkt 6 Schnittpunkte von $\varDelta = 0$ und $A = 0$.

§ 22. Die invariante Zahl p und die Klassenmoduln.

Wir wenden uns zur Untersuchung der Constanten, die bei der rationalen, eindeutigen Transformation invariant sind und geben zunächst einen Beweis für die Erhaltung des Geschlechtes p, d. h. für den Satz:

(I) Für zwei Curven $F(x) = 0$ und $G(y) = 0$, die sich Punkt für Punkt eindeutig entsprechen, hat das Geschlecht p denselben Werth.

Ein erster Beweis[1]) dieses Satzes, der sich an die Gleichungen (1—4) § 21 anschliesst, ergibt sich aus der Beziehung zwischen den zu den Gleichungen $F(x, y) = 0$ und $F_1(x_1, y_1) = 0$ gehörigen Verzweigungsflächen. Die Gleichung $F(x, y) = 0$ gibt Anlass zu zwei solchen Flächen, nämlich der in § 2 betrachteten, n-blättrig über der x-Ebene ausgebreiteten Fläche, welche die Verzweigung von y als Function der Variabeln x darstellt und hier der Unterscheidung halber mit T_x bezeichnet sei, und einer n-blättrig über der y-Ebene ausgebreiteten Fläche T_y, welche die Verzweigung von x als Function der Variabeln y darstellt und in ähnlicher Weise wie T_x zu con-

1) Riemann, Ges. W. S. 112.

struiren ist. Die beiden Flächen T_x und T_y sind eindeutig auf einander bezogen; entsprechenden Punkten beider Flächen kommt dasselbe Werthepaar (x, y) zu. Die eindeutige Transformation, welche die beiden Flächen T_x und T_y in einander überführt, besteht in der Vertauschung von x und y. Dabei geht ein einfacher Verzweigungspunkt (1. Art) (x_0, y_0) von T_x, da in ihm $y - y_0$ proportional mit $(x - x_0)^{\frac{1}{2}}$ ist, über in einen einfachen Punkt (x_0, y_0) von T_y und ein einfacher Verzweigungspunkt (1. Art) (x_1, y_1) von T_y, da in ihm $x - x_1$ proportional mit $(y - y_1)^{\frac{1}{2}}$ ist, über in einen einfachen Punkt (x_1, y_1) von T_x. Einem Doppelpunkt von T_x dagegen entspricht ein Doppelpunkt von T_y und umgekehrt, da die Gleichungen zur Bestimmung der Doppelpunkte $(F'x = 0,\ F'y = 0)$ für beide Flächen dieselben sind. Der Punkt $(x = \infty,\ y = \infty)$ ist für beide Flächen ein n-facher Punkt 1. Art ohne Verzweigung. Die eindeutige Beziehung zwischen den Flächen T_x und T_y kann als eine Abbildung aufgefasst werden, die bekanntlich conform, d. h. in den kleinsten Theilen ähnlich ist. Die Aehnlichkeit hört auf in den Punkten, für welche $dy : dx = - F'x : F'y$ entweder 0 oder ∞ oder unbestimmt ist. Es sind dies nach dem Obigen die Verzweigungspunkte von T_x und T_y, während in den Doppelpunkten und im Unendlichen die Conformität für die einzelnen Blätter gewahrt bleibt.

Verbindet man nun die Gleichung $F(x, y) = 0$ zuerst mit der Function $x_1 = \eta_1(x, y) : \eta_3(x, y)$, die nach (I) § 21 von der Ordnung n_1 ist, also in T_x und T_y jeden Werth n_1-mal annimmt, so erhält man durch Elimination von y eine Gleichung zwischen (x_1, x), die nach § 6 in x_1 vom Grade n, in x vom Grade n_1 ist, und durch Elimination von x eine Gleichung zwischen (x_1, y), die in x_1 vom Grade n und in y vom Grade n_1 ist. Zu der Function $x_1 = \eta_1(x, y) : \eta_3(x, y)$ gehört daher eine Fläche T_{x_1}, die n_1-blättrig über der x_1-Ebene ausgebreitet ist und eine conforme Abbildung sowohl von T_x wie von T_y darstellt. Je zwei der drei Grössen x, y, x_1 sind eindeutig in der zu der dritten Grösse gehörigen Verzweigungsfläche und jede der drei Grössen ist eine rationale Function der beiden andern. Nimmt man weiter die Function $y_1 = \eta_2(x, y) : \eta_3(x, y)$ hinzu, die ebenfalls von der Ordnung n_1 ist, also in T_x, T_y, T_{x_1} jeden Werth n_1-mal annimmt, so besteht zwischen x_1 und y_1 eine Gleichung $F_1(x_1, y_1) = 0$ vom Grade n_1 sowohl in x_1 wie in y_1. Dies ist die transformirte Gleichung (3) § 21. Zu der Function y_1 gehört eine Fläche T_{y_1}, die n_1-blättrig über der y_1-Ebene ausgebreitet ist. Die vier Flächen $T_x, T_y, T_{x_1}, T_{y_1}$ sind untereinander conform und die Functionen x

und y sind eindeutig in den Flächen T_{x_1} und T_{y_1} oder rational in (x_1, y_1).

Aus dieser Betrachtung folgt unmittelbar der Satz I. Denn da jede der beiden Flächen T_x und T_{x_1} durch eine Anzahl von Querschnitten in eine einfach zusammenhängende verwandelt wird, so folgt aus der eindeutigen Beziehung zwischen beiden Flächen, dass die Zahl der Querschnitte $2p$ für beide dieselbe sein muss. (q. e. d.)

Ein zweiter Beweis[1]) des Satzes I ist rein algebraisch. Ist r die Zahl der Doppelpunkte von $F = 0$, r_1 die der Doppelpunkte von $G = 0$, so ist die Behauptung (vgl. (6) § 5)

$$(n-1)(n-2) - 2r = (n_1 - 1)(n_1 - 2) - 2r_1. \tag{1}$$

Der Beweis schliesst sich an die Gleichung (7) § 21 an, nämlich

$$\nu^{n_1} G(\overline{y_1, y_2, y_3}^{n_1}) = G(\overline{\eta_1, \eta_2, \eta_3}^{n_1}) = F(\overline{x_1, x_2, x_3}^{n}) \, \mathfrak{L}(\overline{x_1, x_2, x_3}^{n_1\sigma - n}) \tag{2}$$

und beruht auf folgendem Gedanken. Die Schnittpunkte der in (2) auftretenden Curve $\mathfrak{L} = 0$ mit $F = 0$ zerfallen ihrer Natur nach in drei Gruppen. Bestimmt man die Zahl der Punkte in jeder Gruppe und setzt die Summe gleich der Gesammtzahl der Schnittpunkte, nämlich gleich

$$n(n_1\sigma - n), \tag{2a}$$

so ergibt sich die Gleichung (1).

Aus (2) folgt durch Differenziren nach x_i für Punkte von $F = 0$:

$$\mathfrak{L}\frac{\partial F}{\partial x_i} = \frac{\partial G}{\partial \eta_1}\frac{\partial \eta_1}{\partial x_i} + \frac{\partial G}{\partial \eta_2}\frac{\partial \eta_2}{\partial x_i} + \frac{\partial G}{\partial \eta_3}\frac{\partial \eta_3}{\partial x_i} \tag{3}$$

und durch Differenziren nach y_i, da $\frac{\partial \eta_i}{\partial y_i} = \nu$, $\frac{\partial \eta_k}{\partial y_i} = 0$, für Punkte von $G = 0$:

$$\frac{\partial G}{\partial \eta_i} = \nu^{n_1 - 1}\frac{\partial G}{\partial y_i}. \tag{4}$$

Die drei Gruppen, in welche die Schnittpunkte von $\mathfrak{L} = 0$ mit $F = 0$ zerfallen, sind nun folgende:

1) Nach (2) ist $\mathfrak{L} = 0$, sobald die drei $\eta_i = 0$ sind, d. h. in den Punkten δ und ε und es hat $\mathfrak{L} = 0$ in jedem der r Doppelpunkte δ von $F = 0$ einen $n_1 - 2$-fachen Punkt, in jedem der s einfachen Punkte ε von $F = 0$ einen $n_1 - 1$-fachen Punkt, wie sich daraus ergibt, dass die linke Seite in (2), nämlich $G(\eta_1, \eta_2, \eta_3)$ in jedem der Punkte δ und ε n_1-fach verschwindet, während auf

1) Clebsch-Gordan, Abel'sche Functionen S. 54.

der rechten Seite F in jedem der Punkte δ 2-fach, in jedem der Punkte ε einfach verschwindet. Die Zahl derjenigen Schnittpunkte von $\mathfrak{L} = 0$ mit $F = 0$, die in die Punkte δ und ε fallen, ist daher

$$(5) \qquad = 2r(n_1 - 2) + s(n_1 - 1).$$

2) Nach (3) ist $\mathfrak{L} = 0$ in den Punkten von $F = 0$, für die $\frac{\partial G}{\partial \eta_i} = 0$ $(i = 1, 2, 3)$ oder nach (4) in solchen Punkten, für welche $\nu = 0$ und für welche $\frac{\partial G}{\partial y_i} = 0$ $(i = 1, 2, 3)$ ist. Den letzteren Punkten $\left(\frac{\partial G}{\partial y_i} = 0\right)$ entsprechen nach (II) § 21 die Doppelpunkte von $F = 0$; diese sind bereits in Nr. 1 gezählt. Die ersteren Punkte $(\nu = 0)$ bestehen aus denjenigen r_1 Punktepaaren oder $2r_1$ Punkten auf $F = 0$, welche in Doppelpunkte von $G = 0$ übergehen; die Zahl derselben ist also

$$(6) \qquad = 2r_1.$$

3) Nach (3) ist für gewisse Schnittpunkte von $\mathfrak{L} = 0$ mit $F = 0$ auch die Functionaldeterminante H der drei Functionen η_i Null, also

$$(7) \qquad H = \sum \pm \frac{\partial \eta_1}{\partial x_1} \frac{\partial \eta_2}{\partial x_2} \frac{\partial \eta_3}{\partial x_3} = 0.$$

Da der Grad dieser Gleichung in den x_i gleich $3(\sigma - 1)$, so ist die Zahl der Schnittpunkte von $H = 0$ mit $F = 0$ gleich $3n(\sigma - 1)$. Unter ihnen befinden sich auch die Punkte δ und ε, die bereits in Nr. 1 gezählt und daher abzurechnen sind. Nun hat die Curve $H = 0$ nach Hilfssatz IV § 21 in jedem der r Doppelpunkte δ und ebenso in jedem der s einfachen Punkte ε von $F = 0$ einen Doppelpunkt. Von den Schnittpunkten von $H = 0$ mit $F = 0$ fallen also $4r + 2s$ in die Punkte δ und ε. Daher ist die Zahl der noch übrigen Schnittpunkte

$$(8) \qquad = 3n(\sigma - 1) - 4r - 2s.$$

Da nun die Zahl (2a) sich aus den Zahlen (5), (6) und (8) zusammensetzt, so hat man die Gleichung

$$n(n_1\sigma - n) = 2r(n_1 - 2) + s(n_1 - 1) + 2r_1 + 3n(\sigma - 1) - 4r - 2s,$$

die mit Hilfe von (10) § 21 übergeht in

$$n_1^2 - 3n_1 - 2r_1 = n^2 - 3n - 2r,$$

d. h. in die Gleichung (1). (q. e. d.)

Es sind ferner die **Moduln** einer Klasse von algebraischen Gleichungen zu untersuchen, d. h. diejenigen Combinationen der Coefficienten einer Gleichung $F(x, y) = 0$ der Klasse, die eindeutigen Transformationen gegenüber invariant sind. Hier gilt der Satz:

(II) Eine Klasse von algebraischen Gleichungen besitzt $3p - 3$ Moduln[1]).

Ausgenommen ist der Fall der elliptischen Functionen ($p = 1$), für welchen die Zahl der Moduln gleich 1 ist.

Ein erster Beweis dieses Satzes ist folgender. Nach § 21 sei die ursprüngliche Gleichung $F(x, y) = 0$ vom Grade n durch die Substitution $x_1 = \eta_1 : \eta_3$; $y_1 = \eta_2 : \eta_3$ in eine Gleichung $F_1(x_1, y_1) = 0$ vom Grade n_1 übergeführt. Beide Gleichungen haben dasselbe Geschlecht p. Daher ist die Zahl r_1 der Doppelpunkte von $F_1 = 0$ $r_1 = \frac{1}{2}(n_1 - 1)(n_1 - 2) - p$ und die Zahl der nicht homogenen Coefficienten in $F_1 = 0$

$$\frac{1}{2} n_1(n_1 + 3) - \frac{1}{2}(n_1 - 1)(n_1 - 2) + p = 3n_1 + p - 1.$$

Diesen Coefficienten lassen sich durch passende Bestimmung der Coefficienten in den transformirenden Gleichungen zum Theil beliebige Werthe geben. Die übrigen Coefficienten von F_1, die numerisch feste Werthe haben, sind die Moduln. Die transformirenden Functionen $x_1 = \eta_1 : \eta_3$ und $y_1 = \eta_2 : \eta_3$ aber sind von der Ordnung n_1 und enthalten im Ganzen $3n_1 - 2p + 2$ freie oder willkürliche Constanten, nämlich die n_1 Coordinaten der gemeinsamen ∞^1 Punkte von x_1 und y_1 und $n_1 - p + 1$ homogene Coefficienten im Zähler jeder dieser Functionen (§ 12 Satz Ib). Die Zahl der Moduln ist daher

$$3n_1 + p - 1 - (3n_1 - 2p + 2) = 3p - 3.$$

Dasselbe ergibt sich so. Man verbinde $F(x, y) = 0$ nur mit der ersten Function $x_1 = \eta_1 : \eta_3$ von der Ordnung n_1. Die Elimination von y gibt nach dem Obigen eine Gleichung zwischen x_1 und x von Grade n in x_1 und n_1 in x. Betrachtet man x_1 als die unabhängige Variable, so sind x und y eindeutige Functionen in der über der x_1-Ebene n_1-blättrig ausgebreiteten Fläche T_{x_1}. Nun ist die Zahl der einfachen Verzweigungspunkte in T_{x_1} gleich $2n_1 + 2p - 2$ (§ 2, Gl. 8). Die Function $x_1 = \eta_1 : \eta_3$ aber führt $2n_1 - p + 1$ willkürliche

1) Riemann, Ges. W. S. 113. Ausser dem obigen ersten, algebraischen Beweis dieses Satzes gibt Riemann noch einen zweiten, transcendenten Beweis l. c. S. 114.

Constanten mit sich. Daher ist die Zahl der einfachen Verzweigungspunkte in T_{x_1}, denen sich durch diese Transformation beliebige Lagen geben lassen, gleich $2n_1 - p + 1$ und die Zahl der festen Verzweigungspunkte in T_{x_1} oder die Zahl der Klassenmoduln, wie oben,

$$= (2n_1 + 2p - 2) - (2n_1 - p + 1) = 3p - 3.$$

Die vorstehende Bestimmung der Anzahl der Moduln einer Klasse vom Geschlecht p setzt voraus, was nur für $p > 1$ zutrifft, dass es in T_{x_1} $2n_1 - p + 1$ einfache Verzweigungspunkte gibt, deren Coordinaten von einander unabhängige Functionen der willkürlichen Constanten in der Function x_1 sind. Der directe Nachweis für diese Unabhängigkeit ist indess schwierig; wir geben daher noch einen anderen Beweis des Satzes II.

Der zweite Beweis[1]) macht Gebrauch davon, dass bei der eindeutigen Transformation die Quotienten der Φ-Functionen oder die Schnittpunktsysteme der Φ-Curven erhalten bleiben (§ 23).

Sei wie früher in homogener Form $F(\overline{x_1, x_2, x_3}^{\,n}) = 0$ die ursprüngliche, $G(\overline{y_1, y_2, y_3}^{\,n_1}) = 0$ die transformirte Curve einer Klasse vom Geschlecht p. Man bilde adjungirte Curven von $F = 0$ des $n - 3^{\text{ten}}$ Grades, die $F = 0$ in einem Punkte $p - 1$-punktig berühren (d. h. in p zusammenfallenden Punkten schneiden). Solche Berührungscurven hängen offenbar nur von den Coefficienten von $F = 0$ ab und existiren, sobald $p > 1$ ist, in endlicher Zahl, da es andernfalls $p + 1$ linear unabhängige Φ-Curven geben müsste. (Die Zahl der Lösungen ist $= (p-1)\,p(p+1)$.) Sei Φ_1 eine dieser Curven und $\xi_i\,(i = 1,..,p-2)$ die $p - 2$ Punkte, in welchen dieselbe $F = 0$ ausser den Doppelpunkten noch schneidet. Durch die $p - 2$ Punkte ξ_i kann man nun ein Büschel von adjungirten Curven $n - 3^{\text{ten}}$ Grades legen, $\Phi_1 + k\Phi$, mit dem Parameter k. In diesem Büschel existiren $4p - 2$ Curven, die $F = 0$ in 1 Punkt berühren. Denn die Berührungspunkte der Büschelcurven sind die Schnittpunkte, welche $F = 0$ mit der Jacobischen Curve der drei Functionen Φ, Φ_1, F, d. h. mit der Curve

$$\Delta = \sum \pm \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_2} \frac{\partial F}{\partial x_3} = 0$$

besitzt, mit Ausnahme derjenigen unter diesen Schnittpunkten, die in feste Punkte von $F = 0$ fallen. Die Curve $\Delta = 0$ ist vom Grade $n - 4 + n - 4 + n - 1 = 3(n - 3)$, hat also mit $F = 0$ $3n(n - 3)$

1) Brill u. Nöther, Mathem. Ann. Bd. VII. S. 302. Denselben Weg hat schon früher in Vorlesungen Herr Weierstrass eingeschlagen.

Schnittpunkte. Von diesen fallen nach dem Hilfssatze (VI § 21) 6 in jeden der r Doppelpunkte von $F=0$ und 2 in jeden der $p-2$ Punkte ξ_i. Daher ist die Zahl der mit dem Parameter k veränderlichen Schnittpunkte

$$3n(n-3)-2(p-2)-6r=4p-2.$$

Von den $4p-2$ Berührungscurven des Büschels $\Phi_1+k\Phi=0$ fallen nun $p-1$ mit der Curve $\Phi_1=0$ zusammen. An die übrigen $3p-1$ einfach berührenden Curven lege man in einem der Basispunkte des Büschels, etwa in ξ_i, die $3p-1$ Tangenten t, die mit der Tangente von $\Phi_1=0$ in ξ_i eine binäre Form der Ordnung $3p$ bestimmen. Die aus den $3p$ Parametern k dieses Tangentenbüschels t gebildeten $3p-3$ Doppelverhältnisse λ, welche (irrationale) Functionen der Coefficienten von $F=0$ allein und im Allgemeinen von einander unabhängig sind (s. den Schluss dieses §), bleiben nun bei eindeutiger Transformation unverändert und können daher als die $3p-3$ Klassenmoduln angesehen werden. In der That, die eindeutige Transformation führt jede Berührungscurve von $F=0$ in eine ebenso berührende Curve von $G=0$ über. Daher hat man, entsprechend den $3p$ Büscheltangenten t durch den Punkt ξ_i auf $F=0$, $3p$ Bücheltangenten τ durch einen Punkt η_i auf $G=0$. Die Büschel t und τ sind eindeutig auf einander bezogen und folglich perspectivisch, da im binären Gebiet jede eindeutige Transformation linear ist. Die $3p-3$ Doppelverhältnisse λ des Büschels t von $F=0$ sind daher gleich den entsprechend gebildeten Doppelverhältnissen des Büschels τ von $G=0$. (q. e. d.)

Der Satz II lässt sich umkehren in folgender Weise[1]):

(III) Durch die Werthe der $3p-3$ Moduln λ ist eine Klasse von algebraischen Gleichungen vom Geschlecht p bestimmt und zwar in endlich vieldeutiger Weise, da die λ irrationale Functionen der Coefficienten von $F=0$ sind.

Um aus den $3p-3$ gegebenen Moduln λ eine zugehörige, algebraische Curve zu bilden, stellen wir eine Vorbetrachtung an. Aus der allgemeinen Form $\overbrace{F(x_1, x_2, x_3)}^{n}=0$ erhält man durch eindeutige Transformation eine Curve $G(y_1, y_2, y_3)=0$ von derselben Allgemeinheit, aber von specieller Form in folgender Weise.

Man lege durch $p-3$ der oben bestimmten $p-2$ Punkte ξ_i von $F=0$ eine Φ-Curve, die von der Form ist $l_1\Phi_1+l_2\Phi_2+l_3\Phi_3=0$ und bilde aus den 3 hier auftretenden Functionen Φ_1, Φ_2, Φ_3, von

1) Brill u. Nöther, Math. Ann. Bd. 7, S. 303 (1873). Vgl. auch Cayley, Proc. of the London Math. Soc. Vol. I. 1865.

denen die erste die oben verwandte, $p-1$-punktig berührende Φ-Function sei, die Quotienten $\Phi_1 : \Phi_3 = y_1 : y_3$ und $\Phi_2 : \Phi_3 = y_2 : y_3$ von der Ordnung $p+1$ in den x_i. Benutzt man diese zur Transformation von $F=0$, so hat die transformirte Curve $G(y_1, y_2, y_3) = 0$ den Grad $p+1$ und $\frac{1}{2}p(p-3)$ Doppelpunkte; ausserdem aber die Eigenthümlichkeit, dass sie einen Punkt besitzt (der dem Berührungspunkt von $\Phi_1 = 0$ mit $F=0$ entspricht), in welchem eine gerade Linie $y_1 = 0$ (die der Curve $\Phi_1 = 0$ entspricht) $p-1$-punktig berührt. Diese Gerade $y_1 = 0$ schneidet $G=0$ noch in einem Punkt P, von dem aus nach dem Obigen noch $3p-1$ Tangenten an die Curve $G=0$ gehen. Die $3p-3$ Doppelverhältnisse der so bestimmten $3p$ Geraden sind für $G=0$ die oben angegebenen Moduln λ. Nach dieser Vorbetrachtung sei nun umgekehrt die soeben charakterisirte Curve $G(y)=0$ vom Grade $p+1$ gesucht und zu ihrer Bildung seien die Werthe von $3p-3$ Moduln λ von der dargelegten Bedeutung beliebig gegeben. Um $G=0$ zu finden, wähle man einen beliebigen Punkt P und ziehe durch ihn 3 beliebige und $3p-3$ weitere Gerade, welche mit den 3 ersten die $3p-3$ gegebenen Doppelverhältnisse bilden. Legt man nun einer Curve $G=0$ von dem Grad $p+1$ die Bedingungen auf, $\frac{1}{2}p(p-3)$ Doppelpunkte zu haben, durch den Punkt P zu gehen, die $3p$ genannten Geraden zu berühren und zwar eine von ihnen $p-1$-punktig, so ist die Zahl der noch willkürlichen Coefficienten von $G=0$ gleich

$$\frac{1}{2}(p+1)(p+4) - \frac{1}{2}p(p-3) - (4p-2) - 1 = 3.$$

Sei aber $G'=0$ die Gleichung einer beliebigen Curve, welche diesen Bedingungen genügt, und seien $y_1 = 0$, $y_2 = 0$ die Coordinaten des Punktes P, so werden unsere Bedingungen auch noch durch jede Curve $G=0$ erfüllt, welche aus $G'=0$ durch die lineare Transformation

$$\varrho z_1 = y_1 \qquad \varrho z_2 = y_2 \qquad \varrho z_3 = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \alpha_3 y_3$$

entsteht. Diese Curve $G=0$ enthält drei willkürliche Constanten. Daraus folgt, dass alle Curven, welche jenen Bedingungen genügen, aus einer endlichen Zahl von Curven $G'=0$ durch lineare Transformation müssen abgeleitet werden können. (q. e. d.)

Zugleich folgt aus diesem Beweise, dass die $3p-3$ Moduln λ von einander unabhängig sind, eine Frage, die beim zweiten Beweis des Satzes II noch offen geblieben war.

§ 23. Die invarianten Formen der Grundgleichung, der rationalen Functionen und der Abel'schen Integrale.

Wir wenden uns zur Untersuchung der Functionen von (x, y), die bei eindeutiger Transformation von $F(x, y) = 0$ invariant sind. Die Grundlage bildet der Satz:

(I) Bei der eindeutigen Transformation, die $F(x, y) = 0$ in $G(x_1, y_1) = 0$ überführt, geht der Quotient zweier adjungirter Functionen von $F = 0$ des $(n-3)^{\text{ten}}$ Grades: $\Phi(x, y) : \Phi_1(x, y)$ in den Quotienten zweier adjungirter Functionen von $G = 0$ des $(n_1 - 3)^{\text{ten}}$ Grades: $\Psi(x_1, y_1) : \Psi_1(x_1, y_1)$ über.

Dieser Satz folgt unmittelbar aus dem Umstande, dass durch die eindeutige Transformation jedes Integral 1. Gattung in ein ebensolches Integral übergehen muss[1]), dass also die Gleichungen bestehen

$$\frac{\Phi(x, y)\,dx}{F'(y)} = \frac{\Psi(x_1, y_1)\,dx_1}{G'(y_1)}, \quad \frac{\Phi_1(x, y)\,dx}{F'(y)} = \frac{\Psi_1(x_1, y_1)\,dx_1}{G'(y_1)},$$

woraus

$$\Phi(x, y) : \Phi_1(x, y) = \Psi(x_1, y_1) : \Psi_1(x_1, y_1). \quad \text{(q. e. d.)} \tag{1}$$

Um den Beweis rein algebraisch zu führen, benutzt man homogene Coordinaten (s. § 21) und zeigt, dass die Function $\Psi(y_1, y_2, y_3) = \Psi(y)$ oder auch $\Psi(\eta_1, \eta_2, \eta_3) = \Psi(\eta)$ mit der Function $\Phi(x_1, x_2, x_3) = \Phi(x)$ übereinstimmt bis auf einen Factor, der nur von den früher eingeführten Functionen $\mathfrak{L}$ (Gl. 7 § 21) und H (Gl. 7 § 22) abhängt. Es besteht nämlich, wenn eine adjungirte Function $\overset{n_1-3}{\overline{\Psi(y)}}$ von $G(y) = 0$ gegeben ist, eine identische Gleichung von der Form

$$H\Psi(\eta) = \mathfrak{L}\Phi(x) + CF(x) \tag{2}$$

und von der Art, dass $\Phi(x)$ eine adjungirte Function des $(n-3)^{\text{ten}}$ Grades von $F = 0$ und C eine ganze, rationale, homogene Function von (x_1, x_2, x_3) ist. Hieraus folgt aber, wenn man die Voraussetzung $F(x) = 0$ oder $G(y) = 0$ hinzufügt, die Gleichung

$$\nu^{n_1-3}\Psi(y) = \Psi(\eta) = \mathfrak{L}\Phi(x) : H. \tag{3}$$

Zum Beweise der Identität (2) ist der in § 8 historisch angeführte Satz (II) mit den in § 22 über die Schnittpunkte von $F = 0$ mit $\mathfrak{L} = 0$ und $H = 0$ entwickelten Sätzen zu verbinden.

---

1) Riemann, Ges. W. S. 111; Clebsch und Gordan, Ab. F. S. 51 (vgl. Gl. 16 d. §). In expliciter Form wurde der Satz zuerst benutzt von Brill und Nöther, Math. Ann. Bd. VII S. 284 u. 285. Den obigen algebraischen Beweis gibt Nöther, Math. Ann. Bd. XVII S. 263 ff.

Nach (7) § 22 hat

$H = 0$ einen Doppelpunkt in jedem der r Punkte δ und der s Punkte ε und
einen einfachen Punkt in gewissen $3n(\sigma - 1) - 4r - 2s$ Punkten ζ, die nicht in die Punkte δ und ε fallen. Ferner hat

$\Psi(\eta) = 0$ einen einfachen Punkt in jedem der $2r_1$ Punkte ξ von $F = 0$, die bei der Transformation paarweise in einen Doppelpunkt von $G = 0$ übergehen und
einen $n_1 - 3$-fachen Punkt in jedem der Punkte δ und ε, endlich
einen einfachen Punkt in jedem von $2p - 2$ weiteren Punkten τ von $F = 0$.

Folglich hat

$H\Phi(\eta) = 0$ einen $n_1 - 1$-fachen Punkt in jedem der Punkte δ und ε und einen einfachen Punkt in jedem der Punkte ξ und ζ.

Dagegen hat nach den Abzählungen des § 22

$\mathfrak{L} = 0$ einen $n_1 - 2$-fachen Punkt in jedem der r Punkte δ und einen $n_1 - 1$-fachen Punkt in jedem der s Punkte ε; ferner einen einfachen Punkt in jedem der $2r_1$ Punkte ξ und einen einfachen Punkt in jedem der Punkte ζ.

Es geht also $H\Psi(\eta) = 0$ durch jeden der einfachen Punkte ξ und ζ von $F = 0$, die einfache Punkte von $\mathfrak{L} = 0$ sind, einfach; ferner durch jeden der s einfachen Punkte ε von $F = 0$, die $n_1 - 1$-fache Punkte von $\mathfrak{L} = 0$ sind, $n_1 - 1$-fach; endlich durch jeden der r Doppelpunkte δ von $F = 0$, die $n_1 - 2$-fache Punkte von $\mathfrak{L} = 0$ sind, $n_1 - 1$-fach hindurch. Damit sind aber die Bedingungen erfüllt, unter denen nach § 8 Satz (II) eine Gleichung von der Form (2) besteht.

Nun ist der Grad von H gleich $3(\sigma - 1)$, der von $\Psi(\eta)$ gleich $\sigma(n_1 - 3)$, der von $\mathfrak{L}$ gleich $n_1\sigma - n$, daher nach (2) der Grad von $\Phi(x)$ gleich $n - 3$. Ausserdem ist $\Phi(x) = 0$ zu $F = 0$ adjungirt. Denn in einem Doppelpunkt δ von $F = 0$ hat $H\Psi(\eta) = 0$ einen $n_1 - 1$-fachen Punkt, $\mathfrak{L} = 0$ nur einen $n_1 - 2$-fachen Punkt, also $\Phi(x) = 0$ einen einfachen Punkt. (q. e. d.)

Der Satz (I) von der Erhaltung der Φ-Quotienten bei eindeutiger Transformation führt zunächst dazu, der algebraischen Grundgleichung $F(x, y) = 0$ eine invariante Form zu geben, d. h. eine Form, die sich bei weiterer eindeutiger Transformation nicht mehr ändert. Man erhält diese Form, indem man an Stelle der Variabeln x und y zwei zu $F = 0$ gehörige, linear unabhängige Φ-Quotienten mit demselben Nenner einführt. Da auch die rationalen Functionen von

(x, y) der niedersten Ordnung durch Φ-Quotienten dargestellt werden (§ 12), so erhält man durch diese Transformation auch eine Normalform der Grundgleichung, die zugleich invariant und vom niedersten Grade ist.

Sind Φ_1, Φ_2, Φ_3 drei beliebige adjungirte Functionen $n - 3^{\text{ten}}$ Grades von $F = 0$, zwischen denen keine identische Gleichung ersten oder höheren Grades besteht, und setzt man

$$z_1 : z_2 : z_3 = \Phi_1(x, y) : \Phi_2(x, y) : \Phi_3(x, y), \tag{4}$$

so geht $F(x, y) = 0$, da die Φ-Quotienten im Allgemeinen von der Ordnung $n_1 = 2p - 2$ sind, nach § 21 in eine homogene Gleichung zwischen z_1, z_2, z_3 über von der Form

$$K(\overline{z_1, z_2, z_3}^{2p-2}) = 0 \text{ [1]} \tag{5}$$

und die Zahl r_1 der Doppelpunkte dieser Curve, die sich nach (I) § 22 aus den Formeln $r_1 = \frac{1}{2}(n_1 - 1)(n_1 - 2) - p$ und $n_1 = 2p - 2$ bestimmt, wird

$$r_1 = 2(p - 1)(p - 3), \tag{6}$$

sodass für die transformirte Gleichung (5) sowohl der Grad, wie die Zahl der Doppelpunkte nur vom Geschlecht p abhängig sind.

Durch besondere Wahl der Functionen Φ_1, Φ_2, Φ_3 in (4) kann man den Grad der Gleichung $K = 0$ (5) erniedrigen, zunächst in folgender Weise. Man wähle auf $F = 0$ $p - 3$ beliebige Punkte. Für sie verschwinden noch 3 linear unabhängige Φ-Functionen. Benutzt man die Quotienten derselben zur eindeutigen Transformation, so wird der Grad n_1 der transformirten Curve $K = 0$ nach (10) § 21, da hier $\sigma = n - 3$, $s = p - 3$ und $n(n - 3) - 2r = 2p - 2$ ist,

$$n_1 = n(n - 3) - 2r - (p - 3) = p + 1;$$

zugleich wird

$$r_1 = \frac{1}{2}p(p - 3),$$

d. h.: Eine Curve $F = 0$ vom Geschlecht p lässt sich in eine Curve $K = 0$ vom Grad $p + 1$ mit $\frac{1}{2}p(p - 3)$ Doppelpunkten transformiren durch Quotienten von drei Φ-Functionen, die durch $p - 3$ beliebig auf $F = 0$ gewählte Punkte gehen[2]).

---

1) Riemann, Ges. W. S. 459.

2) Clebsch-Gordan, Ab. F. S. 65.

Diese Transformation ist unmöglich, wenn $p = 0, 1, 2$ ist; ausserdem bilden nur die hyperelliptischen Curven eine Ausnahme, worauf wir nicht näher eingehen.

Um indess die Normalform niedersten Grades zu erhalten, hat man zur Transformation von $F = 0$ zwei linear unabhängige Φ-Quotienten von demselben Nenner und von möglichst niederer Ordnung zu verwenden. Nun wurde in § 12 Satz III die Aufgabe gelöst, den Quotienten zweier Φ-Functionen zu bilden, der von möglichst niederer Ordnung ist, aber im Zähler noch drei homogene, lineare Coefficienten enthält, also von der Form ist $(\lambda_1 \Phi_1 + \lambda_2 \Phi_2 + \lambda_3 \Phi_3) : \Phi_3$. Verwendet man die durch eine solche Bestimmung gewonnenen Functionen Φ_1, Φ_2, Φ_3 zur Transformation (4), so erhält man die Normalform niedersten Grades. Die niederste Ordnung n_1 solcher Quotienten ergibt sich aus der Tabelle (7) § 11, wenn man $q_2 = 3$ setzt. Es wird $n_1 = p - q_1 + 2$, also für $p = 3q_1$, $3q_1 + 1$, $3q_1 + 2$ bez. $n_1 = 2q_1 + 2$, $2q_1 + 3$, $2q_1 + 4$. Die Zahl r_1 der Doppelpunkte der transformirten Gleichung $K = 0$ bestimmt sich aus $r_1 = \frac{1}{2}(n_1 - 1)(n_1 - 2) - p$. Daher hat man den Satz:

(II) Eine Curve $F(x, y) = 0$ vom Grade n und vom Geschlecht p lässt sich stets durch Quotienten von drei Φ-Functionen z_1, z_2, z_3 in eine Normalform niedersten Grades verwandeln, die, wenn $p \geqq 3$, $q_1 \geqq 1$, lautet[1]):

$$(7) \quad \begin{cases} \text{für } p = 3q_1 & \overset{2q_1+2}{\overline{K(z_1, z_2, z_3)}} = 0 & r_1 = 2q_1(q_1 - 1) \\ \text{,, } p = 3q_1 + 1 & \overset{2q_1+3}{\overline{K(z_1, z_1, z_3)}} = 0 & r_1 = 2q_1^2 \\ \text{,, } p = 3q_1 + 2 & \overset{2q_1+4}{\overline{K(z_1, z_2, z_3)}} = 0 & r_1 = 2q_1^2 + 2q_1 + 1. \end{cases}$$

Auch diese Transformation beginnt erst mit dem Geschlecht $p \geqq 3$, da nur für solche Werthe von p drei linear unabhängige Φ-Functionen existiren. In den Fällen $p = 0, 1, 2$ hat man aus allgemeinen, adjungirten Functionen zwei linear unabhängige Quotienten mit demselben Nenner und von möglichst niederer Ordnung zu bilden und zur Transformation zu verwenden. Die niederste Ordnung n_1 einer Function, die im Zähler noch drei lineare, homogene Coefficienten enthält, bestimmt sich nach (Ib § 12) aus $n_1 - p + 1 = 3$. Daher hat man für $p = 0, 1, 2$ als niedersten Werth von n_1 bez. 2, 3, 4 und

---

1) Die Gleichungen (7) wurden zuerst von Riemann (Ges. W. S. 116) in anderer Form angegeben; die obige Form und Herleitung findet sich bei Brill-Nöther, Math. Ann. Bd. VII S. 299 (1873).

als zugehörigen Werth von r_1 bez. 0, 0, 1. Hieraus folgt, dass die Gleichungen (7) auch für $q_1 = 0$ oder für $p = 0, 1, 2$ gelten; nur mit dem Unterschied, dass alsdann die Transformation nicht mehr durch Φ-Quotienten geleistet wird und die transformirte Gleichung nicht mehr invariant ist.

Es ist klar, dass die rationalen Functionen von (x, y) und ihre Integrale bei eindeutiger Transformation von $F(x, y) = 0$ in ebensolche Functionen und Integrale übergehen mit entsprechenden Unstetigkeitspunkten[1]). Durch Einführung von Φ-Quotienten an Stelle der Variabeln (x, y) erhalten nun, wie die Grundgleichung $F(x, y) = 0$ selber, auch die zu ihr gehörigen, rationalen Functionen und Abel'schen Integrale eine Form, die der eindeutigen Transformation gegenüber absolut invariant ist.

Eine zu der Gleichung $F(x, y) = 0$ gehörige, rationale Function $M_1(x, y) : M(x, y)$ führt man zunächst durch die Substitution $x = x_1 : x_3$; $y = x_2 : x_3$ in eine homogene Form der 0ten Dimension in (x_1, x_2, x_3) über: $M_1(x_1, x_2, x_3) : M(x_1, x_2, x_3)$ oder abgekürzt $M_1(x) : M(x)$, welche zu der homogenen Gleichung $F(x_1, x_2, x_3) = 0$ oder $F(x) = 0$ gehört. Wendet man nun die eindeutige Transformation an, die $F(x) = 0$ in $G(y) = 0$ überführt (§ 21), so geht $M_1(x) : M(x)$ über in eine ähnliche Function der 0ten Dimension in (y_1, y_2, y_3): $N_1(y) : N(y)$. Führt man aber an Stelle von (x_1, x_2, x_3) drei linear unabhängige Φ-Functionen ein mittels der Gleichungen (4), so geht $M_1(x) : M(x)$ in eine zu der invarianten Grundgleichung $K(z) = 0$ gehörige rationale Function der 0ten Dimension in (z_1, z_2, z_3): $P_1(z) : P(z)$ über, die jeder weiteren, eindeutigen Transformation gegenüber invariant ist, weil bei einer solchen die Verhältnisse der Grössen z_1, z_2, z_3 nach (I) ungeändert bleiben. Daher der Satz:

(III) Eine zu $F(x, y) = 0$ gehörige, rationale Function $M_1(x, y) : M(x, y)$ wird invariant für eindeutige Transformation, sobald sie durch eine Substitution der Form (4) als homogene, rationale Function der 0ten Dimension in drei zu $F = 0$ gehörigen Φ-Functionen z_1, z_2, z_3 dargestellt ist.

Wie der rationalen Function gibt man auch dem zu $F(x, y) = 0$ gehörigen Abel'schen Integral für die eindeutige Transformation zweckmässig eine homogene Form. Unter der Voraussetzung, dass kein Unstetigkeitspunkt des Integrals in einen der Punkte $(x = \infty, y = \infty)$ falle, hat das allgemeine Abel'sche Differential nach (2a) § 17 die Form

---

1) Riemann, Ges. W. S. 111.

$$(8)\qquad dU=\frac{M_1(x,y)}{M(x,y)}\cdot\frac{\Phi(x,y)\,dx}{F'(y)}=-\frac{M_1(x,y)}{M(x,y)}\cdot\frac{\Phi(x,y)\,dy}{F'(x)},$$

wo M_1 und M ganze, rationale Functionen von gleichem Grade in (x, y) sind und $\Phi(x, y)$ eine beliebige adjungirte Function $n-3^{\text{ten}}$ Grades von $F=0$ ist. Auch das Differential 1. Gattung ist in der Form (8) mitenthalten, sobald man $M_1 : M$ gleich einer Constanten setzt.

Macht man die Substitution $x = x_1 : x_3$, $y = x_2 : x_3$, wodurch

$$F(x,y)=x_3^{-n}F(x)\quad F'(x)=x_3^{-n+1}F'(x_1)\quad F'(y)=x_3^{-n+1}F'(x_2)$$

$$M_1(x,y):M(x,y)=M_1(x):M(x)\qquad \Phi(x,y)=x_3^{-n+3}\Phi(x)$$

und

$$dx=\frac{x_3\,dx_1-x_1\,dx_3}{x_3^{\,2}}\qquad dy=\frac{x_3\,dx_2-x_2\,dx_3}{x_3^{\,2}}$$

wird, so erhält man aus (8)

$$(9)\qquad dU=\frac{M_1(x)\Phi(x)}{M(x)}\,\frac{x_3\,dx_1-x_1\,dx_3}{F'(x_2)}=\frac{M_1(x)\Phi(x)}{M(x)}\,\frac{x_2\,dx_3-x_3\,dx_2}{F'(x_1)}.$$

Nun folgt aus

$$F'(x_1)x_1+F'(x_2)x_2+F'(x_3)x_3=0$$
$$F'(x_1)dx_1+F'(x_2)dx_2+F'(x_3)dx_3=0$$

die Proportion

$$x_2dx_3-x_3dx_2:x_3dx_1-x_1dx_3:x_1dx_2-x_2dx_1=F'(x_1):F'(x_2):F'(x_3).$$

Sind daher $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ drei beliebige Constanten, so geht (9) über in

$$(10)\qquad dU=\frac{M_1(x)\Phi(x)}{M(x)}\cdot\frac{\Sigma\pm\alpha_1\,x_2\,dx_3}{\Sigma\alpha_i F'(x_i)}.$$

Dies ist die homogene Form des allgemeinen Abel'schen Differentials[1]; sie enthält nur die Verhältnisse der drei Variabeln x_1, x_2, x_3 und ist dem Werth nach unabhängig von den Constanten α_i.

Verwandelt sich nun die Gleichung $F(\overset{n}{\overline{x}})=0$ durch eindeutige Transformation in $G(\overset{n_1}{\overline{y}})=0$ und $M_1(x):M(x)$ in $N_1(y):N(y)$, so geht das Differential (10) in eine ähnliche Form in den y_i über. In der That kann man die Factoren in (10) in folgender Weise einzeln transformiren[2].

Nach (3) ist, wenn man $\sigma\Phi(x)$ für $\Phi(x)$ setzt (wo σ der Grad der Functionen η_i in (x_1, x_2, x_3) ist, vgl. (5) § 21),

$$(11)\qquad \frac{\mathfrak{L}}{H}\,\frac{M_1(x)}{M(x)}\,\Phi(x)=\frac{\nu^{n_1-3}}{\sigma}\,\frac{N_1(y)}{N(y)}\,\Psi(y).$$

---

1) Aronhold, Monatsber. der Berl. Academie 1861.

2) Clebsch u. Gordan, Ab. F. S. 50 (1866).

Ferner ist, wenn $F(x) = 0$ und $G(y) = 0$, nach (7) § 21:

$$\mathfrak{L} F'(x_i) = \nu^{n_1 - 1} \sum_k G'(y_k) \frac{\partial \eta_k}{\partial x_i} \qquad (i, k = 1, 2, 3),$$

folglich

$$\mathfrak{L} \sum_i \alpha_i F'(x_i) = \nu^{n_1 - 1} \sum_k \beta_k G'(y_k), \tag{12}$$

wenn

$$\beta_k = \sum_i \alpha_i \frac{\partial \eta_k}{\partial x_i} \tag{13}$$

gesetzt wird. Endlich ist nach (7) § 22:

$$H \Sigma \pm \alpha_1 x_2 dx_3 = \sigma \Sigma \pm \beta_1 \eta_2 d\eta_3 = \sigma \nu^2 \Sigma \pm \beta_1 y_2 dy_3. \tag{14}$$

Aus (12) und (14) folgt:

$$\frac{H}{\mathfrak{L}} \frac{\sum \pm \alpha_1 x_2 dx_3}{\sum_i \alpha_i F'(x_i)} = \frac{\sigma}{\nu^{n_1 - 3}} \frac{\sum \pm \beta_1 y_2 dy_3}{\sum_k \beta_k G'(y_k)} \tag{15}$$

und durch Multiplication mit (11):

$$dU = \Phi(x) \frac{M_1(x)}{M(x)} \frac{\sum \pm \alpha_1 x_2 dx_3}{\sum_i \alpha_i F'(x_i)} = \Psi(y) \frac{N_1(y)}{N(y)} \frac{\sum \pm \beta_1 y_2 dy_3}{\sum_k \beta_k G'(y_k)}. \tag{16}$$

Hier ist der Ausdruck rechts von ähnlicher Bildung wie der Ausdruck links; denn die Grössen β_k sind nach (13) ebenso willkürlich wie die Grössen α_i. Zugleich ist ersichtlich, indem man $M_1(x) : M(x)$, also auch $N_1(y) : N(y)$ gleich einer Constanten setzt, dass ein Integral 1. Gattung durch die Transformation wieder in ein solches Integral übergeht.

Man erhält eine völlig invariante Form für das Abel'sche Differential, wenn man an Stelle von (x_1, x_2, x_3) drei linear unabhängige Φ-Functionen einführt mittels der Gleichungen (4). Dann geht $F(\overset{n}{\overline{x}}) = 0$ über in die invariante Gleichung $K(\overset{n_1}{\overline{z}}) = 0$ und gleichzeitig das Differential dU nach (16) in die Form

$$X(z) \frac{P_1(z)}{P(z)} \frac{\sum \pm \gamma_1 z_2 dz_3}{\sum_i \gamma_i K'(z_i)}, \tag{17}$$

wo $X(z)$ eine adjungirte Function des $n_1 - 3^{\text{ten}}$ Grades von $K(z) = 0$ ist. Die Form (17) ist aber jeder weiteren, eindeutigen Transformation gegenüber invariant, weil bei einer solchen die Verhältnisse der Grössen z_1, z_2, z_3 nach (I) ungeändert bleiben. Daher der Satz:

(IV) Ein zu $F(x, y) = 0$ gehöriges Abel'sches Differential wird invariant für eindeutige Transformation, sobald es durch eine Substitution der Form (4) homogen in drei zu $F = 0$ gehörigen Φ-Functionen z_1, z_2, z_3 dargestellt ist.

§ 24. Allgemeinste Form der Grundgleichung und der Abel'schen Integrale.

Die bisherigen Untersuchungen gründeten sich ausschliesslich auf eine einzige homogene Gleichung $F(x_1, x_2, x_3) = 0$ zwischen 3 Variabeln oder geometrisch auf eine ebene Curve. Man kann diese Grundlage erweitern, indem man die Gleichung $F = 0$ ersetzt durch 2 homogene Gleichungen zwischen 4 Variabeln, die geometrisch eine Curve im Raum von 3 Dimensionen oder allgemein durch $\varrho - 1$ homogene Gleichungen zwischen $\varrho + 1$ Variabeln, die geometrisch eine Curve im Raum von ϱ Dimensionen darstellen. Diese Auffassung der Theorie der rationalen Functionen und ihrer Integrale, die von Clebsch[1]) herrührt, ist von geometrischem Interesse und soll daher kurz behandelt werden.

Sei zunächst eine Raumcurve gegeben, also zwei Gleichungen

$$u_1 = 0 \qquad u_2 = 0, \tag{1}$$

homogen in den Variabeln (x_1, x_2, x_3, x_4) und bez. vom Grad n_1 und n_2. Die Curve (1) soll nicht zerfallen und keine singulären Punkte besitzen. Ihr Grad, d. h. die Zahl ihrer Schnittpunkte mit einer beliebigen Ebene im Raum

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 = 0 \tag{2}$$

ist bekanntlich $= n_1 n_2$. Verbindet man (1) mit den Gleichungen

$$\begin{cases} (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \alpha_4 x_4) + x(\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 + \beta_4 x_4) = 0 \\ (\gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 + \gamma_3 x_3 + \gamma_4 x_4) + y(\delta_1 x_1 + \delta_2 x_2 + \delta_3 x_3 + \delta_4 x_4) = 0, \end{cases} \tag{3}$$

in denen $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \delta_i$ beliebige Constante, x und y variable Grössen sind, und eliminirt die x_i, so erhält man eine Gleichung in (x, y) von einem gewissen Grade n

$$F(x, y) = 0. \tag{4}$$

Es ist dies eine der Raumcurve (1) entsprechende ebene Curve. Die Gleichungen (3) stellen zwei Ebenenbüschel mit beliebigen festen Axen dar, deren Parameter x und y durch die Gleichung (4) einander so zugeordnet sind, dass die ihnen entsprechenden Ebenen der Büschel (3) sich auf der Curve (1) schneiden.

1) Clebsch, Journ. für Math. Bd. 63. S. 218 ff. (1863).

Die Beziehung zwischen den Punkten der Raumcurve (1) und der ebenen Curve (4) ist eindeutig unter der Voraussetzung, dass sich im Laufe der Elimination der x_i, die auf (4) führt, Gleichungen der Form

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = \Theta_1 : \Theta_2 : \Theta_3 : \Theta_4 \qquad (5)$$

ergeben, wo die Θ_i ganze, rationale Functionen von (x, y) sind von einem gewissen Grad μ. Alsdann nämlich entspricht jedem Punkt (x_i) der Raumcurve (1) nach (3) nur ein Punkt (x, y) von $F = 0$ und umgekehrt jedem Punkt (x, y) von $F = 0$ nach (5) nur ein Punkt (x_i) der Raumcurve (1). Den Schnittpunkten von (1) mit der Ebene (2) entsprechen dabei eindeutig die Schnittpunkte der Curve $F(x, y) = 0$ mit der Curve

$$a_1\Theta_1 + a_2\Theta_2 + a_3\Theta_3 + a_4\Theta_4 = 0. \qquad (6)$$

Haben die Curven $\Theta_i = 0$ unter sich und mit $F = 0$ ν einfache, feste Punkte gemein, so ist die Zahl der beweglichen Schnittpunkte von (4) und (6) gleich $n\mu - \nu$. Diese Zahl muss gleich dem Grad der Curve (1) sein, daher besteht zwischen den Zahlen n_1, n_2 und n, μ, ν die Relation $n_1 n_2 = n\mu - \nu$.

Das Geschlecht p der ebenen Curve (4) heisst gleichzeitig das Geschlecht der Raumcurve (1) und ist, durch n_1 und n_2 ausgedrückt[1]), $= \frac{1}{2} n_1 n_2 (n_1 + n_2 - 4) + 1$, eine Zahl, die für $n_2 = 1$, $n_1 = n$ übergeht in den Ausdruck $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$, der das Geschlecht einer ebenen Curve vom Grade n ohne singuläre Punkte darstellt. Ebenso wie p die Anzahl der zur ebenen Curve (4) gehörigen, linear unabhängigen Functionen Φ vom Grade $n - 3$ angibt, ist p auch die Zahl der zu der Raumcurve (1) gehörigen, linear unabhängigen Functionen $\mathfrak{F}$ vom Grade $n_1 + n_2 - 4$. Denn sind U_2 und U_1 zwei Functionen bez. vom $n_1 - 4^{\text{ten}}$ und $n_2 - 4^{\text{ten}}$ Grade in den x_i, so kann man $\mathfrak{F}$ ersetzen durch $\mathfrak{F} + U_1 u_1 + U_2 u_2$ und die Constanten in U_1 und U_2 so bestimmen, dass ebensoviele Coefficienten in $\mathfrak{F}$ numerisch feste Werthe annehmen. Daher ist die Zahl der in $\mathfrak{F}$ enthaltenen, willkürlichen Coefficienten

$$\frac{1}{6}[(n_1+n_2-1)(n_1+n_2-2)(n_1+n_2-3) - (n_1-1)(n_1-2)(n_1-3) - (n_2-1)(n_2-2)(n_2-3)]$$
$$= \frac{1}{2} n_1 n_2 (n_1 + n_2 - 4) + 1 = p. \qquad (6a)$$

Die angegebenen Bildungen lassen sich unmittelbar auf eine Curve im Raum R_ϱ von ϱ Dimensionen ausdehnen. Seien $\varrho + 1$ Variable $x_1, x_2, .., x_{\varrho+1}$ verbunden durch $\varrho - 1$ homogene Gleichungen

1) Clebsch, l. c. S. 220.

(7) $$u_1 = 0 \quad u_2 = 0 \ldots u_{\varrho-1} = 0,$$

bez. vom Grade $n_1, n_2, .., n_{\varrho-1}$. Fügt man die Gleichungen zweier Ebenenbüschel im Raum R_ϱ mit festen Axen und variablen Parametern x, y hinzu, so führt die Elimination von $x_1, .., x_{\varrho+1}$ auf eine Gleichung zwischen den Parametern $F(x, y) = 0$ und bei bestimmten Voraussetzungen hat man gleichzeitig

(8) $$x_1 : x_2 : .. : x_{\varrho+1} = \Theta_1 : \Theta_2 : .. : \Theta_{\varrho+1},$$

wo die Θ_i ganze, rationale Functionen in (x, y) sind. Damit ist eine eindeutige Beziehung zwischen der Raumcurve (7) oder (8) und der ebenen Curve $F = 0$ hergestellt. Das Geschlecht der Curve (7) ist dasselbe, wie das von $F = 0$ und drückt sich durch die n_i aus in der Form

(9) $$p = \frac{1}{2} n_1 n_2 .. n_{\varrho-1}(n_1 + n_2 + \cdots + n_{\varrho-1} - \varrho - 1) + 1.$$

Diese Zahl gibt zugleich die Anzahl der zu der Raumcurve (7) gehörigen, linear unabhängigen Functionen vom Grade $n_1 + n_2 + \cdots + n_{\varrho-1} - \varrho - 1$ an.

Es ist nun im Allgemeinen vortheilhafter, nicht von einer beliebigen Curve in einem Raum von höherer Dimension auszugehen und aus ihr die äquivalente, ebene Curve abzuleiten, sondern umgekehrt, von der ebenen Curve $F(x, y) = 0$ ausgehend, die möglichen, äquivalenten Darstellungen der Raumcurven zu untersuchen. Dabei kommen die früher entwickelten Sätze über die zu $F(x, y) = 0$ gehörigen, rationalen Functionen von (x, y) zur Verwendung.

Man bilde zu der Gleichung $F(x, y) = 0$ vom Grad n und vom Geschlecht p eine Reihe von rationalen Functionen in (x, y) von derselben Ordnung m und mit beliebigen ∞^1 Punkten. Der gemeinsame Nenner dieser Functionen sei Θ_0, die Zähler $\Theta_1, \Theta_2, .., \Theta_{\varrho+1}$. Dieselben seien $F = 0$ adjungirt, von gleichem Grad und linear unabhängig, wozu erforderlich ist, dass $\varrho \overline{\overline{<}} m - p$, da es $m - p + 1$ linear unabhängige Functionen der Ordnung m mit willkürlichen ∞^1 Punkten gibt (§ 12 Satz Ib). Setzt man nun

(10) $$x_1 : x_2 : .. : x_{\varrho+1} = \Theta_1 : \Theta_2 : .. : \Theta_{\varrho+1},$$

so ist damit eine Curve im Raum R_ϱ definirt, deren Grad $= m$ ist, da $F = 0$ von jeder Curve

$$a_1\Theta_1 + a_2\Theta_2 + \cdots + a_{\varrho+1}\Theta_{\varrho+1} = 0$$

in m beweglichen Punkten geschnitten wird. Durch Elimination von (x, y) aus $F = 0$ und den Gleichungen (10) erhält man eine zweite Form für diese Raumcurve, nämlich $\varrho - 1$ Gleichungen zwischen den Variabeln $x_1, .., x_{\varrho+1}$

$$u_1 = 0 \quad u_2 = 0 \,..\, u_{\varrho-1} = 0 \tag{11}$$

und es ergeben sich gleichzeitig im Allgemeinen x und y als rationale Functionen der durch die Gleichungen (11) verbundenen Variablen $x_1, .., x_{\varrho+1}$. Doch kann auch der Fall eintreten, dass die durch (11) definirte Raumcurve zerfällt. Sie ist dann nicht eindeutig auf $F = 0$ bezogen; es müssen vielmehr noch weitere Gleichungen in $x_1, .., x_{\varrho+1}$ hinzutreten, um denjenigen Theil der Raumcurve (11) abzusondern, der sich eindeutig auf $F = 0$ beziehen lässt. Hiernach hat man den Satz:

(I) Jeder ebenen Curve $F(x, y) = 0$ vom Geschlecht p entsprechen im Allgemeinen eindeutig gewisse Curven im Raum R_ϱ vom Grade m, wobei $\varrho \overline{\gtrless} m - p$ ist. Alle diese Curven besitzen dasselbe Geschlecht p und dieselben $3p - 3$ Moduln wie $F = 0$.

Besonderes Interesse gewinnt diese Behandlung, wenn man mit den zu $F = 0$ gehörigen, adjungirten Functionen Φ operirt, deren Quotienten von der Ordnung $m = 2p - 2$ sind. Um nur den allgemeinen Fall zu betrachten, setzen wir ($p \overline{\gtrless} 3$):

$$x_1 : .. : x_p = \Phi_1 : .. : \Phi_p, \tag{12}$$

wo die Φ_i p zu $F = 0$ gehörige, linear unabhängige Φ-Functionen sind. Die Gleichungen (12) stellen eine Curve im Raum R_{p-1} vom Grade $2p - 2$ dar. Durch Elimination von (x, y) erhält man $p - 2$ Gleichungen zwischen $(x_1, .., x_p)$

$$u_1 = 0, .., u_{p-2} = 0, \tag{13}$$

die im Allgemeinen ebenfalls die Raumcurve darstellen, zu denen aber unter Umständen noch weitere Gleichungen zwischen $(x_1, .., x_p)$ hinzuzufügen sind.

Das Eigenthümliche der Darstellung (12) beruht nun in dem Satz[1]):

(II) Legt man an Stelle von $F(x, y) = 0$ die Raumcurve (13) zu Grunde, so verwandeln sich die eindeutigen Transformationen der Variabeln (x, y) in lineare Transformationen der Variabeln $(x_1, x_2, .., x_p)$ und folglich die $3p - 3$ Klassenmoduln von $F = 0$ in die simultanen Invarianten der Gleichungen (13) im Sinne der gemeinen Invariantentheorie.

In der That: die eindeutige Transformation von $F = 0$ führt nach (I) § 23 jeden Quotienten zweier Φ-Functionen wieder in einen

1) Weber, Math. Ann. Bd. XIII S. 45 (1877).

solchen Quotienten über, sie führt also, abgesehen von einem Proportionalitätsfactor,

$$\Phi_i \text{ über in } a_{i1}\Phi_1 + \cdots + a_{ip}\Phi_p,$$

wo die a_{ik} beliebige, constante Grössen sind. An Stelle der $p-2$ Gleichungen (13) $u_i = 0$ treten also $p-2$ neue Gleichungen $v_i = 0$, die aus $u_i = 0$ hervorgehen, indem man

$$(14) \qquad x_i \text{ durch } a_{i1}x_1 + \cdots + a_{ip}x_p$$

ersetzt oder indem man auf die Gleichungen $u_i = 0$ eine beliebige lineare Substitution anwendet.

Den Moduln von $F = 0$ entsprechen solche aus den Coefficienten der Gleichungen (13) gebildete Combinationen, welche durch die lineare Substitution (14) nicht geändert werden, das sind aber die gewöhnlichen, simultanen Invarianten der Gleichungen (13). (q. e. d.)

Die Zahl der unabhängigen Combinationen von Coefficienten des Systems (13) sei P; da man $p^2 - 1$ derselben durch passende Bestimmung der Coefficienten in der linearen Substitution (14) beliebige, numerische Werthe geben kann, so hat der Rest von $P - (p^2 - 1)$ Combinationen feste, unveränderliche Werthe. Daher ist $P - p^2 + 1$ die Zahl der Moduln.

Man kann dies in doppelter Weise verwerthen. Nimmt man die Zahl der Moduln als bekannt an, $= 3p - 3$, so kann man P bestimmen; es wird

$$(15) \qquad P = p^2 + 3p - 4 = (p-1)(p+4).$$

Nimmt man die Zahl $3p - 3$ der Moduln nicht als bekannt an, so erhält man eine neue Herleitung derselben durch directe Bestimmung von P. Diese Bestimmung stösst allerdings für höhere Werthe von p auf Schwierigkeiten; man kann sie aber durch folgende Ueberlegung ersetzen[1]). Projicirt man die Curve (13) von einem ihrer Punkte auf den nächst niederen Raum R_{p-2}, so erniedrigt sich offenbar der Grad der Curve um 1; gleichzeitig wächst aber die Constantenzahl der Curve um 1, weil das Projectionscentrum in unendlich viele Punkte der Curve gelegt werden kann. Man projicire nun die erhaltene Curve des Raumes R_{p-2} wieder von einem ihrer Punkte auf den folgenden Raum R_{p-3} u. s. f., bis man die Projection $F(x_1, x_2, x_3) = 0$ im Raum R_2 hat. Für diese Curve lässt sich leicht die Zahl der Moduln berechnen. Da der Grad der ursprünglichen Curve (13) gleich $2p - 2$ war und $p - 3$ Projectionen vorgenommen wurden, so ist der Grad von $F = 0$ $2p - 2 - (p-3) = p + 1$,

1) Klein, Vorl. üb. d. Theorie d. ellipt. Modulfunctionen. Hrsgb. v. Fricke. Leipzig. Teubner 1890. S. 566 u. in Vorlesungen. 1880/81.

und da das Geschlecht p erhalten bleibt, so ist die Zahl r der Doppelpunkte von $F = 0$ $r = \frac{1}{2}p(p-1) - p = \frac{1}{2}p(p-3)$. Die Zahl der nicht homogenen Constanten in F beträgt zunächst $\frac{1}{2}(p+1)(p+4)$. Von dieser Zahl sind abzuziehen die Zahl r und die Zahl 8; die erstere weil $F = 0$ r Doppelpunkte hat, die letztere, weil eine lineare Transformation der Coordinaten (x_1, x_2, x_3) 8 Constanten mit sich führt, die man so bestimmen kann, dass 8 Constanten in $F = 0$ beliebige, numerische Werthe erhalten. Dagegen ist zuzufügen die Zahl $p - 3$, weil bei jeder der $p - 3$ Projectionen 1 Constante hinzutritt. Daher ist die Zahl der Moduln

$$= \frac{1}{2}(p+1)(p+4) - \frac{1}{2}p(p-3) - 8 + p - 3 = 3p - 3. -$$

Man kann das System der Gleichungen (13) direct bilden, indem man die Gesammtheit der zwischen den p linear unabhängigen Φ-Functionen von $F = 0$ bestehenden, algebraischen Gleichungen höheren Grades aufstellt und aus denselben diejenigen aussondert, welche im Stande sind, eine Klasse von algebraischen Gleichungen vom Geschlecht p zu definiren[1]).

Nach § 12 Satz Ib besteht zwischen je $m - p + 2$ rationalen Functionen in (x, y), die von der Ordnung m sind und die nämlichen, willkürlich gewählten m ∞^1 Punkte besitzen, mindestens eine homogene Gleichung. Bildet man nun ganze, homogene Functionen $F_0, F_1, F_2 \ldots$ vom Grade μ in den p Functionen Φ_i und dividirt $F_1, F_2, \ldots$ durch F_0, so hat man, da jedes Φ_i $2p - 2$ 0^1 Punkte hat, rationale Functionen von der Ordnung $m = 2\mu(p-1)$ mit denselben ∞^1 Punkten. Es besteht also zwischen je $m - p + 2 = (2\mu - 1)(p-1) + 1$ der Functionen $F_1, F_2, \ldots$ mindestens eine lineare, homogene Gleichung. Nimmt man für diese Functionen die μ^{ten} Potenzen und die μ-gliedrigen Producte der p Functionen Φ_i, so lässt sich zeigen[2]), dass sich unter diesen stets $(2\mu - 1)(p - 1)$ befinden, die linear unabhängig sind. Da die Zahl dieser Functionen

$$P_\mu = \frac{p \cdot p+1 \ldots p+\mu-1}{1 \cdot 2 \ldots \mu},$$

so folgt der Satz:

(III) Die Zahl der von einander unabhängigen, homogenen Gleichungen vom μ^{ten} (> 1) Grade zwischen den p Φ-Functionen ist

$$P_\mu - (2\mu - 1)(p - 1). \tag{16}$$

1) Weber, Math. Ann. Bd. XIII S. 43 ff. (1877).

2) Nöther, Math. Ann. Bd. XVII S. 272 (1880).

Diese algebraischen Gleichungen höheren Grades zwischen den p linear unabhängigen Functionen Φ_i sind nur eine identische Folge der einen Grundgleichung $F=0$, d. h. sie werden identisch befriedigt, wenn man in sie die Φ_i als Functionen von (x, y) einträgt. Umgekehrt sind mehrere dieser Gleichungen und zwar im Allgemeinen $p-2$ derselben (die obigen Gleichungen (13)) im Stande, die Gleichung $F=0$ oder eine zu derselben Klasse gehörige Gleichung zu vertreten. Man erhält diese Gleichung $F=0$ etwa, indem man zu den $p-2$ Gleichungen zwischen den Φ_i die Gleichungen

$$\sum_i(\alpha_i\Phi_i)+x\sum_i(\beta_i\Phi_i)=0,\quad \sum_i(\gamma_i\Phi_i)+y\sum_i(\delta_i\Phi_i)=0 \quad (i=1,..,p)$$

hinzufügt und die $p-1$ Verhältnisse der Φ_i eliminirt. Doch ist in jedem Fall zu prüfen, ob wirklich $p-2$ Gleichungen zwischen den Φ_i ausreichen, um eine Klasse von algebraischen Gleichungen vom Geschlecht p zu definiren.

Man kann die für die Grundgleichung $F(x, y)=0$ und ihre Schnittcurven früher entwickelten Sätze, besonders den Riemann-Roch'schen Satz, ohne Schwierigkeit auf die mit $F=0$ in eindeutiger Beziehung stehenden Raumcurven übertragen. Statt dies auszuführen, gehen wir noch kurz auf die zu diesen Raumcurven gehörigen Abel'schen Integrale ein[1]). Die Bildung derselben geschieht in der nämlichen Weise wie in § 23.

Sei zuerst eine Curve im Raum R_3 gegeben als der vollständige Durchschnitt der Flächen $u'=0$, $u''=0$ vom Grade n_1 und n_2 in den Variabeln $(x_1, .., x_4)$. Dann ist, wenn $\frac{\partial u'}{\partial x_i}=u_i'$ gesetzt wird,

$$u_1'x_1+u_2'x_2+u_3'x_3+u_4'x_4=0,\quad u_1'dx_1+u_2'dx_2+u_3'dx_3+u_4'dx_4=0$$
$$u_1''x_1+u_2''x_2+u_3''x_3+u_4''x_4=0,\quad u_1''dx_1+u_2''dx_2+u_3''dx_3+u_4''dx_4=0$$

Hieraus ergeben sich 6 Gleichungen der Form

$$x_i dx_k - x_k dx_i = (u_l' u_m'' - u_l'' u_m')\, d\mu,$$

wo $d\mu$ ein Proportionalitätsfactor ist und $i\,k\,l\,m$ zu ersetzen sind der Reihe nach durch 1 2 3 4; 1 3 4 2; 1 4 2 3; 2 3 1 4; 3 4 1 2; 4 2 1 3. Bildet man nun den Differentialausdruck:

$$(17)\qquad \Phi(x)\cdot\frac{M(x)}{N(x)}\cdot\frac{\sum \pm a_1' a_2'' x_3\, dx_4}{\sum_i a_i' u_i' \sum_i a_i'' u_i'' - \sum_i a_i' u_i'' \sum_i a_i'' u_i'},$$

so ist derselbe von den ganz beliebig wählbaren Grössen a_i', a_i'' $(i=1,..,4)$ unabhängig. Er ist ferner nur von den Verhältnissen der x_i ab-

1) Clebsch, Journ. für Math. Bd. 63. S. 221 (1863).

hängig, wenn man unter $\Phi(x)$ eine homogene, rationale, ganze Function der x_i vom Grade $(n_1 + n_2 - 4)$ versteht und unter $M(x)$ und $N(x)$ homogene, ganze, rationale Functionen von beliebigem, aber gleich hohem Grade.

Unter diesen Voraussetzungen stellt (17) das allgemeine Abel'sche Differential dar, bezogen auf die Raumcurve $u' = 0$, $u'' = 0$. Denn führt man mittels der Gleichungen (5) an Stelle der x_i die beiden durch die Gleichung $F(x, y) = 0$ verbundenen Variabeln (x, y) ein, so kommt das Differential (17) auch der Form nach auf das allgemeine zu $F(x, y) = 0$ gehörige Abel'sche Differential zurück. Ist $M(x) : N(x)$ eine Constante, so ist (17) ein Differential 1. Gattung; nach (6a) existiren $p = \frac{1}{2} n_1 n_2 (n_1 + n_2 - 4) + 1$ linear unabhängige Differentiale 1. Gattung.

Für die zu der Raumcurve $u' = 0$, $u'' = 0$ gehörigen Integrale (17) gelten nun ganz analoge Sätze wie für die zu $F(x, y) = 0$ gehörigen Integrale. So lautet z. B. das Abel'sche Theorem für dieselben:

(IV) Die Summen der Integrale von (17), ausgedehnt über alle Schnittpunkte der Curve $u' = 0$, $u'' = 0$ mit einer Fläche $v = 0$, ist gleich einer rational-logarithmischen Function der Coefficienten von $v = 0$ und gleich einer Constanten, wenn (17) ein Differential erster Gattung ist.

Die vorstehende Betrachtung lässt sich unmittelbar auf eine Curve im Raume von ϱ Dimensionen ausdehnen. Sind $\varrho + 1$ Variable $x_1, \ldots, x_{\varrho+1}$ verbunden durch $\varrho - 1$ homogene Gleichungen

$$u_1 = 0 \quad u_2 = 0 \ \ldots \ u_{\varrho-1} = 0 \tag{18}$$

bez. vom Grade $n_1, n_2, \ldots, n_{\varrho-1}$ und wählt man ganz beliebig $(\varrho - 1)(\varrho + 1)$ Grössen

$$a_1^i, a_2^i, \ldots, a_{\varrho+1}^i \quad (i = 1, \ldots, \varrho - 1);$$

setzt man ferner

$$a_1^i \frac{\partial u_k}{\partial x_1} + \cdots + a_{\varrho+1}^i \frac{\partial u_k}{\partial x_{\varrho+1}} = A_k^i \quad (i, k = 1, \ldots, \varrho - 1)$$

und versteht unter $\Phi(x)$ eine homogene, ganze, rationale Function in den x_i vom Grade $(n_1 + \cdots + n_{\varrho-1} - \varrho - 1)$, unter $M(x)$ und $N(x)$ homogene, ganze, rationale Functionen der x_i von gleichem Grade, so ist das allgemeine zu den Gleichungen (18) gehörige Abel'sche Integral, analog (17), von der Form

$$(19) \qquad \int \Phi(x) \cdot \frac{M(x)}{N(x)} \cdot \frac{\sum \pm a_1^1 a_2^2 \cdot \cdot a_{\varrho-1}^{\varrho-1} x_\varrho \, dx_{\varrho+1}}{\sum \pm A_1^1 A_2^2 \cdot \cdot A_{\varrho-1}^{\varrho-1}}$$

und das zugehörige Abel'sche Theorem lautet:

(V) Die Summe der Integrale (19), ausgedehnt über alle Werthsysteme, welche die Gleichungen (18) mit einer ϱ^{ten} Gleichung $u_\varrho = 0$ gemein haben, ist eine rational-logarithmische Function der Coefficienten von u_ϱ und eine Constante, wenn (19) ein Integral 1. Gattung, also $M(x) : N(x)$ eine Constante ist.

Wegen der geometrischen Folgerungen, die sich aus dem Satze (IV) ziehen lassen, sei auf die Litteratur verwiesen[1]).

1) Clebsch, Journal für Math. Bd. 63. S. 222 ff. (1863).

Zweiter Theil.

Das Jacobi'sche Umkehrproblem.

Einleitung.

Der zweite Theil der Theorie der Abel'schen Functionen und Integrale enthält die Lösung des Umkehrproblems. Wir schicken auch hier eine kurze Uebersicht über den entsprechenden Theil der Theorie der elliptischen Functionen voraus[1]).

Setzt man das elliptische Integral 1. Gattung gleich einer complexen Variabeln u, also (s. S. 3)

$$-\int_{\infty}^{x} \frac{dx}{\sqrt{Rx}} = u, \tag{1}$$

so besteht das Umkehrproblem darin, die Functionen $\sqrt{x-e_i}$, $x=p(u)$, $y=\sqrt{Rx}=-p'(u)$, und allgemein eine beliebige, rationale Function von $(x, \sqrt{Rx})$ als Function des Argumentes u darzustellen. Alle diese Functionen heissen elliptische Functionen von u und sind charakterisirt durch folgende Eigenschaften:

> Sie sind eindeutig und im Allgemeinen, d. h. mit Ausnahme einzelner Punkte der u-Ebene, stetig und an keiner Stelle im Endlichen wesentlich singulär.
>
> Sie sind doppeltperiodisch, d. h. sie besitzen zwei Perioden, die sehr einfach mit den Periodicitätsmoduln des elliptischen Integrals (1) zusammenhängen.

Die erste Aufgabe ist die Herleitung der sog. Thetafunctionen, durch welche sich alle elliptischen Functionen analytisch darstellen lassen.

---

1) Vgl. Weierstrass-Schwarz, Formeln und Lehrsätze etc. 2. A. 1893. S. 40 ff. Die Bezeichnung der Thetafunctionen ist der Symmetrie halber etwas abgeändert.

Die einfachsten elliptischen Functionen sind die drei Wurzelfunctionen $\sqrt{x-e_i}$ $(i=1,2,3)$. Zur Darstellung derselben als Functionen von u genügt die Kenntniss ihrer Perioden und ihrer 0^1 und ∞^1 Punkte. Mittels dieser Elemente erhält man die Functionen $\sqrt{x-e_i}$ zuerst als Quotienten von doppelt unendlichen Producten mit gemeinsamem Nenner. Diese Producte lassen sich durch Einführung der Exponentialfunction in einfach unendliche Producte und diese weiter in einfach unendliche Summen verwandeln, welche die Thetafunctionen vorstellen.

Haben die Querschnitte a und b der Verzweigungsfläche T die früher angegebene Lage, sind ferner 2ω und $2\omega'$ die Periodicitätsmoduln des Integrals (1) an den Querschnitten a und b und setzt man zur Abkürzung

$$u=2\omega v,\ \tau=\frac{\omega'}{\omega},\ h=e^{\tau\pi i},\ H_0^2=\prod_{n=1}^{\infty}(1-h^{2n}), \tag{2}$$

so ist die Productform der vier Thetafunctionen (wenn n alle ganzen Zahlen von 1 bis ∞ durchläuft):

$$\left\{\begin{aligned}
\Theta(u) &= \vartheta(v) = 2h^{\frac{1}{4}}\,H_0\sin\pi v\prod_n(1-2h^{2n}\cos 2\pi v+h^{4n}),\\
\Theta_1(u) &= \vartheta_1(v) = 2h^{\frac{1}{4}}\,H_0\cos\pi v\prod_n(1+2h^{2n}\cos 2\pi v+h^{4n}),\\
\Theta_2(u) &= \vartheta_2(v) = H_0\prod_n(1+2h^{2n-1}\cos 2\pi v+h^{4n-2}),\\
\Theta_3(u) &= \vartheta_3(v) = H_0\prod_n(1-2h^{2n-1}\cos 2\pi v+h^{4n-2}).
\end{aligned}\right. \tag{3}$$

Von diesen Functionen ist die erste eine ungerade, die drei andern sind gerade Functionen von u oder v. Verwandelt man die Producte in Summen, so erhält man (wenn n alle ganzen Zahlen von $-\infty$ bis $+\infty$ durchläuft):

$$\left\{\begin{aligned}
\Theta(u) &= \vartheta(v) = \sum_n e^{\pi i\left\{\tau\left(n+\frac{1}{2}\right)^2+2\left(v+\frac{1}{2}\right)\left(n+\frac{1}{2}\right)\right\}},\\
\Theta_1(u) &= \vartheta_1(v) = \sum_n e^{\pi i\left\{\tau\left(n+\frac{1}{2}\right)^2+2v\left(n+\frac{1}{2}\right)\right\}},\\
\Theta_2(u) &= \vartheta_2(v) = \sum_n e^{\pi i\{\tau n^2+2nv\}},\\
\Theta_3(u) &= \vartheta_3(v) = \sum_n e^{\pi i\left\{\tau n^2+2\left(v+\frac{1}{2}\right)n\right\}}.
\end{aligned}\right. \tag{4}$$

Die Thetafunctionen haben folgende, charakteristische Eigenschaften:

Sie sind eindeutig und für alle endlichen Werthe von u stetig.

Sie besitzen gewisse periodische Eigenschaften derart, dass sie sich, bei Vermehrung von u um einen der Periodicitätsmoduln des Integrales (1), nur um Exponentialfactoren gewisser Art ändern.

Die vorstehenden Formeln finden ihre Verallgemeinerung im Abschnitt V; die Darstellungen (4) in den Gleichungen (37) § 26. In der Theorie der Abel'schen Functionen muss man jedoch den angegebenen Weg zur Herleitung der Thetafunctionen verlassen, da analoge Productentwicklungen wie (3) für Functionen mit mehreren Variabeln nicht existiren. Wir leiten daher die Thetafunctionen von p Variabeln im Abschnitt V auf einem anderen Wege ab, der für die elliptischen Functionen ($p = 1$) bereits von Liouville und Hermite angegeben wurde, nämlich auf functionentheoretischem Wege aus den Eigenschaften der $2p$-fach periodischen Functionen von p Variabeln.

Die zweite Aufgabe betrifft die Lösung des Umkehrproblems. Die Darstellung der Wurzelfunctionen $\sqrt{x - e_i}$ durch die Variabeln u ist enthalten in den Gleichungen ($i = 1, 2, 3$):

$$\sqrt{x - e_i} = C_i \frac{\Theta_i(u)}{\Theta(u)} = C_i \frac{\vartheta_i(v)}{\vartheta(v)}, \tag{5}$$

wo C_1, C_2, C_3 von u unabhängige Constanten sind. Setzt man in (5) $x = \infty$, e_1, e_2, e_3 und zur Abkürzung ($i = 1, 2, 3$):

$$\left.\begin{array}{c} \Theta_i(0) = \vartheta_i(0) = \Theta_i = \vartheta_i \\ \left(\dfrac{\partial\,\Theta(u)}{\partial u}\right)_{u=0} = \Theta'; \quad \left(\dfrac{\partial\,\vartheta(v)}{\partial v}\right)_{v=0} = \vartheta', \end{array}\right\} \tag{6}$$

so erhält man

$$\left.\begin{array}{l} C_1 = \dfrac{\Theta'}{\Theta_1} = \sqrt{e_1 - e_2}\,\dfrac{\Theta_2}{\Theta_3} = \sqrt{e_1 - e_3}\,\dfrac{\Theta_3}{\Theta_2} = \sqrt[4]{e_1 - e_2 \cdot e_1 - e_3}, \\ C_2 = \dfrac{\Theta'}{\Theta_2} = \sqrt{e_1 - e_2}\,\dfrac{\Theta_1}{\Theta_3} = \sqrt{e_2 - e_3}\,\dfrac{\Theta_3}{\Theta_1} = \sqrt[4]{e_1 - e_2 \cdot e_2 - e_3}, \\ C_3 = \dfrac{\Theta'}{\Theta_3} = \sqrt{e_1 - e_3}\,\dfrac{\Theta_1}{\Theta_2} = \sqrt{e_2 - e_3}\,\dfrac{\Theta_2}{\Theta_1} = \sqrt[4]{e_1 - e_3 \cdot e_2 - e_3}. \end{array}\right\} \tag{7}$$

Diese Gleichungen geben die Werthe von C_1, C_2, C_3, entweder durch Thetafunctionen oder rein algebraisch ausgedrückt; zugleich stellen sich die Quotienten der Functionen Θ_1, Θ_2, Θ_3, Θ' algebraisch in e_1, e_2, e_3 dar.

Setzt man in (3) $u = 0$, so folgt zwischen den geraden Functionen Θ_1, Θ_2, Θ_3 und der Ableitung Θ' der ungeraden Function Θ für den Nullwerth des Argumentes die Relation

$$(8) \qquad \pi\Theta_1\Theta_2\Theta_3 = 2\omega\Theta' \quad \text{oder} \quad \pi\vartheta_1\vartheta_2\vartheta_3 = \vartheta'.$$

Verbindet man diese Gleichung mit (7), so ergeben sich Relationen, welche die Werthe $\Theta_i : \sqrt{\omega}$ $(i = 1, 2, 3)$ und $\Theta' : \sqrt{\omega}$ rein algebraisch durch die Grössen e_1, e_2, e_3 darstellen, und welche zur annähernden Berechnung der Grösse h oder des Thetamoduls τ (2) durch die gegebenen Grössen e_i dienen. Diese Gleichungen sind:

$$(9) \qquad \begin{cases} \Theta_1 = \vartheta_1 = \sqrt{\frac{2\omega}{\pi}}\sqrt[4]{e_2 - e_3}, \\ \Theta_2 = \vartheta_2 = \sqrt{\frac{2\omega}{\pi}}\sqrt[4]{e_1 - e_3}, \\ \Theta_3 = \vartheta_3 = \sqrt{\frac{2\omega}{\pi}}\sqrt[4]{e_1 - e_2}, \\ 2\omega\Theta' = \vartheta' = 2\omega\sqrt{\frac{2\omega}{\pi}}\sqrt[4]{e_1 - e_2 \cdot e_1 - e_3 \cdot e_2 - e_3}. \end{cases}$$

Die vorstehenden Formeln finden ihre Verallgemeinerung in dem VI. Abschnitt; nämlich die Gleichungen (5) in (9), (14), (16) und (19) § 31; die Gleichungen (7) in (11) und (12) § 31 und (18) § 33; die Gleichungen (9) in (12) § 31 und (29) § 33. Die Gleichung (8) endlich in den am Ende von § 33 erwähnten Gleichungen (P).

Die Thetafunctionen bilden nicht nur die Grundlage für die Lösung des Umkehrproblems; sie beherrschen auch alle weiteren Darstellungen in der Theorie der elliptischen Functionen.

Die d r i t t e A u f g a b e bezieht sich daher auf die Darstellung der allgemeinsten, rationalen Function von $(x, \sqrt{Rx})$ sowohl durch Quotienten, gebildet aus Producten von Thetafunctionen, wie auch durch Summen, gebildet aus den Ableitungen der Logarithmen von Thetafunctionen; ferner auf die Darstellung des Integrals 3. Gattung mit der oberen Grenze x durch Logarithmen von Thetafunctionen mit dem Argument u und des Integrals 2. Gattung durch die Ableitung eines solchen Logarithmus nach u, endlich auf die Darstellung des allgemeinsten, elliptischen Integrals durch Logarithmen von Thetafunctionen und die Ableitungen solcher Logarithmen.

Wir führen als Beispiele nur an erstens die Darstellung von $x = p(u)$:

$$(10) \qquad x = p(u) = -\frac{d^2 \log \Theta(u)}{du^2} + \frac{1}{3}\frac{\Phi'''}{\Theta'},$$

zweitens die fundamentale Formel:

$$x - x_0 = p(u) - p(u_0) = -\Theta'^2 \frac{\Theta(u-u_0)\,\Theta(u+u_0)}{\Theta^2(u)\,\Theta^2(u_0)}, \qquad (11)$$

in der x_0, u_0 ein beliebiges, zusammengehöriges Werthepaar (x, u) ist und aus der sich wieder die Gleichungen (5) ergeben, wenn man x_0 gleich e_1, e_2, e_3 und bez. u_0 gleich ω, $\omega + \omega'$, ω' setzt; endlich drittens die Darstellung eines Integrals zweiter Gattung (vgl. 10):

$$\int^x \frac{x\,dx}{\sqrt{Rx}} = \frac{\Theta'(u)}{\Theta(u)} - \frac{u}{3}\frac{\Theta'''}{\Theta'} + C, \qquad (12)$$

und die eines Integrals 3. Gattung (vgl. 11):

$$\int^x \frac{\sqrt{Rx_0}}{\sqrt{Rx}} \frac{dx}{x - x_0} = \log \frac{\Theta(u-u_0)}{\Theta(u+u_0)} + 2u\,\frac{\Theta'(u_0)}{\Theta(u_0)} + C, \qquad (13)$$

wo die Constanten C von den unteren Grenzen der Integrale abhängen. Aus (11) ergeben sich weitere, wichtige Formeln, darunter das Additionstheorem der Thetafunction.

Die Darstellungen der rationalen Functionen durch Thetafunctionen finden ihre Verallgemeinerung in den Formeln des VII. Abschnitts § 34—36, die der Abel'schen Integrale in § 37.

Die Form der Thetafunctionen, sowie alle vorgenannten Darstellungen durch Thetafunctionen wurden zunächst gewonnen für eine bestimmte Lage der Querschnitte a und b in der Verzweigungsfläche T von $y = \sqrt{Rx}$.

Die vierte und letzte Aufgabe in der Theorie der elliptischen Functionen hat die Verallgemeinerung der erhaltenen Darstellungen zum Ziel, indem sie die Abänderungen untersucht, die eintreten, wenn die Querschnitte a und b beliebig verlegt werden. Es zeigt sich, dass dabei die Thetafunctionen eine sog. lineare Transformation erfahren. Dieselbe besteht darin, dass, abgesehen von einem Exponentialfactor, jede Thetafunction mit dem Argument v und dem Modul τ übergeht in eine Thetafunction, deren Argument v_1 und Modul τ_1 von v und τ in einfacher Weise abhängen. Dabei geht die ungerade Function $\vartheta(v, \tau)$ in die ungrade Function $\vartheta(v_1, \tau_1)$ über, während jede der drei graden Functionen $\vartheta_i(v, \tau)$ $(i = 1, 2, 3)$ in jede der graden Functionen $\vartheta_k(v_1, \tau_1)$ $(k = 1, 2, 3)$ übergehen kann. Neben ihrer theoretischen hat die lineare Transformation der Thetafunctionen die praktische Bedeutung, für jeden Fall die am stärksten convergirende Darstellung durch Thetafunctionen zu liefern. Diese Untersuchungen über die lineare Transformation der Thetafunctionen finden ihre Verallgemeinerung im Abschnitt VIII.

Hiermit sind die wichtigsten Punkte in der Theorie der elliptischen Functionen berührt, wobei jedoch die allgemeine Transformation ausgeschlossen bleibt. Die Theorie der Abel'schen Functionen beschäftigt sich nun in ihrem zweiten Theil mit den entsprechenden Aufgaben; der Stoff ist folgendermassen gegliedert:

Abschnitt V enthält die Herleitung der Thetafunctionen von p Variabeln und die Untersuchung der Nullpunkte derjenigen Thetafunctionen, die man erhält, wenn man die p Argumente durch p Integrale 1. Gattung mit derselben oberen Grenze ersetzt.

Abschnitt VI enthält die Lösung des Umkehrproblems oder die Darstellung der einfachsten Abel'schen Functionen durch Thetafunctionen.

Abschnitt VII enthält allgemeine Beziehungen zwischen Thetafunctionen und rationalen Functionen oder Abel'schen Integralen.

Abschnitt VIII enthält die Untersuchung der Abänderungen, welche die in VI und VII gegebenen Darstellungen durch Verlegung des Querschnittsystems der Verzweigungsfläche oder durch lineare Transformation der Thetafunctionen erfahren.

Fünfter Abschnitt.

Die Thetafunction und ihre Nullpunkte.

Der fünfte Abschnitt behandelt die Eigenschaften der Thetafunction von p Variabeln, auf welcher die analytische Lösung des Umkehrproblems beruht. Wir geben in § 25 nach kurzer Formulirung des Umkehrproblems eine Herleitung der Thetafunction, in § 26 eine Entwicklung ihrer Eigenschaften. Die übrigen §§ des Abschnitts beziehen sich auf die Zahl und Lage der Nullpunkte einer Thetafunction, deren Argumente aus den p Normalintegralen 1. Gattung gebildet sind.

§ 25. Formulirung des Umkehrproblems. Herleitung der Thetafunction.

Das Jacobi'sche Umkehrproblem, von dem die folgenden Untersuchungen ausgehen, ist eine Verallgemeinerung des elliptischen Umkehrproblems (s. Einleitung S. 187). Zu einer Gleichung $F(x, y) = 0$ vom Geschlecht p gehören p linear unabhängige Normalintegrale 1. Gattung[1]):

$$u_1 = \int_c^x \frac{f_1(x, y)\, dx}{F'(y)}, \ldots, u_p = \int_c^x \frac{f_p(x, y)\, dx}{F'(y)}. \tag{1}$$

Man bilde mittels der Integrale (1) zwischen p verschiedenen, oberen Grenzen $x_1, .., x_p$ einerseits und p Variabeln $U_1, .., U_p$ andrerseits die p Gleichungen ($i = 1, .., p$):

$$\int_{c_1}^{x_1} \frac{f_i(x, y)\, dx}{F'(y)} + \cdots + \int_{c_p}^{x_p} \frac{f_i(x, y)\, dx}{F'(y)} \equiv U_i, \tag{2}$$

in welchen die p unteren Grenzpunkte c_h beliebig, aber fest gewählt seien und die Integrationswege zwischen den Punktepaaren c_h und x_h

---

1) Die Wahl der Normalintegrale u_i beeinträchtigt die Allgemeinheit der Untersuchung nicht, da man durch lineare Substitution statt der p Normalintegrale $u_1, .., u_p$ stets p beliebige Integrale 1. Gattung $v_1, .., v_p$ einführen kann.

in der Verzweigungsfläche T für alle p Gleichungen dieselben seien, was durch das Congruenzzeichen angedeutet sei. Dann besteht das Umkehrproblem im engeren Sinne in der Aufgabe, die je durch $F(x, y) = 0$ verbundenen Coordinaten (x_h, y_h) der p oberen Grenzpunkte $x_1, .., x_p$ als Functionen der p Integralsummen $U_1, .., U_p$ darzustellen[1]), in erweitertem Sinne in der Aufgabe, rationale (oder auch gewisse, algebraische) und symmetrische Functionen der Coordinaten der p oberen Grenzpunkte x_h als Functionen der p Grössen U_i darzustellen. Diese Functionen heissen Abel'sche Functionen der Variabeln $U_1, .., U_p$. Es zeigt sich im Verlauf unserer Untersuchungen (§ 36), dass diese Functionen charakterisirt sind durch folgende Eigenschaften:

(A) 1) Sie sind eindeutig, ferner im Allgemeinen (d. h. mit Ausnahme von Werthgebieten von weniger als $2p$ Dimensionen) stetig und für kein endliches Werthsystem der U_i wesentlich singulär. Die p Variabeln U_i heissen auch die Argumente der Abel'schen Functionen.

2) Sie sind $2p$-fach periodisch, d. h. sie besitzen $2p$ von einander unabhängige Periodensysteme, die mit den Systemen der Periodicitätsmoduln der Integrale (1) sehr einfach zusammenhängen. Diese Periodensysteme heissen auch die Modulsysteme der Abel'schen Functionen.

Wir zeigen nur kurz, wie man durch Verallgemeinerung einer von Jacobi für $p = 2$ angestellten Untersuchung[2]) gerade auf das in (2) formulirte Umkehrproblem geführt wird und warum man die Umkehrung eines einzelnen der Integrale (1), etwa des ersten, durch welche x als Function von u_1 definirt würde, ausschliesst. Es ist klar, dass, wenn eine Lösung des Problems (2) möglich ist, zu denselben Punkten x_h in (2) unendlich viele Werthsysteme der U_i gehören, die sich jedoch nur um Systeme von zusammengehörigen Periodicitätsmoduln der Integrale (1) unterscheiden. Die Coordinaten der p Punkte x_h sind also $2p$-fach periodische Functionen der p Variabeln U_i; sie sind aber zugleich einwerthige Functionen der U_i, wie schon in (A) erwähnt wurde und später (§ 28) bewiesen wird. Ebenso wären die Coordinaten des Punktes x in der ersten Gleichung (1), die Umkehr-

---

1) Ein specieller Fall des Umkehrproblems ist das Abel'sche Theorem, wo die Grössen U_i ebenfalls Summen von Integralen 1. Gattung mit gegebenen Grenzen sind und wo die Lösung d. h. die Bestimmung der p Punkte x_h rein algebraisch ist (s. § 20).

2) Jacobi, Ges. W. Bd. II S. 7 ff. (1832) und S. 23 ff. (1834).

barkeit dieser Gleichung vorausgesetzt, $2p$-fach periodische Functionen der einen Variabeln u_1; sie wären aber nicht eindeutige, sondern unendlich vieldeutige Functionen von u_1, wie aus dem Folgenden hervorgeht.

Eine Function von p Variabeln $\omega_1, .., \omega_p$ heisst periodisch, wenn sie ihren Werth nicht ändert bei gleichzeitiger Zunahme aller Argumente um ein constantes Grössensystem, etwa $A_1, .., A_p$. Ein solches System heisst ein System zusammengehöriger Perioden. Hat die Function mehrere Periodensysteme, etwa $A_{11}, .., A_{p1}$; $A_{12}, .., A_{p2}$; ..; $A_{1q}, .., A_{pq}$, so ist auch jede lineare Combination derselben wie $m_1 A_{11} + \cdot\cdot + m_q A_{1q}$; $m_1 A_{21} + \cdot\cdot + m_q A_{2q}$; ..; $m_1 A_{p1} + \cdot\cdot + m_q A_{pq}$ mit denselben ganzzahligen Coefficienten $m_1, .., m_q$ ein zusammengehöriges Periodensystem. Mehrere Periodensysteme heissen von einander unabhängig, wenn sie nicht aus einer geringeren Zahl von Periodensystemen in der angegebenen Weise sich zusammensetzen lassen.

Ist nun eine Function von p Variabeln $\omega_1, .., \omega_p$ eindeutig und im Allgemeinen stetig und besitzt sie ϱ von einander unabhängige Periodensysteme, dargestellt durch das Schema:

$$\begin{array}{c|cccc|} \omega_1 & A_{11} & A_{12} & .. & A_{1\varrho} \\ \omega_2 & A_{21} & A_{22} & .. & A_{2\varrho} \\ \vdots & \vdots & \vdots & .. & \vdots \\ \omega_p & A_{p1} & A_{p2} & .. & A_{p\varrho} \end{array}\,, \tag{3}$$

so gelten folgende Sätze[1]), die wir nur historisch anführen:

(I) Ist $\varrho = 2p$, so kann die Determinante A, gebildet aus den reellen und imaginären Theilen A'_{ik} und A''_{ik} der Moduln A_{ik}, nicht verschwinden, oder geometrisch: es kann der Inhalt des periodisch wiederkehrenden Gebietes der Function nicht Null sein.

Wäre nämlich die Determinante $A = 0$, so hätte man zwischen den $2p$ Modulsystemen p Gleichungen der Form ($i = 1, .., p$):

$$q_1 A_{i1} + \cdot\cdot + q_{2p} A_{i2p} = 0,$$

wo $q_1, .., q_{2p}$ reelle Zahlen sind; es sind dann zwei Fälle möglich:

entweder die $2p$ Grössen q_i sind sämmtlich ganze oder rationale Zahlen; dann kann man zeigen, dass die $2p$ Periodensysteme sich auf nur $2p - 1$ Systeme zurückführen lassen;

---

1) Hermite, Journ. für Math. Bd. 40 S. 310 (1850). Riemann, Ges. W. S. 276 ff. (1859). Clebsch-Gordan, Abel'sche Functionen S. 130 ff. (1866). Weierstrass, Berliner Monatsberichte 1876 oder Abh. zur Functionenlehre. Berlin 1886 S. 165 ff.

oder die $2p$ Grössen q_i sind zum Theil oder alle irrational; dann kann man zeigen, dass sich die p Variabeln ω_i durch weniger als p lineare Combinationen der ω_i ersetzen lassen.

Beides betrachten wir als ausgeschlossen.

(II) Eine eindeutige und im Allgemeinen stetige Function von p Variabeln $\omega_1, .., \omega_p$ kann nicht mehr als $2p$ unabhängige Periodensysteme besitzen.

Zum Beweise seien $2p$ unabhängige Periodensysteme (3) ($\varrho = 2p$) gegeben, also die zugehörige Determinante $A \gtrless 0$ (nach I). Angenommen, es gäbe noch ein $(2p + 1)^{\text{tes}}$ Periodensystem $A_{12p+1}, ..,$ A_{p2p+1}, so bilde man mit $2p + 1$ ganzen Zahlen $m_1, .., m_{2p+1}$ die $2p$ reellen Ausdrücke ($l = 1, .., p$):

$$(5) \qquad \begin{cases} m_1 A'_{l1} + \cdots + m_{2p+1} A'_{l2p+1}, \\ m_1 A''_{l1} + \cdots + m_{2p+1} A''_{l2p+1}. \end{cases}$$

Dann sind zwei Fälle möglich:

entweder die $2p + 1$ Zahlen m_i lassen sich so bestimmen, dass die $2p$ Ausdrücke (5) sämmtlich Null werden; dann kann man zeigen, dass die $2p + 1$ Periodensysteme sich auf $2p$ Periodensysteme zurückführen lassen;

oder die $2p + 1$ Zahlen m_i lassen sich so bestimmen, dass die $2p$ Ausdrücke (5) kleiner werden als $2p$ beliebig vorgegebene, kleine Grössen $\varepsilon_1, .., \varepsilon_{2p}$; dann kann man zeigen, dass die p Argumente ω_i sich durch weniger als p lineare Combinationen der ω_i ersetzen lassen. Beides war ausgeschlossen.

Diese Sätze führen nun nothwendig auf die Form (2) des Umkehrproblems[1]). Denn wollte man ein einzelnes Integral 1. Gattung mit der oberen Grenze x gleich U setzen, so würde der allgemeinste Werth, den das Integral bei Veränderung des Integrationsweges annimmt, aus einem Werth U hervorgehen, indem man diesen um eine lineare, ganzzahlige Combination der $2p$ Periodicitätsmoduln des Integrals vermehrt. Durch passende Bestimmung der ganzen Zahlen könnte man nun (wie sich aus dem Beweise von (II) ergibt) den reellen und imaginären Theil des Zuwachses, den U so erfährt, also auch diesen Zuwachs selber, beliebig klein machen. Das Integral könnte also für jede obere Grenze x jeden Werth U annehmen und folglich auch die obere Grenze für jeden beliebigen Werth von U jeden beliebigen Werth x. Bei der Umkehrung würde man also für die Coordinaten des Punktes x Functionen von U erhalten, die

---

1) Jacobi, l. c. und Clebsch-Gordan, Abel'sche Functionen S. 136.

unendlich vieldeutig wären und deren Werth nicht sowohl von dem Werth des Argumentes U abhinge, als vielmehr von dem Wege, den das Integral durchlaufen muss, um einen gewissen Werth U zu erlangen. Aehnliches würde gelten, wenn man Gleichungen der Form (2) bilden wollte aus q Integralen 1. Gattung mit q oberen Grenzen x_h und q Variabeln U_i, so lange $q < p$ wäre. Nimmt man aber die p Gleichungen (2), also $q = p$, so fallen die Schwierigkeiten weg. Denn die allgemeinsten Werthe der U_i, die durch Veränderung der Integrationswege entstehen, gehen aus einem Werthsystem hervor durch Hinzufügung eines Systemes von zusammengehörigen Periodicitätsmoduln der Integrale. Trennt man nun die p Zuwüchse, welche die verschiedenen Grössen U_i so erhalten, in ihre $2p$ reellen und imaginären Theile, so kann man durch passende Bestimmung der ganzen Zahlen (wie sich aus dem Beweise von (II) ergibt) von diesen $2p$ Grössen wohl die $2p - 1$ ersten beliebig klein machen, nicht aber die $2p^{\text{te}}$. In zwei Werthsystemen der U_i also, die denselben oberen Grenzpunkten x_h entsprechen, sind die beiden Werthe wenigstens für eine der Variabeln U_i um eine endliche Grösse verschieden, so dass also nicht mehr jedem System der oberen Grenzen x_h jedes System der U_i entspricht. (q. e. d.)

Die analytische Behandlung des Umkehrproblems gründet sich nun, wie bei den elliptischen Functionen, auf eine transcendente Function, die Thetafunction mit p Variabeln. Man gelangt zu derselben[1]), indem man sich die Aufgabe stellt, eine Function zu bilden $\Psi(\omega_1, \ldots, \omega_p)$ von p Variabeln $\omega_1, \ldots, \omega_p$, die durch die Eigenschaften (A) S. 194 charakterisirt ist. Die $2p$ simultanen Periodensysteme dieser Function seien gegeben durch das Schema:

$$\begin{array}{c|ccc|} \omega_1 & A_{11} & \ldots & A_{1\,2p} \\ \vdots & \cdot & \cdot\;\cdot & \cdot \\ \omega_p & A_{p1} & \ldots & A_{p\,2p} \end{array}\,. \tag{6}$$

Da die Determinante A, gebildet aus den reellen und imaginären Theilen dieser Perioden, nicht verschwindet (Satz I), so können auch nicht alle aus p der Periodensysteme gebildeten Determinanten verschwinden. Eine der nicht verschwindenden Determinanten sei die der p ersten Periodensysteme in (6). Wir benutzen dieselbe zur Einführung neuer Variabeln $v_1, \ldots, v_p$, indem wir setzen $(i = 1, \ldots, p)$:

$$\omega_1 \pi i = \sum_i A_{1i} v_i, \quad \ldots, \quad \omega_p \pi i = \sum_i A_{pi} v_i. \tag{7}$$

---

1) Für $p = 1$: Hermite (1844), s. Jacobi's Ges. W. Bd. II S. 97. Für allgemeines p: Weber, Ab. F. $(p = 3)$ S. 5 ff. (1875).

Die Periodensysteme der transformirten Function $F(v_1, .., v_p)$ sind alsdann:

$$(8) \qquad \begin{array}{c|cccc|cccc|} v_1 & \pi i & 0 & .. & 0 & b_{11} & b_{12} & .. & b_{1p} \\ v_2 & 0 & \pi i & .. & 0 & b_{21} & b_{22} & .. & b_{2p} \\ \vdots & . & . & . & . & . & . & . & . \\ v_p & 0 & 0 & .. & \pi i & b_{p1} & b_{p2} & .. & b_{pp} \end{array},$$

wo die b_{ik} sich leicht nach (6) und (7) bestimmen. Die p ersten Periodensysteme in (8) zeigen, dass die Function $F(v_1, .., v_p)$ für jede der Variabeln $v_1, .., v_p$ einzeln die Periode πi hat. Dies führt dazu, F als Function von $e^{2v_1}, .., e^{2v_p}$ aufzufassen. Wir fragen zunächst, ob eine $2p$-fach periodische Function F dieser Art für alle endlichen Werthe der Argumente $v_1, .., v_p$ endlich und stetig sein kann. Dies ist nicht möglich, wie aus folgendem Satze hervorgeht:

(III) Eine für alle endlichen Werthe der Argumente $v_1, .., v_p$ endliche und stetige Function $\Phi(v_1, .., v_p)$, die für jedes Argument einzeln die Periode πi hat, kann kein weiteres von diesen unabhängiges Periodensystem $b_1, .., b_p$ besitzen[1]); sie kann auch nicht bei gleichzeitiger Aenderung der Argumente um ein solches System $b_1, .., b_p$ einen constanten Factor C annehmen.

In der That, eine Function von der vorausgesetzten Beschaffenheit lässt sich, wie unten bewiesen wird, durch eine Reihe von der Form:

$$(9) \qquad \begin{cases} \Phi(v_1, .., v_p) = \sum\limits_{\nu_1} .. \sum\limits_{\nu_p} B_{\nu_1 .. \nu_p} e^{2(\nu_1 v_1 + \cdots + \nu_p v_p)} \\ \qquad (\nu_1, .., \nu_p = -\infty, .., +\infty) \end{cases}$$

darstellen, in der die Summation sich auf alle positiven und negativen, ganzzahligen Werthe von $\nu_1, .., \nu_p$ erstreckt. Wäre nun erstens:

$$\Phi(v_1 + b_1, .., v_p + b_p) = \Phi(v_1, .., v_p),$$

so hätte man nach (9):

$$\sum_{\nu_1} .. \sum_{\nu_p} B_{\nu_1 .. \nu_p} e^{2\Sigma \nu_i v_i} = \sum_{\nu_1} .. \sum_{\nu_p} B_{\nu_1 .. \nu_p} e^{2\Sigma \nu_i v_i} e^{2\Sigma \nu_i b_i}.$$

Diese Gleichung kann nur identisch erfüllt sein, wenn $\sum \nu_i b_i$ ein ganzes Vielfaches von πi ist für alle in (9) vorkommenden Werthcombinationen von $\nu_1, .., \nu_p$. Soll sich also die Function Φ nicht

1) Für $p = 1$: Satz von Liouville, Comptes rendus 1844, S. 1262. Vgl. auch Journ. für Math. Bd. 88. S. 277.

auf eine Constante reduciren, so müssen 1, 2, .. oder p Relationen der Form bestehen:

$$\sum_{i=1}^{p} k_i b_i = l\pi i,$$

wo die k_i und l ganze Zahlen sind.

Bestehen p solcher Relationen, von denen keine aus der anderen folgt, so sind die Grössen b_i rationale Vielfache von πi und die wahren Perioden der Function sind nicht πi selber, sondern gewisse Bruchtheile von πi, aus denen auch das Periodensystem $b_1, .., b_p$ zusammengesetzt werden kann. Bestehen aber nur 1, 2, .. oder $p-1$ solcher Relationen, so beschränkt sich die Function bez. auf 1, 2, .. oder $p-1$ Glieder, die sich bez. durch 1, 2, .., $p-1$ lineare Combinationen der Variabeln $v_1, .., v_p$ (nämlich die Werthe $\sum k_i v_i$) ausdrücken lassen, was wir ausschliessen.

Wäre dagegen zweitens:

$$\Phi(v_1 + b_1, .., v_p + b_p) = C\Phi(v_1, .., v_p),$$

so müsste C die Form haben $C = e^{2\Sigma \mu_i b_i}$, wo $\mu_1, .., \mu_p$ ganze Zahlen sind. Dann aber hätte man in $e^{-2\Sigma \mu_i v_i}\Phi(v_1, .., v_p)$ eine Function, die eindeutig und für alle endlichen Werthe der Argumente stetig wäre und ausser den Einzelperioden πi das Periodensystem b hätte, was nach dem Vorstehenden ausgeschlossen ist.

Wir beweisen nachträglich den bereits benutzten Satz[1]):

(IV) Eine für alle endlichen Werthe der Argumente $v_1, .., v_p$ endliche und stetige Function $\Phi(v_1, .., v_p)$, die für jedes Argument einzeln die Periode πi hat, lässt sich immer und nur auf eine Art in eine nach ganzen positiven und negativen Potenzen der Grössen $e^{2v_1}, .., e^{2v_p}$ fortschreitende, für alle endlichen Werthsysteme von $v_1, .., v_p$ convergente Reihe von der Form (9) entwickeln.

Zum Beweise betrachte man $\Phi(v_1, .., v_p)$ zunächst als Function von v_1 allein und bezeichne sie in diesem Sinne mit $\Phi_1(v_1)$. Da diese Function die Periode πi besitzen soll, so lässt sie sich, und zwar nur auf eine Art, in eine nach Potenzen von e^{2v_1} fortschreitende, für alle endlichen Werthe von v_1 convergente Reihe entwickeln von der Form:

$$\Phi_1(v_1) = \sum_{\nu_1} B_{\nu_1} e^{2\nu_1 v_1} \quad (\nu_1 = -\infty, .., +\infty). \qquad (9a)$$

---

1) Hermite 1844 l. c. Thomae, Die allgem. Transform. der Thetafunction. Diss. Göttingen 1864. S. 6.

Denn setzt man $2v_1 = \log z$, so entspricht jedem Werth von z eine Reihe von Werthen v_1 von der Form $v_1 + m\pi i$, wo m eine ganze Zahl ist. Allen diesen Werthen entspricht nur ein Werth von $\Phi_1(v_1)$. Daher ist $\Phi_1(v_1)$ eine eindeutige Function von z. Ferner ist $\Phi_1(v_1)$ endlich für alle Werthe von z, mit Ausnahme von $z = 0$ und $z = \infty$. Schlägt man daher um den Nullpunkt der z-Ebene einen sehr kleinen und einen sehr grossen Kreis, so ist die Function $\Phi_1(v_1)$ in dem Ringgebiet zwischen den zwei Kreisen eindeutig und stetig und folglich entwickelbar in eine nach ganzen, positiven und negativen Potenzen von z fortschreitende Reihe, die für jeden Punkt des Ringgebietes convergirt. Führt man wieder v_1 ein statt z, so hat man die obige Entwicklung (9a). Kehrt man zurück zur Function $\Phi(v_1, .., v_p)$, so ist der Coefficient B_{ν_1} in (9a) noch Function von $(v_2, .., v_p)$ und lässt sich, als Function von v_2 betrachtet, die nach Voraussetzung die Periode πi besitzt, entwickeln in der Form:

$$B_{\nu_1} = \sum_{\nu_2} B_{\nu_1 \nu_2} e^{2\nu_2 v_2} \quad (\nu_2 = -\infty, \cdot\cdot, +\infty),$$

wo $B_{\nu_1 \nu_2}$ noch Function von $(v_3, .., v_p)$ ist. Fährt man so fort, so ergibt sich schliesslich für $\Phi(v_1, .., v_p)$ die Entwicklung (9), in der die Coefficienten $B_{\nu_1 .. \nu_p}$ von $v_1, .., v_p$ ganz unabhängig sind. (q. e. d.)

Aus Satz III ist zu schliessen[1]), dass die allgemeine, periodische Function $F(v_1, .., v_p)$ von p Variabeln mit mehr als p Periodensystemen nothwendig Stellen $v_1, .., v_p$ im Endlichen hat, in denen sie unendlich wird und weiter, dass sie sich darstellen lässt in Bruchform:

$$(10) \qquad F(v_1, .., v_p) = \frac{\Phi_1(v_1, \cdot\cdot, v_p)}{\Phi(v_1, \cdot\cdot, v_p)},$$

wo Φ und Φ_1 convergente Reihen der Form (9) sind. Die Bedingung dafür, dass die Function F, ausser der Periode πi für jede Variable, noch p weitere, simultane Periodensysteme b_{ik} (8) habe, ist

$$\frac{\Phi(v_1 + b_{1i}, \cdot\cdot, v_p + b_{pi})}{\Phi(v_1, \cdot\cdot, v_p)} = \frac{\Phi_1(v_1 + b_{1i}, \cdot\cdot, v_p + b_{pi})}{\Phi_1(v_1, \cdot\cdot, v_p)} = \varphi_i(v_1, \cdot\cdot, v_p),$$

so dass für Zähler und Nenner in (10) die Functionalgleichungen gelten $(i = 1, .., p)$:

$$(11) \qquad \Phi(v_1 + b_{1i}, .., v_p + b_{pi}) = \Phi(v_1, .., v_p)\, \varphi_i(v_1, .., v_p).$$

Da die p Functionen φ_i (ohne Constanten zu sein, Satz III) für jede

1) Weber, l. c. S. 8 ff.

Variable die Periode πi haben müssen, so macht man die einfachste, zulässige Annahme, indem man setzt $(i, r = 1, .., p)$:

$$\varphi_i(v_1, .., v_p) = C_i e^{2\sum_r k_r^i v_r}, \tag{12}$$

wo die C_i beliebige Constanten und die k_r^i ganze Zahlen bedeuten.

Zunächst kann die Determinante der k_r^i, also

$$K = \sum \pm k_1^1 k_2^2 \cdot\cdot k_p^p, \tag{13}$$

nicht verschwinden. Es würden sich nämlich sonst p ganze Zahlen $n_1, .., n_p$ bestimmen lassen (proportional gewissen Unterdeterminanten von K) so, dass $\sum_i n_i k_r^i = 0$ ist. Bildet man nun $b_h = \sum_i n_i b_{hi}$, so würde aus (11) und (12) folgen:

$$\Phi(v_1 + b_1, .., v_p + b_p) = C e^{2\sum_i\sum_r n_i k_r^i v_r} \Phi(v_1, .., v_p) = C \cdot \Phi(v_1, .., v_p),$$

wo C eine Constante ist. Dies ist aber nach (III) nicht zulässig.

Diese Bemerkung führt zur Vereinfachung durch Einführung neuer Variabeln; wir setzen nämlich:

$$\sum_r k_r^i v_r = - m u_i, \qquad \sum_r k_r^i b_{rh} = - m a_{ih}, \tag{14}$$

wo $m = K$ (13) ist und bezeichnen $\Phi(v_1, .., v_p)$ als Function der u_i durch $\Theta(u_1, .., u_p)$.

Die Function $\Theta(u_1, .., u_p)$ hat wieder für jede einzelne Variable u_i die Periode πi. Denn die Auflösung von (14) ergibt, wenn K_r^i die Unterdeterminante von k_r^i in K ist,

$$v_1 = -(K_1^1 u_1 + \cdots + K_1^p u_p); \cdots; v_p = -(K_p^1 u_1 + \cdots + K_p^p u_p),$$

so dass den Werthen $(u_1, u_2, .., u_p) = (\pi i, 0, .., 0)$ die Werthe $v_1 = - K_1^1 \pi i, .., v_p = - K_p^1 \pi i$ entsprechen. Die Function $\Phi(v_1, .., v_p)$ aber bleibt bei Vermehrung der v_i um diese Grössen ungeändert. Die Gleichungen (11) gehen ferner mit Rücksicht auf (12) und (14) über in

$$\Theta(u_1 + a_{1i}, .., u_p + a_{pi}) = C_i e^{-2mu_i} \Theta(u_1, .., u_p).$$

Die ganze Zahl $m = K$ (13) ist beliebig; wir setzen sie positiv voraus, da einer Umkehrung des Zeichens von m nur eine Umkehrung der Vorzeichen der u_i und der a_{ik} entsprechen würde. Ferner sind die Constanten C_i beliebig, da eine Aenderung derselben mit einer Aenderung der u_i um gewisse additive Constanten gleichbedeutend ist; wir setzen unbeschadet der Allgemeinheit $C_i = e^{-m_i a_{ii}}$.

Hiermit ist eine Function $\Theta(u_1, .., u_p)$ gewonnen, die sich in der Form darstellt:

$$(15)\quad \begin{cases} \Theta(u_1, .., u_p) = \sum\limits_{\nu_1} \cdot\cdot \sum\limits_{\nu_p} A_{\nu_1 .. \nu_p} e^{2 \sum\limits_i \nu_i u_i} \\ (\nu_1, .., \nu_p = -\infty, .. + \infty), \end{cases}$$

und die den beiden Functionalgleichungen genügt $(i, k = 1, .., p)$:

$$(16)\quad \begin{cases} \Theta(u_1, .., u_k, .., u_p) = \Theta(u_1, .., u_k + \pi i, .., u_p), \\ \Theta(u_1, ..., u_p) = \Theta(u_1 + a_{1i}, .., u_p + a_{pi})\, e^{m(2u_i + a_{ii})}. \end{cases}$$

Ein solche Function heisst eine **Thetafunction** von der **Ordnung** m mit den **Variabeln** oder **Argumenten** u_i und dem **Perioden-** oder **Modul-System** πi und a_{ik}. Das Letztere ist enthalten in dem Schema:

$$(17)\quad \left\{\begin{array}{c|cccc|cccc} u_1 & \pi i & 0 & .. & 0 & a_{11} & a_{12} & .. & a_{1p} \\ u_2 & 0 & \pi i & .. & 0 & a_{21} & a_{22} & .. & a_{2p} \\ \vdots & . & . & . & . & . & . & . & . \\ u_p & 0 & 0 & .. & \pi i & a_{p1} & a_{p2} & .. & a_{pp} \end{array}\right| .$$

Es bleiben noch die Coefficienten A in (15) zu bestimmen, wozu die zweite der Gleichungen (16) dient. Aus ihr ergibt sich, wenn $n_1, .., n_p$ beliebige, ganze Zahlen sind, die allgemeinere Gleichung $(i, k = 1, .., p)$:

$$(18)\quad \Theta(u_1, .., u_p) = \Theta\left(u_1 + \sum_i n_i a_{1i}, .., u_p + \sum_i n_i a_{pi}\right) e^{m\left(\sum\limits_k n_k u_k + \sum\limits_{ik} a_{ik} n_i n_k\right)}.$$

Setzt man in dem Ausdruck der rechten Seite die Reihe (15) ein, so folgt:

$$\Theta(u_1, .., u_p) = \sum_{\nu_1} \cdot\cdot \sum_{\nu_p} A_{\nu_1 .. \nu_p} e^{2 \sum\limits_k u_k(\nu_k + m n_k) + \sum\limits_{ik} a_{ik} n_i (2\nu_k + m n_k)}.$$

Andrerseits kann man (15) schreiben:

$$\Theta(u_1, .., u_p) = \sum_{\nu_1 + m n_1} \cdot\cdot \sum_{\nu_p + m n_p} A_{\nu_1 + m n_1 .. \nu_p + m n_p} e^{2 \sum\limits_k u_k (\nu_k + m n_k)}.$$

Die Vergleichung beider Reihen gibt für die Coefficienten A die Relation:

$$(19)\quad A_{\nu_1 + m n_1 .. \nu_p + m n_p} = A_{\nu_1 .. \nu_p} e^{\sum\limits_{ik} a_{ik} n_i (2\nu_k + m n_k)}.$$

Es ergeben sich daher alle Coefficienten A in (15) aus denjenigen Coefficienten $A_{\nu_1 .. \nu_p}$, in welchen $\nu_1, .., \nu_p$ nur die Zahlen $0, 1, 2, .., m - 1$ durchlaufen. Hieraus folgt, dass alle Thetafunc-

tionen von der Ordnung m durch höchstens m^p linear unabhängige unter ihnen ausdrückbar sind oder dass die allgemeinste solche Thetafunction m^p willkürliche Constanten linear und homogen enthält. Die speciellen Thetafunctionen, auf welche die Untersuchung geführt hat, sind, wenn $(\nu_1, .., \nu_p = 0, 1, 2, ..., m-1)$:

$$\Theta\binom{u_1, .., u_p}{\nu_1, .., \nu_p} = \sum_{n_1} .. \sum_{n_p} e^{2\sum_i u_i(\nu_i + m n_i) + \sum_{ik} a_{ik} n_i (2\nu_k + m n_k)} \tag{20}$$

und, wenn $m = 1$, also $\nu_1, .., \nu_p = 0$ ist,

$$\vartheta(u_1, .., u_p) = \sum_{n_1} .. \sum_{n_p} e^{2\sum_i n_i u_i + \sum_{ik} a_{ik} n_i n_k}. \tag{21}$$

Aus der Gleichung (19) ergibt sich noch die wichtige Folgerung, dass:

$$a_{il} = a_{li} \quad (i, l = 1, .., p) \tag{22}$$

sein muss, oder dass das Modulsystem a_{il} der Thetafunction nicht beliebig ist, sondern eine symmetrische Determinante bildet.

Denn setzt man in (19) alle n gleich 0 ausser n_i und ein zweites mal ausser n_l, so ist:

$$A_{\nu_1 .. \nu_i + m .. \nu_p} = A_{\nu_1 .. \nu_i .. \nu_p}\, e^{2\sum_k a_{ik}\nu_k + a_{ii} m},$$

$$A_{\nu_1 .. \nu_l + m .. \nu_p} = A_{\nu_1 .. \nu_l .. \nu_p}\, e^{2\sum_k a_{lk}\nu_k + a_{ll} m}.$$

Setzt man in der ersten Gleichung $\nu_l + m$ für ν_l und in der zweiten Gleichung $\nu_i + m$ für ν_i und wendet jedesmal die andere Gleichung an, so erhält man zwei Gleichungen von der Form:

$$A_{\nu_1 .. \nu_i + m .. \nu_l + m .. \nu_p} = A_{\nu_1 .. \nu_p}\, e^M,$$

wo in der ersten Gleichung

$$M = 2\sum_k (a_{ik} + a_{lk})\,\nu_k + (a_{ii} + a_{ll})\, m + 2a_{li} m,$$

in der zweiten Gleichung

$$M = 2\sum_k (a_{ik} + a_{lk})\,\nu_k + (a_{ii} + a_{ll})\, m + 2a_{il} m,$$

woraus durch Vergleichung die Relation (22) folgt.

Indem wir noch die Convergenz der Thetafunction (s. § 26) voraussetzen, fassen wir das bisher Gewonnene in dem Satze zusammen:

(V) Es gibt Functionen der p Variabeln $u_1, .., u_p$, die charakterisirt sind durch folgende Eigenschaften:

1) sie sind eindeutig und für alle endlichen Werthsysteme der u_i stetig;

2) sie genügen den Functionalgleichungen (16) unter der Voraussetzung (22) für das Modulsystem a_{ik}.

Diese Functionen heissen Thetafunctionen von der Ordnung m und stellen sich analytisch dar durch die unendlichen Reihen (15). Die Coefficienten derselben genügen den Bedingungen (19). Die allgemeinste Thetafunction von der Ordnung m lässt sich linear durch höchstens m^p solcher Thetafunctionen ausdrücken. Die Quotienten zweier Thetafunctionen von derselben Ordnung sind nach (16) $2p$-fach periodische Functionen der p Variabeln u_i.

§ 26. Die Thetafunction erster Ordnung.

In § 25 wurde die allgemeine Thetafunction von der Ordnung m abgeleitet. Es soll nun die Thetafunction erster Ordnung ($m=1$) genauer untersucht werden, die für die Lösung des Umkehrproblems von besonderer Wichtigkeit ist. Es gibt nur eine solche Thetafunction; man erhält aber aus ihr durch geringe Veränderungen weitere Functionen von ähnlichem Charakter.

Die Thetafunction erster Ordnung von p Variabeln[1]) $u_1, \ldots, u_p$ ist definirt durch die p-fach unendliche Reihe (Gl. 21 § 25); wir führen eine abkürzende Schreibweise ein, nämlich:

$$(1)\quad \begin{cases} \vartheta((u)) = \vartheta(u_1, \ldots, u_p) = \sum\limits_{n_1 \cdots n_p} e^{2\sum\limits_i n_i u_i + \sum\limits_{ik} a_{ik} n_i n_k} \\ (i, k = 1, \ldots, p);\ (n_1, \ldots, n_p = -\infty \cdots +\infty), \end{cases}$$

wobei $a_{ik} = a_{ki}$ ist.

Zunächst ist die Convergenz der Reihe (1) zu untersuchen. Bezeichnet man den reellen Theil von a_{ik} mit a'_{ik}, so gilt der Satz[2]):

(I) Damit die Reihe (1) für ein endliches Werthsystem der Argumente $u_1, \ldots, u_p$ convergire, ist nothwendige und hinreichende Bedingung

1) dass die Determinante:

$$(2)\qquad \sum \pm\, a'_{11} a'_{22} \ldots a'_{pp} \gtrless 0 \quad \text{sei},$$

---

1) Für $p = 2$ zuerst aufgestellt von Rosenhain (1844), Journ. für Math. Bd. 40. S. 320.

2) Riemann, Ges. W. S. 121.

2) dass der Ausdruck:

$$\sum_i \sum_k a'_{ik} r_i r_k \tag{3}$$

negativ sei für jedes beliebige, reelle Zahlensystem $r_1, .., r_p$,

oder auch, dass sich dieser Ausdruck durch eine Summe von p negativen Quadraten darstellen lasse.

Beweis[1]). Bezeichnet man den reellen Theil von u_i mit u_i', so ist der Exponent in dem absoluten Betrag des allgemeinen Gliedes von (1):

$$\sum_i \sum_k a'_{ik} n_i n_k + 2 \sum_i n_i u_i'. \tag{4}$$

Dieser Ausdruck lässt sich als ganze Function zweiten Grades in $n_1, .., n_p$, wenn die Bedingung (2) erfüllt ist, bei passender Bestimmung von p reellen Grössen $\varrho_1, .., \varrho_p$ ersetzen durch:

$$\sum_{ik} a'_{ik} (n_i + \varrho_i)(n_k + \varrho_k). \tag{5}$$

Hierbei wird allerdings zu (4) noch das von den Zahlen n unabhängige Glied $\sum\limits_i \sum\limits_k a'_{ik} \varrho_i \varrho_k$ hinzugefügt, wodurch die Function (1) einen Factor erhält; dieser Factor ist aber von keinem Einfluss auf die Convergenz von (1). Der Ausdruck (5) lässt sich weiter, unter Voraussetzung von (2), durch eine lineare, orthogonale Substitution für die Grössen $n_i + \varrho_i$ überführen in:

$$\sum_i \sum_k a'_{ik} (n_i + \varrho_i)(n_k + \varrho_k) = \sum_i \lambda_i \xi_i^2, \tag{6}$$

mit dem Zusatze, dass gleichzeitig

$$\sum_i (n_i + \varrho_i)^2 = \sum_i \xi_i^2 \tag{7}$$

wird. Die von den a'_{ik} abhängigen p Coefficienten λ_i sind bekanntlich alle reell und wegen (2) von 0 verschieden (s. Gl. 8a).

Aus dieser Umformung ergibt sich, dass (I. 1. und 2.) nothwendige Bedingungen für die Convergenz von (1) sind. Denn soll (1) convergent sein, so darf keiner der Ausdrücke (4) oder (5) für reelle Werthe von n_i oder $n_i + \varrho_i$ zwischen $-\infty$ und $+\infty$ positiv unendlich werden; es müssen also in (6) die λ_i sämmtlich negativ sein. Die Bedingungen (I. 1. und 2.) sind aber auch hinreichend für die Convergenz

1) Nach Vorlesungen von Herrn Weierstrass. Einen anderen Beweis gibt Riemann, Ges. W. S. 452.

von (1). Ist nämlich von den p negativen λ_i der absolut kleinste Werth $= \lambda_0$, so ist nach (6) und (7):

$$\sum_{ik} a'_{ik}(n_i + \varrho_i)(n_k + \varrho_k) < \lambda_0 \sum_i \xi_i^2 \text{ oder } < \lambda_0 \sum_i (n_i + \varrho_i)^2$$

und folglich ist der absolute Werth der Reihe (1), wenn man den oben erwähnten Factor hinzufügt, kleiner als:

$$(8) \quad \begin{cases} \sum_{n_1} e^{\lambda_0(n_1+\varrho_1)^2} \sum_{n_2} e^{\lambda_0(n_2+\varrho_2)^2} \cdot\cdot \sum_{n_p} e^{\lambda_0(n_p+\varrho_p)^2} \\ (n_1, \cdot\cdot, n_p = -\infty \cdot\cdot + \infty). \end{cases}$$

Hieraus aber folgt, dass die Function (1) absolut convergent ist, da in (8) bei negativem Werth von λ_0 jeder der p Factoren einzeln convergirt. Denn in dem i^{ten} Factor in (8) ist, wenn man den von n_i unabhängigen Factor $e^{\lambda_0 \varrho_i^2}$ bei Seite lässt, die n_i^{te} Wurzel des n_i^{ten} Gliedes

$$= e^{2\lambda_0 \varrho_i} (e^{\lambda_0})^{n_i},$$

ein Werth, der sich bei negativem λ_0 mit unbegrenzt wachsendem n_i der Grenze 0 nähert. (q. e. d.)

Die Bedingung, dass die p Grössen λ_i sämmtlich negativ seien, lässt sich leicht auf die reellen Theile a'_{ik} der Thetamoduln a_{ik} übertragen. Die λ_i sind bekanntlich die Wurzeln der Gleichung in λ:

$$(8a) \quad \begin{vmatrix} a'_{11} - \lambda & a'_{21} & \cdot\cdot & a'_{p1} \\ a'_{12} & a'_{22} - \lambda & \cdot\cdot & a'_{p2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a'_{1p} & a'_{2p} & \cdot\cdot & a'_{pp} - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Setzt man diese Gleichung in die Form:

$$(8b) \quad \lambda^p + A_1 \lambda^{p-1} + \cdot\cdot + A_{p-1}\lambda + A_p = 0$$

und wendet den Satz an, dass eine Gleichung mit reellen Wurzeln soviel negative Wurzeln besitzt, als ihre Coefficienten Zeichenfolgen haben, so geht die Bedingung, dass die p Wurzeln λ_i negativ seien, über in die Bedingung, dass die p Coefficienten $A_1, \cdot\cdot, A_p$ in (8b) sämmtlich positiv sind, da der Coefficient von λ^p positiv ($= 1$) ist.

Wir stellen die Eigenschaften der Thetafunction 1. Ordnung $\vartheta(u_1, \cdot\cdot, u_p) = \vartheta((u))$ (1) nochmals kurz zusammen[1]).

---

1) Riemann, Ges. W. S. 121.

1) Die Function $\vartheta(u_1, .., u_p)$ ist eindeutig und für alle endlichen Werthsysteme $u_1, .., u_p$ stetig; sie lässt sich daher in eine absolut convergente, nach ganzen, positiven Potenzen von $u_1, .., u_p$ fortschreitende Reihe entwickeln von der Form:

$$\left.\begin{aligned}\vartheta(u_1, .., u_p) = \sum_{m_1} .. \sum_{m_p} C_{m_1 .. m_p} u_1^{m_1} .. u_p^{m_p} \\ (m_1, \cdot\cdot, m_p = 0, 1, \cdot\cdot, +\infty),\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

wobei die Coefficienten $C_{m_1 .. m_p}$ selber p-fach unendliche Summen sind, die man aus (1) durch Entwicklung der Exponentialfunctionen in Potenzreihen nach den $u_1, .., u_p$ gewinnt.

2) Die Function $\vartheta(u_1, .., u_p)$ hat gewisse periodische Eigenschaften, die ausgedrückt sind durch die beiden Functionalgleichungen (16) § 25, nämlich:

$$\left.\begin{aligned}\vartheta(u_1, .., u_k, .., u_p) &= \vartheta(u_1, .., u_k + \pi i, .., u_p) \\ \vartheta(u_1, \ldots\ldots, u_p) &= \vartheta(u_1 + a_{1i}, .., u_p + a_{pi})\, e^{2u_i + a_{ii}}.\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Die Gleichungen (10) kann man verallgemeinern. Man bilde aus dem Schema der Perioden (17) § 25 mit Hülfe von ganzzahligen Factoren g_i' und g_i $(i = 1, .., p)$ die allgemeinen Periodensysteme der Function ϑ, nämlich:

$$G_1 = g_1'\pi i + \sum_i g_i a_{1i}, \ldots, G_p = g_p'\pi i + \sum_i g_i a_{pi}. \tag{11}$$

Dann folgt aus den Gleichungen (10):

$$\vartheta(u_1, .., u_p) = \vartheta(u_1 + G_1, .., u_p + G_p)\, e^G, \tag{12}$$

wo

$$G = 2\sum_i g_i u_i + \sum_{ik} a_{ik} g_i g_k + 2i\pi \sum_i g_i g_i', \tag{12a}$$

wie man leicht aus der Gestalt des Exponenten des allgemeinen Gliedes der rechten Seite in (12) ersieht, wenn man $\vartheta(u_1 + G_1, .., u_p + G_p)$ nach (1) durch eine unendliche Reihe ersetzt.

3) Die Function $\vartheta(u_1, .., u_p)$ ist eine gerade Function oder es ist

$$\vartheta(-u_1, \cdot\cdot, -u_p) = \vartheta(u_1, \cdot\cdot, u_p). \tag{13}$$

Denn die Reihe (1) bleibt ungeändert, wenn man sämmtliche n_i durch $-n_i$ ersetzt. Dies ist aber gleichbedeutend mit der Vertauschung eines jeden u_i mit $-u_i$. Aus (13) folgt:

$$\frac{\partial\vartheta(-u_1, .., -u_p)}{\partial u_i} = -\frac{\partial\vartheta(u_1, .., u_p)}{\partial u_i}. \tag{14}$$

Die ersten partiellen Ableitungen der Function $\vartheta(u_1, .., u_p)$ nach den u_i sind also ungrade Functionen. Dieselben müssen für die Nullwerthe der Argumente, d. h. für das Werthsystem $(u_1, .., u_p = 0, .., 0)$, da sie nicht ∞ werden, verschwinden.

4) Die Function $\vartheta(u_1, .., u_p) = \vartheta((u))$ genügt, wie sich unmittelbar durch Differentiation ergibt, dem System von partiellen Differentialgleichungen:

$$(15)\qquad 4\frac{\partial \vartheta((u))}{\partial a_{ii}} = \frac{\partial^2 \vartheta((u))}{\partial u_i^2}, \quad 2\frac{\partial \vartheta((u))}{\partial a_{ik}} = \frac{\partial^2 \vartheta((u))}{\partial u_i \partial u_k}.$$

Schreibt man diese Gleichungen:

$$4\frac{\partial \log \vartheta((u))}{\partial a_{ii}} = \frac{\partial^2 \log \vartheta((u))}{\partial u_i^2} + \left[\frac{\partial \log \vartheta((u))}{\partial u_i}\right]^2,$$

$$2\frac{\partial \log \vartheta((u))}{\partial a_{ik}} = \frac{\partial^2 \log \vartheta((u))}{\partial u_i \partial u_k} + \frac{\partial \log \vartheta((u))}{\partial u_i}\frac{\partial \log \vartheta((u))}{\partial u_k},$$

so erhält man, wenn die Argumente u_i sämmtlich verschwinden und $\vartheta(0, .., 0) = \vartheta$ gesetzt wird, mit Rücksicht auf die obige Bemerkung zu Gl. (14):

$$(16)\qquad 4\frac{\partial \log \vartheta}{\partial a_{ii}} = \left[\frac{\partial^2 \log \vartheta((u))}{\partial u_i^2}\right]_{u=0}, \quad 2\frac{\partial \log \vartheta}{\partial a_{ik}} = \left[\frac{\partial^2 \log \vartheta((u))}{\partial u_i \partial u_k}\right]_{u=0}.$$

5) Eine Function $f(u_1, .., u_p)$, die eindeutig und für alle endlichen Werthsysteme $u_1, .., u_p$ stetig ist und den Functionalgleichungen (10) genügt, ist mit der Function $\vartheta(u_1, .., u_p)$ bis auf einen von den u_i unabhängigen Factor A identisch, wie in § 25 gezeigt wurde. Soll die Function $f(u_1, .., u_p)$ auch noch den Differentialgleichungen (15) genügen, so ist der Factor A auch noch von den Grössen a_{ik} unabhängig, wie leicht zu sehen.

Umgekehrt lassen sich die Gleichungen (10), wenn die Function $\vartheta(u_1, .., u_p)$ auf anderem Wege gewonnen ist, leicht verificiren, indem man den Exponenten des allgemeinen Gliedes auf den beiden Seiten dieser Gleichungen vergleicht.

Wir verallgemeinern nun die Thetafunction erster Ordnung in folgender Weise. Der Ausdruck (12) stellt, so lange man unter g_i und g_i' ganze Zahlen versteht, nichts anderes dar, als die Function $\vartheta(u_1, .., u_p)$; unter dieser Voraussetzung kann man auch die Grössen g_i, g_i' ersetzen durch $-g_i, -g_i'$.

Wir nehmen nun für g_i, g_i' beliebige Zahlen, nennen den Grössencomplex:

$$\begin{bmatrix} g_1 \cdot \cdot g_p \\ g_1' \cdot \cdot g_p' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g \\ g' \end{bmatrix} \tag{17}$$

eine Charakteristik[1]), bilden ein zugehöriges Grössensystem von derselben Form wie (11) ($i = 1, .., p$):

$$G_1 = g_1' \pi i + \sum_i g_i a_{1i}, \ldots, G_p = g_p' \pi i + \sum_i g_i a_{pi}, \tag{18}$$

und definiren als Thetafunction mit der Charakteristik (17) den Ausdruck

$$\vartheta \begin{bmatrix} g \\ g' \end{bmatrix} ((u)) = \vartheta \begin{bmatrix} g_1 \cdot \cdot g_p \\ g_1' \cdot \cdot g_p' \end{bmatrix} (u_1, .., u_p) \tag{19}$$

$$= \vartheta ((u - G)) e^{-2 \sum_i g_i u_i + \sum_{ik} a_{ik} g_i g_k + 2 i \pi \sum_i g_i g_i'} \tag{20}$$

$$= \sum_{n_1 \cdot \cdot n_p} e^{\sum_{ik} a_{ik} (n_i - g_i)(n_k - g_k) + 2 \sum_i (n_i - g_i)(u_i - g_i' \pi i)}. \tag{21}$$

In dieser Form ist auch die Function $\vartheta(u_1, .., u_p)$ enthalten; sie hat die Charakteristik 0, d. h. eine Charakteristik, deren Elemente g_i, g_i' sämmtlich $= 0$ sind.

Für die Thetafunction mit Charakteristik (19) gelten nun ähnliche Sätze, wie für die ursprüngliche Function $\vartheta(u_1, .., u_p)$; sie ist ebenfalls für alle endlichen Werthe der Variabeln $u_1, .., u_p$ endlich und stetig und genügt ebenfalls den Differentialgleichungen (15). Die Function (19) ändert sich nach (20) nicht, wenn man gleichzeitig u_i, g_i, g_i' durch $-u_i$, $-g_i$, $-g_i'$ ersetzt. Ferner gilt Folgendes:

1) Es ist

$$\left. \begin{aligned} \vartheta \begin{bmatrix} g_1 \cdot \cdot g_i \pm 1 \cdot \cdot g_p \\ g_1' \cdot \cdot g_i' \quad \cdot \cdot g_p' \end{bmatrix} ((u)) &= \vartheta \begin{bmatrix} g_1 \cdot \cdot g_p \\ g_1' \cdot \cdot g_p' \end{bmatrix} ((u)) \\ \vartheta \begin{bmatrix} g_1 \cdot \cdot g_i \quad \cdot \cdot g_p \\ g_1' \cdot \cdot g_i' \pm 1 \cdot \cdot g_p' \end{bmatrix} ((u)) &= \vartheta \begin{bmatrix} g_1 \cdot \cdot g_p \\ g_1' \cdot \cdot g_p' \end{bmatrix} ((u)) e^{\mp 2 i \pi g_i} \end{aligned} \right\} \tag{22}$$

und folglich allgemein, wenn q_i, q_i' ($i = 1, .., p$) ganze Zahlen sind und wenn die abkürzende Schreibweise (19) benutzt wird:

$$\vartheta \begin{bmatrix} g \pm q \\ g' \pm q' \end{bmatrix} ((u)) = \vartheta \begin{bmatrix} g \\ g' \end{bmatrix} ((u)) e^{\pm 2 i \pi \sum_i g_i q_i'}. \tag{23}$$

Die erste Gleichung (22) folgt daraus, dass die Substitution $g_i \pm 1$ für g_i gleichbedeutend ist mit der Substitution $n_i \mp 1$ für n_i, wodurch (21) nicht geändert wird. Die zweite Gleichung (22) folgt aus (21), indem man $g_i' \pm 1$ für g_i' setzt.

---

1) Die Thetacharakteristiken für $p = 2$ sind eingeführt von Hermite, Comptes rendus. T. 40. S. 308 (1855).

2) Sind h_i, h_i' $(i = 1, .., p)$ beliebige Zahlen und $H_1, .., H_p$ das zugehörige, den Ausdrücken (18) analog gebildete Grössensystem, so gilt die Gleichung:

$$\vartheta\begin{bmatrix} g \\ g' \end{bmatrix}((u \pm H)) = \vartheta\begin{bmatrix} g \mp h \\ g' \mp h' \end{bmatrix}((u))\, e^{(H,G)}, \tag{24}$$

wo

$$(H, G) = \mp 2\sum_i h_i u_i - \sum_{ik} a_{ik} h_i h_k - 2i\pi \sum_i h_i (h_i' \mp g_i'), \tag{24a}$$

die eine Verallgemeinerung von (20) darstellt und in diesen Ausdruck übergeht, wenn man alle g_i, g_i' gleich 0 setzt.

In der That, der Exponent des allgemeinen Gliedes der Thetafunction auf der linken Seite in (24) ist nach (21):

$$\begin{cases} \sum_{ik} a_{ik}(n_i - g_i)(n_k - g_k) \pm 2\sum_{ik} a_{ik}(n_i - g_i) h_k \\ + 2\sum_i (n_i - g_i)(u_i \pm h_i' \pi i) - 2i\pi \sum_i (n_i - g_i) g_i'; \end{cases} \tag{25}$$

dagegen ist der Exponent des allgemeinen Gliedes von $\vartheta\begin{bmatrix} g \mp h \\ g' \mp h' \end{bmatrix}((u))$ nach (21) gleich demselben Ausdruck (25), vermehrt um:

$$\pm 2\sum_i h_i u_i + \sum_{ik} a_{ik} h_i h_k + 2i\pi \sum_i h_i (h_i' \mp g_i'),$$

womit (24) bewiesen ist.

Setzt man in (24) alle Zahlen h, h' gleich 0, einmal mit der Ausnahme, dass $h_k' = 1$, das andere mal mit der Ausnahme, dass $h_k = 1$, und berücksichtigt die Gleichungen (22), so folgt:

$$\begin{cases} \vartheta\begin{bmatrix} g \\ g' \end{bmatrix}(u_1, .., u_k \pm \pi i, .., u_p) = \vartheta\begin{bmatrix} g \\ g' \end{bmatrix}((u))\, e^{\mp 2i\pi g_k} \\ \vartheta\begin{bmatrix} g \\ g' \end{bmatrix}(u_1 \pm a_{1k}, .., u_p \pm a_{pk}) = \vartheta\begin{bmatrix} g \\ g' \end{bmatrix}((u))\, e^{\pm 2i\pi g_k'}\, e^{\mp 2u_k - a_{kk}}, \end{cases} \tag{26}$$

Gleichungen, die eine Verallgemeinerung von (10) bilden.

Dies sind die wichtigsten Eigenschaften der Function (19). Umgekehrt beweist man ebenso wie in § 25 den Satz:

(II) Genügt eine für alle endlichen Werthsysteme der Variabeln $u_1, .., u_p$ eindeutige und stetige Function den Gleichungen (26), so kann sich diese Function von (19) nur um einen von den u_i unabhängigen Factor unterscheiden. Genügt die Function auch noch den Differentialgleichungen (15), so ist dieser Factor auch unabhängig von den Moduln a_{ik}.

Die auf der rechten Seite in (24) auftretende Charakteristik $\begin{bmatrix} g+h \\ g'+h' \end{bmatrix}$ heisst die Summe der Charakteristiken $\begin{bmatrix} g \\ g' \end{bmatrix}$ und $\begin{bmatrix} h \\ h' \end{bmatrix}$; es ist also

$$\begin{bmatrix} g_1 \,.\,.\, g_p \\ g_1' \,.\,.\, g_p' \end{bmatrix} \pm \begin{bmatrix} h_1 \,.\,.\, h_p \\ h_1' \,.\,.\, h_p' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 \pm h_1 \,.\,.\, g_p \pm h_p \\ g_1' \pm h_1' \,.\,.\, g_p' \pm h_p' \end{bmatrix}. \tag{27}$$

Wir specialisiren jetzt die Charakteristik (17), indem wir an Stelle der beliebigen Grössen g_i, g_i' rationale Zahlen mit dem gemeinsamen Nenner m setzen. Solche Charakteristiken heissen m-theilige Charakteristiken. Wir setzen also $g_i = \frac{\mu_i}{m}$, $g_i' = \frac{\mu_i'}{m}$, wo μ_i und μ_i' ganze Zahlen sind, und bezeichnen die zugehörige, m-theilige Charakteristik, indem wir den Nenner unterdrücken, abgekürzt durch:

$$\begin{bmatrix} \mu_1 \,.\,.\, \mu_p \\ \mu_1' \,.\,.\, \mu_p' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu \\ \mu' \end{bmatrix} = \mu \tag{28}$$

und das zugehörige, m-theilige Periodensystem durch:

$$\frac{\mathsf{M}_i}{m} = \frac{\mu_i'}{m} \pi i + \frac{1}{m} \sum_k a_{ik} \mu_k. \tag{29}$$

Dann ist die Thetafunction mit der m-theiligen Charakteristik μ definirt durch:

$$\vartheta_\mu((u)) = C \cdot \vartheta\left(\left(u - \frac{\mathsf{M}}{\mu}\right)\right) e^{-\frac{2}{m}\sum_i \mu_i u_i}, \tag{30}$$

wo C eine aus (20) sich ergebende, von den u_i unabhängige Constante ist. Da sich diese Function (30) nach (26) oder (24) in ganz bestimmter Weise ändert, wenn die Variabeln u_i um ganzzahlige Periodensysteme wachsen, so erhält man alle wesentlich verschiedenen Thetafunctionen mit m-theiliger Charakteristik, wenn man den Elementen μ_i, μ_i' der Charakteristik μ in (30) auf alle möglichen Arten die ganzen Zahlenwerthe 0, 1, .., $m-1$ beilegt.

Von besonderem Interesse und besonderen Eigenschaften sind die Thetafunctionen mit zweitheiliger Charakteristik. Wir entwickeln die Formeln für diese etwas ausführlicher. Für $m = 2$ genügt es, den Elementen μ_i, μ_i' der Charakteristik μ die Werthe 0 und 1 zu geben. Alle anderen Fälle, wo μ_i, μ_i' beliebige ganze Zahlen sind, werden auf diese Fälle zurückgeführt durch die aus (22) und (23) folgenden Formeln:

$$(31)\quad\begin{cases}\vartheta\begin{bmatrix}\mu_1 & .. & \mu_i \pm 2 & .. & \mu_p\\ \mu_1' & .. & \mu_i' & .. & \mu_p'\end{bmatrix}(\!(u)\!) = \vartheta\begin{bmatrix}\mu_1 & .. & \mu_p\\ \mu_1' & .. & \mu_p'\end{bmatrix}(\!(u)\!),\\ \vartheta\begin{bmatrix}\mu_1 & .. & \mu_i & .. & \mu_p\\ \mu_1' & .. & \mu_i' \pm 2 & .. & \mu_p'\end{bmatrix}(\!(u)\!) = (-1)^{\mu_i}\vartheta\begin{bmatrix}\mu_1 & .. & \mu_p\\ \mu_1' & .. & \mu_p'\end{bmatrix}(\!(u)\!),\end{cases}$$

$$(32)\quad \vartheta\begin{bmatrix}\mu_1 + 2\nu_1 & .. & \mu_p + 2\nu_p\\ \mu_1' + 2\nu_1' & .. & \mu_p' + 2\nu_p'\end{bmatrix}(\!(u)\!) = (-1)^{\sum\limits_i \mu_i\nu_i'}\vartheta\begin{bmatrix}\mu_1 & .. & \mu_p\\ \mu_1' & .. & \mu_p'\end{bmatrix}(\!(u)\!),$$

wo ν_i, ν_i' ebenfalls ganze Zahlen sind. Die auf der linken Seite in (32) auftretende Charakteristik ist die Summe der zwei Charakteristiken μ und 2ν, die wir auch bezeichnen durch $\mu\nu\nu$. Dann lautet die Gleichung (32) in abgekürzter Schreibweise:

$$(33)\qquad \vartheta_{\mu\nu\nu}(\!(u)\!) = (-1)^{\Sigma\mu\nu'}\vartheta_\mu(\!(u)\!).$$

Hieraus folgt, wenn man statt μ und ν bez. $\mu - \lambda$ und λ setzt,

$$(34)\qquad \vartheta_{\mu+\lambda}(\!(u)\!) = (-1)^{\Sigma\lambda'(\mu-\lambda)}\vartheta_{\mu-\lambda}(\!(u)\!),$$

und für $\mu = 0$:

$$(35)\qquad \vartheta_{-\lambda}(\!(u)\!) = (-1)^{\Sigma\lambda\lambda'}\vartheta_\lambda(\!(u)\!).$$

Die Thetafunction mit der zweitheiligen Charakteristik μ ist nach (20), (21) und (35), wenn $g_i = \frac{\mu_i}{2}$, $g_i' = \frac{\mu_i'}{2}$ und

$$(36)\qquad \mathsf{A}_i^\mu = \mu_i'\pi i + \sum_k a_{ik}\mu_k \quad (i = 1, .., p)$$

gesetzt wird, definirt durch:

$$(37)\quad\begin{cases}\vartheta_\mu(\!(u)\!) = \vartheta\left(\!\!\left(u - \frac{\mathsf{A}^\mu}{2}\right)\!\!\right) e^{-\sum\limits_i \mu_i u_i + \frac{1}{4}\sum\limits_{ik} a_{ik}\mu_i\mu_k + \frac{1}{2}\pi i\sum\limits_i \mu_i\mu_i'}\\ \qquad = (-1)^{\Sigma\mu\mu'}\vartheta\left(\!\!\left(u + \frac{\mathsf{A}^\mu}{2}\right)\!\!\right) e^{+\sum\limits_i \mu_i u_i + \frac{1}{4}\sum\limits_{ik} a_{ik}\mu_i\mu_k + \frac{1}{2}\pi i\sum\limits_i \mu_i\mu_i'}\\ \qquad = (-1)^{\Sigma\mu\mu'}\sum\limits_{n_1 \cdots n_p} e^{\sum\limits_{ik} a_{ik}\left(n_i + \frac{1}{2}\mu_i\right)\left(n_k + \frac{1}{2}\mu_k\right) + 2\sum\limits_i \left(n_i + \frac{1}{2}\mu_i\right)\left(u_i + \frac{1}{2}\mu_i'\pi i\right)}.\end{cases}$$

Ferner folgt aus (26):

$$(38)\quad\begin{cases}\vartheta_\mu(u_1, .., u_k + \pi i, .., u_p) = (-1)^{\mu_k}\vartheta_\mu(u_1, .., u_p)\\ \vartheta_\mu(u_1 + a_{1k}, .., u_p + a_{pk}) = (-1)^{\mu_k'}\vartheta_\mu(u_1, .., u_p)\, e^{-2u_k - a_{kk}}\end{cases}$$

und allgemein aus (24), bei Vermehrung der Argumente u_i um ein ganzes Periodensystem (in (39) und (40) sind λ_i, λ_i' ganze Zahlen):

$$(39)\qquad \vartheta_\mu(\!(u + \mathsf{A}^\lambda)\!) = \vartheta_\mu(\!(u)\!)\, e^{-2\sum\limits_i \lambda_i u_i - \sum\limits_{ik} a_{ik}\lambda_i\lambda_k - i\pi\sum\limits_i(\mu_i\lambda_i' + \lambda_i\mu_i')}$$

und bei Vermehrung der Argumente um ein halbes Periodensystem:

$$\vartheta_\mu\left(\!\left(u+\tfrac{1}{2}A^\lambda\right)\!\right)=\vartheta_{\mu+\lambda}((u))\,e^{-\sum\limits_i\lambda_i u_i-\frac{1}{4}\sum\limits_{ik}a_{ik}\lambda_i\lambda_k-\frac{1}{2}\pi i\sum\limits_i\lambda_i(\lambda_i'+\mu_i')}. \quad (40)$$

Endlich erhält man aus (35), da man gleichzeitig die Vorzeichen der u_i und der λ_i, λ_i' umkehren kann,

$$\vartheta_\lambda((-u))=(-1)^{\Sigma\lambda\lambda'}\vartheta_\lambda((u)). \quad (41)$$

Dies gibt den Satz:

(III) Die Function $\vartheta_\lambda((u))$ mit der zweitheiligen Charakteristik λ ist eine gerade oder ungrade Function der Argumente u_i, je nachdem:

$$\sum_i\lambda_i\lambda_i'\equiv 0 \quad \text{oder} \quad \equiv 1 \pmod 2. \quad (42)$$

Man nennt hiernach die Charakteristik λ selber im ersten Fall gerade, im zweiten ungrade.

Umgekehrt gilt der Satz[1]):

(IV) Die Thetafunctionen mit zweitheiligen Charakteristiken sind die einzigen Thetafunctionen, die entweder gerade oder ungrade sind.

Zum Beweise sei Voraussetzung, dass die Function (19) den Bedingungen genüge

$$\vartheta\begin{bmatrix}g\\g'\end{bmatrix}((-u))=k\,\vartheta\begin{bmatrix}g\\g'\end{bmatrix}((u)), \quad \text{wo } k=\pm 1. \quad (43)$$

Nimmt man nun in (24) für h, h' ganze Zahlen, wählt das untere Zeichen und vertauscht u mit $-u$, so folgt wegen (23) und (43), indem sich k weghebt,

$$\vartheta\begin{bmatrix}g\\g'\end{bmatrix}((u+H))=\vartheta\begin{bmatrix}g\\g'\end{bmatrix}((u))\,e^M, \quad (44)$$

wo

$$M=-2\sum_i h_i u_i-2\sum_{ik}a_{ik}h_i h_k-2i\pi\sum_i(h_i g_i'-g_i h_i').$$

Andrerseits folgt aus (24), wenn man das obere Zeichen wählt und (23) berücksichtigt, eine Gleichung von derselben Form (44) mit dem Unterschiede, dass

$$M=-2\sum_i h_i u_i-2\sum_{ik}a_{ik}h_i h_k+2i\pi\sum_i(h_i g_i'-g_i h_i').$$

---

1) Weierstrass, s. Schottky, Abriss einer Theorie der Abel'schen Functionen von drei Variabeln. Leipzig 1880. S. 9.

Die Vergleichung zeigt, dass für alle ganzzahligen Werthe h, h' der Ausdruck $2\sum_i (h_i g_i' - g_i h_i')$ gleich einer ganzen Zahl sein muss, oder dass die Grössen $g_1, \ldots, g_p; g_1', \ldots, g_p'$ die Hälften ganzer Zahlen sein müssen. (q. e. d.)

Aus (42) ergeben sich zugleich die Werthe der Variabeln $u_1, \ldots, u_p$, für welche die Function $\vartheta_\lambda((u))$ mit der zweitheiligen Charakteristik λ verschwindet. Zunächst muss jede ungrade Function $\vartheta_\lambda((u))$ für die Nullwerthe der Argumente, d. h. für $(u_1, \ldots, u_p) = (0, \ldots, 0)$, da sie für dieselben nicht unendlich wird, verschwinden. Es ist also nach (42) $\vartheta_\lambda(0, \ldots, 0) = 0$, sobald $\sum \lambda \lambda' \equiv 1 \pmod 2$. Daher folgt aus (37), indem man die $u_i = 0$ setzt, dass $\vartheta((u)) = \vartheta_0((u)) = 0$ ist für alle Werthsysteme der Form:

$$u_i = \frac{1}{2}\lambda_i' \pi i + \frac{1}{2}\sum_k a_{ik}\lambda_k, \quad \text{wenn} \sum_i \lambda_i \lambda_i' \equiv 1 \pmod 2,$$

und hiernach aus (40), wenn man darin λ mit μ vertauscht und die $u_i = 0$ setzt, dass $\vartheta_\lambda((u)) = 0$ ist für alle Werthsysteme der Form:

$$u_i = \frac{1}{2}\mu_i' \pi i + \frac{1}{2}\sum_k a_{ik}\mu_k, \quad \text{wenn} \sum_i (\lambda_i + \mu_i)(\lambda_i' + \mu_i') \equiv 1 \pmod 2.$$

Daher der Satz:

(V) Die Function $\vartheta_0(u_1, \ldots, u_p)$ verschwindet für jedes halbe Periodensystem, welchem eine ungrade Charakteristik entspricht, und allgemein: die Function $\vartheta_\lambda(u_1, \ldots, u_p)$ verschwindet für diejenigen halben Periodensysteme, deren Charakteristiken μ mit der Charakteristik λ eine ungrade Charakteristik zur Summe haben.

Nach den Gleichungen (31) oder (32) erhält man alle wesentlich verschiedenen, zweitheiligen Charakteristiken μ, indem man den Zahlen μ_i, μ_i' auf alle Arten die Werthe 0 und 1 gibt. Die Gesammtzahl dieser Charakteristiken, sowie die der geraden und ungraden unter ihnen wird angegeben durch den Satz[1]):

(VI) Die Anzahl der sämmtlichen, zur Zahl p gehörigen, zweitheiligen Charakteristiken ist $= 2^{2p}$; die Zahl der geraden ist $g_p = 2^{p-1}(2^p + 1)$, die Zahl der ungraden ist $u_p = 2^{p-1}(2^p - 1)$.

---

1) Riemann, s. Roch, Journ. für Math. Bd. 66, S. 103 und Riemann, Ges. W. S. 458.

Beweis. Die Anzahl aller zweitheiligen Charakteristiken ist die Zahl der Variationen der zwei Elemente 0 und 1 zur $2p^{\text{ten}}$ Klasse mit Wiederholung, also $= 2^{2p}$. Um die Zahl g_p der geraden und u_p der ungraden Charakteristiken zu bestimmen, denke man sich die zur Zahl p gehörigen Charakteristiken gebildet aus den zur Zahl $p-1$ gehörigen Charakteristiken:

$$\begin{bmatrix}\lambda_1 \cdot\cdot \lambda_{p-1} \\ \lambda_1' \cdot\cdot \lambda_{p-1}'\end{bmatrix} \text{ durch Zusatz von } \begin{matrix}0\\0\end{matrix}, \begin{matrix}0\\1\end{matrix}, \begin{matrix}1\\0\end{matrix}, \begin{matrix}1\\1\end{matrix}.$$

Man erhält so vier Typen von Charakteristiken, die zur Zahl p gehören, nämlich:

$$\begin{bmatrix}\lambda & 0 \\ \lambda' & 0\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}\lambda & 0 \\ \lambda' & 1\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}\lambda & 1 \\ \lambda' & 0\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}\lambda & 1 \\ \lambda' & 1\end{bmatrix}.$$

Nun ist jede Charakteristik der drei ersten Typen gerade oder ungrade, je nachdem die Charakteristik λ, aus der sie hervorging, gerade oder ungrade war. Dagegen ist jede Charakteristik vom vierten Typus gerade oder ungrade, je nachdem λ ungrade oder gerade war. Daher enthalten von den vier zu den obigen Typen gehörigen Gruppen die drei ersten je g_{p-1} gerade und u_{p-1} ungrade Charakteristiken, die vierte Gruppe aber u_{p-1} gerade und g_{p-1} ungrade Charakteristiken. Dies gibt die Gleichungen:

$$g_p = 3g_{p-1} + u_{p-1}, \quad u_p = 3u_{p-1} + g_{p-1},$$

woraus

$$g_p + u_p = 4(g_{p-1} + u_{p-1}), \quad g_p - u_p = 2(g_{p-1} - u_{p-1})$$

und durch Wiederholung des Processes

$$g_p + u_p = 4^{p-1}(g_1 + u_1) = 4^p, \quad g_p - u_p = 2^{p-1}(g_1 - u_1) = 2^p,$$

also

$$g_p = 2^{p-1}(2^p + 1), \quad u_p = 2^{p-1}(2^p - 1). \text{ (q. e. d.)}$$

Wir kehren nochmals zurück zu den Thetafunctionen der Ordnung m, die durch die Functionalgleichungen (16) § 25 definirt waren und führen historisch noch Folgendes an[1]. Man kann auch diese Functionen durch Zufügung von Charakteristiken, gebildet aus $2p$ beliebigen Zahlen g_i und g_i', verallgemeinern und sagen:

Eine Thetafunction von der Ordnung m und der Charakteristik g

$$\Theta\begin{bmatrix}g_1 \cdot\cdot g_p \\ g_1' \cdot\cdot g_p'\end{bmatrix}(u_1, \cdot\cdot, u_p) = \Theta\begin{bmatrix}g \\ g'\end{bmatrix}((u)) = \Theta_g((u))$$

1) Thomae, Diss. Göttingen. 1864. S. 10.

ist definirt durch die Bedingungen:

1) dass sie für alle endlichen Werthsysteme von $u_1, .., u_p$ eindeutig und stetig sei,

2) dass sie den Gleichungen genüge:

$$F(u_1, .., u_k + \pi i, .., u_p) \quad = F(u_1, .., u_p)\, e^{-2\pi i g_k},$$
$$F(u_1 + a_{1k}, ..., u_p + a_{pk}) = F(u_1, .., u_p)\, e^{+2i\pi g_k'}\, e^{-m(2u_k + a_{kk})}.$$

Für Thetafunctionen von derselben Ordnung m und derselben Charakteristik g gilt ebenfalls der Satz (V) § 25, dass sie sich durch höchstens m^p linear unabhängige unter ihnen ausdrücken lassen. Ferner der Satz, dass man stets Thetafunctionen der Ordnung m mit beliebiger Charakteristik aus solchen der ersten Ordnung bilden kann. So ist z. B. das Product von m Thetafunctionen erster Ordnung

$$\vartheta\begin{bmatrix} a \\ a' \end{bmatrix}((u))\, \vartheta\begin{bmatrix} b \\ b' \end{bmatrix}((u)) \dots \vartheta\begin{bmatrix} h \\ h' \end{bmatrix}((u))$$

eine Thetafunction von der Ordnung m und der Charakteristik g, wenn $(i = 1, .., p)$:

$$a_i + b_i + \cdot\cdot + h_i = g_i\,, \quad a_i' + b_i' + \cdot\cdot + h_i' = g_i'$$

gesetzt wird. Die allgemeine Thetafunction der Ordnung m mit Charakteristik lässt sich stets als ganze, homogene Function des m^{ten} Grades in Thetafunctionen erster Ordnung darstellen.

Unter den Charakteristiken sind wieder die zweitheiligen, deren Elemente rationale Brüche mit dem Nenner 2 sind, für die also $g_i = \frac{1}{2}\lambda_i$, $g_i' = \frac{1}{2}\lambda_i'$ (λ_i, λ_i' ganze Zahlen), von besonderem Interesse. Auch hier sind die zugehörigen Thetafunctionen von der Ordnung m entweder gerade oder ungrade. Nur ist zu bemerken, dass $\Theta_\lambda((u))$ nicht immer dann eine gerade (oder ungrade) Function ist, wenn λ nach der früheren Definition eine gerade (oder ungrade) Charakteristik ist, d. h. wenn $\sum \lambda\lambda' \equiv 0$ (oder $\equiv 1$) (mod 2).

Für die Thetafunction $\Theta_\lambda((u))$ von der Ordnung m und der zweitheiligen Charakteristik λ gilt nicht mehr der obige Satz, d. h. die Anzahl der linear unabhängigen Functionen dieser Art ist nicht mehr $= m^p$. Es tritt hier eine Reduction ein, die verschieden ist, je nachdem m eine gerade oder ungrade Zahl, λ eine gerade oder ungrade Charakteristik und $\Theta_\lambda((u))$ eine gerade oder ungrade Function ist. Es gilt nämlich der Satz[1]):

---

1) Weierstrass, s. Schottky l. c. S. 11.

(VII) Die Zahl A der linear unabhängigen Thetafunctionen von der Ordnung m und der zweitheiligen Charakteristik λ ist:

$$A = \frac{m^p + 2^p}{2} \text{ oder } \frac{m^p - 2^p}{2}, \text{ wenn } m \text{ gerade}; \quad \lambda = 0,$$

$$A = \frac{m^p}{2} \quad \text{„} \quad \frac{m^p}{2}, \quad \text{„} \quad m \text{ gerade}; \quad \lambda \gtrless 0,$$

$$A = \frac{m^p + 1}{2} \quad \text{„} \quad \frac{m^p - 1}{2}, \quad \text{„} \quad m \text{ ungrade}; \ \lambda \text{ gerade},$$

$$A = \frac{m^p - 1}{2} \quad \text{„} \quad \frac{m^p + 1}{2}, \quad \text{„} \quad m \text{ ungrade}; \ \lambda \text{ ungrade}.$$

Hierbei gilt stets der vordere Werth von A, wenn Θ_λ eine gerade, der hintere Werth, wenn Θ_λ eine ungrade Function ist.

§ 27. Die Nullpunkte der Function $\vartheta((u-e))$.[1]

In § 26 wurde die Thetafunction erster Ordnung von p Variabeln definirt durch den Ausdruck:

$$\vartheta(u_1, .., u_p) = \sum_{n_1} .. \sum_{n_p} e^{\sum_{ik} a_{ik} n_i n_k + 2 \sum_i n_i u_i} \tag{1}$$

mit den Bedingungen, dass $a_{ik} = a_{ki}$, dass $\sum \pm a'_{11} a'_{22} \, . \, . \, a'_{pp} \gtrless 0$ und dass $\sum_{ik} a'_{ik} n_i n_k$ für alle reellen, Werthe n_i, n_k negativ sei. Unter diesen drei Voraussetzungen ist die Reihe (1) convergent und die Function ϑ für alle endlichen Werthsysteme der Variabeln $u_1, .., u_p$ stetig. Ferner gelten die periodischen Eigenschaften:

$$\left.\begin{aligned} \vartheta(u_1, .., u_k + \pi i, .., u_p) &= \vartheta(u_1, .., u_k, .., u_p), \\ \vartheta(u_1 + a_{1k}, \ldots, u_p + a_{pk}) &= \vartheta(u_1, .., u_p)\, e^{-2u_k - a_{kk}}. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Um die Verwendung der Thetafunction zur Lösung des Umkehrproblems vorzubereiten, soll jetzt die Function (1) in Verbindung gesetzt werden mit den Integralen 1. Gattung. Sei $F(x, y) = 0$ die frühere, algebraische Gleichung vom Grade n und vom Geschlecht p, T die Verzweigungsfläche der Function y und a_i, b_i, c_i $(i = 1, .., p)$ die Querschnitte, die T in eine einfach zusammenhängende Fläche T' verwandeln (§ 2).

---

1) Riemann, Ges. W. S. 122 ff.

Man substituire alsdann in die Function (1):

erstens für die Variabeln $u_1, .., u_p$ die p Normalintegrale 1. Gattung (§ 15), nämlich

$$(3) \qquad u_1 = \int_\alpha^x du_1, \ldots, u_p = \int_\alpha^x du_p,$$

alle diese Integrale genommen in der Fläche T von demselben festen, unteren Grenzpunkte $(\alpha, \beta) = \alpha$ bis zu demselben variabeln, oberen Grenzpunkte $(x, y) = x$ auf dem nämlichen Integrationsweg;

zweitens für das System a_{ik} der Thetamoduln das System der Periodicitätsmoduln der Integrale 1. Gattung (3), nämlich für a_{ik} den Periodicitätsmodul des Integrals u_i am Querschnitt b_k der Fläche T (S. 121).

Dass diese Substitution möglich ist, ergibt sich daraus, dass durch sie die für die Existenz der Thetafunction (1) nothwendigen, oben genannten drei Bedingungen erfüllt sind nach den Sätzen XIII, XIV, XV § 15. Wir setzen indess in (1) nicht die Integrale (3) selber ein, sondern fügen noch beliebige Constante $e_1, .., e_p$ hinzu; wir benutzen ferner an Stelle der Integrale (3) wieder die Buchstaben $u_1, .., u_p$. Man erhält so die Function

$$(4) \qquad \vartheta(u_1 - e_1, .., u_p - e_p) = \vartheta((u - e)),$$

welche nunmehr nur abhängt von einer Variabeln, nämlich von den durch $F(x, y) = 0$ verbundenen Coordinaten (x, y) des Punktes x.

Die nächste und wichtigste Aufgabe ist die Bestimmung der Zahl und Lage der Nullpunkte der Function (4) in der Verzweigungsfläche T. Der Lösung schicken wir eine Betrachtung voraus, die auch anderwärts zur Verwendung kommt. (Vgl. Fig. 8. S. 104.)

Die Function (4) von x ist in T allenthalben eindeutig und endlich, da die Integrale u_i in T nicht unendlich werden; sie ist ferner stetig mit Ausnahme der Querschnitte a_i, b_i, c_i; es sind die Werthänderungen der Function (4) an diesen Querschnitten zu ermitteln. Bezeichnet man wie früher (§ 14. S. 104) durch u_h^+ und u_h^- die Werthe des Integrals u_h und entsprechend durch

$$(5) \qquad \vartheta^+ = \vartheta(u_1^+ - e_1, .., u_p^+ - e_p), \quad \vartheta^- = \vartheta(u_1^- - e_1, .., u_p^- - e_p)$$

die Werthe der Function (4) in gegenüberliegenden Punkten auf der + und — Seite eines Querschnittes, so ist nach (11) § 15 und wegen der Gleichungen (2) an

$$\left.\begin{array}{llll} c_i: & u_h^+ = u_h^- \quad (h=1,..,p) & \text{also} & \vartheta^+ = \vartheta^-, \\ a_i: & u_h^+ = u_h^- \, (h \gtrless i), \; u_i^+ = u_i^- + \pi i & \text{,,} & \vartheta^+ = \vartheta^-, \\ b_i: & u_h^+ = u_h^- + a_{hi} \; (h=1,..,p) & \text{,,} & \vartheta^+ = \vartheta^- e^{-2(u_i^- - e_i) - a_{ii}}, \end{array}\right\} \quad (6)$$

oder

$$b_i: \vartheta^+ = \vartheta^- e^{-2(\bar{u}_i - e_i)}, \tag{6a}$$

wenn man zur Abkürzung das arithmetische Mittel von u_i^+ und u_i^- am Querschnitt b_i mit $\bar{u}_i$ bezeichnet, so dass:

$$\bar{u}_i = \frac{1}{2}(u_i^+ + u_i^-) = \frac{1}{2}(2u_i^- + a_{ii}). \tag{7}$$

Man hat so den Satz:

(I) Die Function (4) ist in T allenthalben stetig mit Ausnahme der Querschnitte b_i, an welchen der Quotient $\vartheta^+ : \vartheta^-$ gleich der längs des Querschnittes stetig veränderlichen Grösse

$$e^{-2(\bar{u}_i - e_i)} \tag{8}$$

ist.

Wir sagen auch: die Function $\vartheta((u))$ nimmt Factoren an, wenn der Punkt x einen Querschnitt von der $+$ zur $-$ Seite überschreitet oder wenn die p Integrale u_h gleichzeitig um ein zusammengehöriges System von Periodicitätsmoduln wachsen. Diese Factoren sind an den Querschnitten c_i und a_i gleich 1, an b_i gleich der Grösse (8).

Die Frage nach der Zahl und Lage der Nullpunkte der Function (4) in T wird gelöst durch eine allgemeine Methode von Cauchy, die, für den vorliegenden Fall specialisirt, so lautet:

Ist A' ein einfach zusammenhängender Theil einer über der x-Ebene mehrfach ausgebreiteten Fläche und ist $f(x)$ eine Function von x, die in A' eindeutig und stetig ist und $= 0^1$ wird in einer endlichen Zahl N von Punkten, ist ferner $X(x)$ eine beliebige, in A' eindeutige und stetige Function, so hat man die N Nullpunkte von $f(x)$ durch kleine Kreise auszuschneiden, die so durchlöcherte Fläche A' durch Querschnitte in eine einfach zusammenhängende Fläche A'' zu verwandeln und die Gleichungen anzusetzen:

$$\int d \log f(x) = 0, \quad \int X(x)\, d \log f(x) = -\int \log f(x)\, dX(x) = 0, \tag{9}$$

wo die Integrale der linken Seiten in positiver Richtung (d. h. so dass die Fläche zur Linken liegt) über die sämmtlichen Grenzcurven von A'' auszudehnen sind. Die erste der Gleichungen (9) führt dann auf die Zahl N der 0^1 Punkte von $f(x)$ in A', die zweite auf eine Beziehung zwischen den Coordinaten dieser N Punkte.

Um diesen Satz auf die Function (4) anzuwenden, mache man die Voraussetzung, die Grössen $e_1, \ldots, e_p$ seien so beschaffen, dass die Function $\vartheta((u-e))$ nicht identisch, d. h. nicht für jeden Punkt (x, y) in T verschwindet. Man hat dann für $f(x)$ die Function $\vartheta((u-e))$, für A' die einfach zusammenhängende Fläche T' zu nehmen, ferner die 0^1 Punkte $x_1, x_2, \ldots, x_N$ von $\vartheta((u-e))$ in T' durch kleine Kreise auszuschneiden und diese durchlöcherten Stellen durch Querschnitte $\mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_2, \ldots, \mathfrak{L}_N$ mit den ursprünglichen Grenzcurven a_i, b_i, c_i von T' zu verbinden. Das letztere möge so geschehen, dass man den gemeinsamen Punkt O der Querschnitte c_i (Fig. 8. S. 104) in den Anfangspunkt α der Integrale (3) verlegt und von demselben Punkt aus nach den N Punkten $x_1, \ldots, x_N$ die Querschnitte $\mathfrak{L}_1, \ldots, \mathfrak{L}_N$ zieht so, dass sie die früheren Querschnitte a_i, b_i, c_i nicht schneiden. Die von den Schnitten $a_i, b_i, c_i, \mathfrak{L}_\nu$ begrenzte einfach zusammenhängende Fläche sei mit T'' und die $+$ und $-$ Seiten dieser Querschnitte wie in Fig. 8 bezeichnet.

Die erste Gleichung (9) lautet nun:

$$(10) \quad \int d \log \vartheta((u-e)) = 0 \quad \text{oder} \quad \int^{+} (d \log \vartheta^{+} - d \log \vartheta^{-}) = 0.$$

Das Integral in der ersten Gleichung ist in positiver Richtung über die ganze Begrenzung von T'' zu erstrecken. Es kann ersetzt werden durch das Integral der zweiten Gleichung, in welchem ausser den kleinen Kreisen jede der Grenzcurven $a_i, b_i, c_i, \mathfrak{L}_\nu$ von T'' nur noch auf der $+$ Seite im Sinne der Pfeile zu durchlaufen ist, was durch die Zufügung von $+$ am Integralzeichen angedeutet sei.

Die Unstetigkeiten oder Werthdifferenzen der Function $\log \vartheta$ an den Querschnitten $\mathfrak{L}_\nu$ und a_i, b_i, c_i sind nach (6), da jetzt wegen des Logarithmus ganzzahlige Vielfache von $2i\pi$ zuzufügen sind:

$$(11) \quad \begin{cases} \mathfrak{L}_\nu: \log \vartheta^{+} - \log \vartheta^{-} = 2i\pi, \\ c_i: \log \vartheta^{+} - \log \vartheta^{-} = r_i 2i\pi, \\ a_i: \log \vartheta^{+} - \log \vartheta^{-} = g_i 2i\pi, \\ b_i: \log \vartheta^{+} - \log \vartheta^{-} = -2(\bar{u}_i - e_i) - g_i' 2i\pi; \end{cases}$$

die ganzen Zahlen r_i, g_i, g_i', die von der Anordnung des Querschnittsystems abhängen, sind vorläufig noch ganz unbestimmt.

Hiernach ist der Beitrag zu dem Integral (10) für die Schnitte $\mathfrak{L}_\nu$, c_i und a_i gleich 0; dagegen ist der Beitrag für

$$b_i: \quad \int_{b_i}^{+} (d \log \vartheta^{+} - d \log \vartheta^{-}) = -2 \int_{b_i}^{+} d\bar{u}_i = 2i\pi$$

und folglich der Gesammtbeitrag

$$\text{für die } p \text{ Querschnitte } b_i\colon\ p2i\pi. \tag{12}$$

Denn das Integral $\int_{b_i}^{+} d\bar{u}_i$, längs der $+$ Seite des Querschnittes b_i im Sinn der Pfeile genommen, ist gleich der Differenz der Werthe, die $\bar{u}_i$ auf der $-$ und der $+$ Seite von a_i besitzt. Nun ist $\bar{u}_i = \frac{1}{2}(u_i^+ + u_i^-)$, die Zeichen $+$ und $-$ bezogen auf die beiden Seiten von b_i. Für u_i^+ aber, wie für u_i^- ist nach (6) die Differenz zwischen den beiden Werthen auf der $-$ und der $+$ Seite von a_i gleich $-\pi i$. Daher hat man den Werth (12). Zugleich folgt, was wir später benutzen, dass das Integral $\int d \log \vartheta((u-e))$, genommen um ein einzelnes Querschnittpaar a_i, b_i gleich $+2i\pi$, dass also längs des Schnittes c_i: $\log\vartheta^+ - \log\vartheta^- = +2i\pi$ oder dass die ganzen Zahlen r_i in (11) bei unserer Anordnung $= 1$ sind.

Endlich ist der Beitrag des kleinen Kreises um den Punkt x_ν zu dem Integral gleich $-2i\pi$ und für die N Punkte x_ν gleich $-N2i\pi$. Fasst man dies zusammen, so führt die Gleichung (10) auf $2i\pi(p-N)=0$, woraus $N=p$. Dies gibt den Satz:

Die Function (4) $\vartheta((u-e))$ besitzt in der Verzweigungsfläche T genau p Nullpunkte $x_1, \ldots, x_p$;

oder

(II) Sind $e_1, \ldots, e_p$ ganz beliebige Grössen, nur so beschaffen, dass $\vartheta((u-e))$ als Function von x nicht identisch verschwindet, so wird diese Function stets $=0^1$ in p Punkten der Fläche T oder der Curve $F(x, y) = 0$.

Um die zweite Gleichung (9) zu berechnen, nehme man für die Function $f(x)$ wieder $\vartheta((u-e))$, für $X(x)$ ein Normalintegral 1. Gattung, etwa u_h, und bezeichne durch u_h^i den Werth von u_h im Punkte x_i und durch α_h^i den Werth von u_h im Punkte ϱ_i (Fig. 8), in welchem das Querschnittpaar a_i, b_i sich kreuzt oder c_i beginnt. Dann ist

$$u_h^i = \int_\alpha^{x_i} du_h, \qquad \alpha_h^i = \int_\alpha^{\varrho_i} du_h, \tag{13}$$

wenn das erste Integral längs $\mathfrak{L}_i$, das zweite längs c_i genommen wird.

Die zweite Gleichung (9) lautet nun:

$$\int \log \vartheta((u-e))\, du_h = 0 \quad \text{oder} \quad \int^{+} (\log\vartheta^+ - \log\vartheta^-)\, du_h = 0, \tag{14}$$

wo in der letzten Gleichung das Integral, längs der kleinen Kreise um die Punkte x_i, ausserdem nur noch auf der $+$ Seite der Querschnitte a_i, b_i, c_i, $\mathfrak{L}_i$ $(i = 1, .., p)$ der Fläche T'' im Sinne der Pfeile zu nehmen ist. Als Beiträge der einzelnen Schnitte zu dem Integral (14) erhält man nach (11), da nach der obigen Bemerkung $r_i = 1$ ist,

$$(15)\quad \begin{cases} \mathfrak{L}_i:\ +2i\pi\int\limits_{\alpha}^{x} du_h = +2i\pi u^i_h,\text{[1]} \\ c_i:\ +2i\pi\int\limits_{\varrho_i}^{\alpha} du_h = -2i\pi\alpha^i_h, \\ a_i:\ 2i\pi g_i\int\limits_{a_i}^{+} du_h = 2i\pi g_i a_{ih}, \\ b_i:\ -2\int\limits_{b_i}^{+} \bar{u}_i\,du_h + 2(e_i - g_i'\pi i)\int\limits_{b_i}^{+} du_h. \end{cases}$$

In dem Ausdruck für b_i ist das erste Integral schwer auszuwerthen; das zweite dagegen wird 0 oder $-\pi i$, je nachdem $i \gtrless h$ oder $i = h$ ist. Bei der Summation der Werthe (15) nach i von 1 bis p liefert daher das letzte Glied den Beitrag $-2(e_h - g_h'\pi i)\pi i$. Fasst man die Werthe (15) zusammen und führt die Summation aus, so geht (14) über in $(i, h = 1, .., p)$:

$$(16)\qquad \sum_i u^i_h - e_h + g_h'\pi i + \sum_i g_i a_{ih} + k_h = 0,$$

wenn zur Abkürzung gesetzt wird

$$(17)\qquad \pi i k_h = -\pi i\sum_i \alpha^i_h - \int\limits_{b}^{+} \bar{u}_i\,du_h.$$

Hiermit ist die Aufgabe gelöst. Die in (16) abgesonderten Grössen k_h sind nach (17) unabhängig von den Werthen der e_i und x_i, ebenso von den ganzen Zahlen g_i, g_i'. Diese letzteren Zahlen sind nicht näher bekannt. Wie sie aber auch beschaffen seien, so stellen die von ihnen abhängigen Glieder in den p Gleichungen (16) ein System von zusammengehörigen Periodicitätsmoduln der Integrale $u_1, .., u_p$ dar (§ 15 Gl. 16). Da sich nun, wie aus (2) folgt, die 0^1 Punkte x_i

1) Der Beitrag des kleinen Kreises um x_i ist bereits in dem Beitrag von $\mathfrak{L}_i$ mit enthalten.

von $\vartheta((u-e))$ nicht ändern, wenn die e_i um ein System von zusammengehörigen Perioden wachsen, so kann man die Gleichungen (16) mit Anwendung des schon früher S. 152 definirten Congruenzzeichens abgekürzt schreiben ($i, h = 1, .., p$):

$$e_h \equiv \sum_i \int_\alpha^{x_i} du_h + k_h. \tag{18}$$

Dies gibt für die Lage der p Nullpunkte von $\vartheta((u-e))$ den Satz[1]):

Die p Nullpunkte x_i der Function $\vartheta((u-e))$ sind mit den p Grössen e_h durch die Congruenzen (18) verbunden; oder:

(III) Sind $e_1, .., e_p$ ganz beliebige Grössen, nur so beschaffen, dass die Function $\vartheta((u-e))$ als Function von x nicht identisch verschwindet, so lassen sich dieselben durch p-gliedrige Integralsummen in der Form (18) darstellen, wo die p Punkte x_i die 0^1 Punkte von $\vartheta((u-e))$ und die k_h gewisse von den x_i und e_i unabhängige Constanten sind.

Denkt man sich die p Punkte x_i beliebig gegeben, so kann man die Grössen e_i bis auf ein zusammengehöriges System von Periodicitätsmoduln nach (18) bilden. Sind umgekehrt die p Grössen e_i beliebig gegeben, die p Punkte x_i gesucht, so stellen die Congruenzen (18) ein Jacobi'sches Umkehrproblem dar. Dasselbe ist nach Satz II und III stets lösbar; denn ein System von Lösungen wird gebildet durch die p 0^1 Punkte der Function $\vartheta((u-e))$. Im § 28 wird gezeigt, dass diese Lösung auch eine eindeutige ist unter der Voraussetzung, die e_i seien so beschaffen, dass $\vartheta((u-e))$ als Function von x nicht identisch verschwindet.

Die vorstehenden Betrachtungen bedürfen indess noch einer Ergänzung[2]). Es gibt gewisse Werthsysteme der e_i von der Art, dass die Function $\vartheta((u-e))$ identisch, d. h. für jeden Werth von x verschwindet (§ 28). Es gibt aber andererseits unendlich viele Werthsysteme der e_i, für welche dies nicht der Fall ist, für welche vielmehr $\vartheta((u-e))$ wirklich eine Function von x darstellt. „In der That, wenn x gegeben ist, können die Grössen e_i immer so gewählt werden, dass $\vartheta((u-e))$ nicht verschwindet. Denn sonst müsste die Function $\vartheta(v_1, .., v_p)$ für jedwede Werthe der Grössen v_i verschwinden und

1) Riemann, Ges. W. S. 126 und 199.

2) Riemann, Ges. W. S. 200.

folglich müssten in ihrer Entwicklung nach ganzen Potenzen von e^{2v_1}, .., e^{2v_p} sämmtliche Coefficienten gleich Null sein, was nicht der Fall ist. Die Grössen e_i können sich dann unabhängig von einander innerhalb endlicher Grössengebiete ändern, ohne dass die Function $\vartheta((u-e))$ für den gegebenen Werth von x verschwindet. Mit andern Worten: man kann immer ein Grössengebiet E von $2p$ Dimensionen angeben, innerhalb dessen das System der Grössen e_i sich bewegen kann, ohne dass die Function $\vartheta((u-e))$ für diesen Werth von x verschwindet. Sie wird also nur für p Lagen von x gleich 0^1; bezeichnet man diese Punkte durch x_1, .., x_p, so gelten die Congruenzen (18). Jeder Bestimmungsweise des Systems der Grössen e_i innerhalb E oder jedem „Punkt" von E entspricht dann eine Bestimmungsweise der Punkte x_i, deren Gesammtheit ein dem Grössengebiet E entsprechendes Grössengebiet X bildet. In Folge der Gleichungen (18) entspricht jedem „Punkte" von X aber auch nur ein „Punkt" von E; hätte also X nur $2p-1$ oder weniger Dimensionen, so würde E nicht $2p$ Dimensionen haben können; es hat folglich X $2p$ Dimensionen. Unsere Schlüsse bleiben daher anwendbar für beliebige Lagen der Punkte x_i innerhalb endlicher Gebiete."

Dass das Gebiet X der p Punkte x_i die ganze Fläche T umfasst, folgt erst später aus Satz (IX) § 28.

§ 28. Identisches Verschwinden der Thetafunction. Eindeutigkeit des Umkehrproblems.[1])

An das Vorige schliessen sich weitere Sätze über das Verschwinden der Function $\vartheta((u-e))$ an, wenn man die bisher beliebigen Grössen e_1, .., e_p gewissen Bedingungen unterwirft.

Wir sprechen den Satz III § 27 nochmals in folgender Form aus:

(I) Unter der Voraussetzung für die Grössen e_1, .., e_p, dass

$$\vartheta\left(\left(\int_\alpha^x du - e\right)\right) \quad \text{nicht identisch,} \tag{1}$$

d. h. nicht für jede Lage von x verschwindet, sind stets die Congruenzen ($h = 1$, .., p):

$$e_h \equiv \sum_{i=1}^{p} \int_\alpha^{x_i} du_h + k_h \tag{2}$$

lösbar und ein System von Lösungen wird von den p 0^1 Punkten der Function $\vartheta((u-e))$ gebildet.

1) Riemann, Ges. W. S. 127 ff. und S. 200 ff.

Es handelt sich jetzt darum, zu untersuchen, ob diese Lösung des Systems (2) unter der Voraussetzung (1) eindeutig ist und allgemein, welche Arten von Lösungen das System (2) unter verschiedenen Voraussetzungen über die Grössen e_i zulässt.

Wir setzen zunächst voraus, die p Grössen e_i seien so beschaffen dass

$$\vartheta(e_1, \ldots, e_p) = 0, \tag{3}$$

während

$$\vartheta\left(\!\!\left(\int_\alpha^x du - \int_\alpha^y du - e\right)\!\!\right) \text{ nicht identisch,} \tag{4}$$

d. h. nicht für jede Lage der beiden Punkte x und y verschwindet.

Betrachtet man erstens (4) als Function der Coordinaten des Punktes x, während der Punkt y irgendwie fest gewählt sei, so verschwindet diese Function nach § 27 in p bestimmten Punkten. Unter diesen befindet sich der Punkt y, weil nach Voraussetzung (3) $\vartheta((e)) = 0$ ist. Die $p-1$ übrigen 0^1 Punkte der Function (4) seien $\xi_1, \ldots, \xi_{p-1}$.

Man hat dann nach § 27 Gl. 18 (indem sich $\int_\alpha^y du_h$ weghebt) die Congruenzen $(h = 1, \ldots, p)$:

$$e_h \equiv \sum_{i=1}^{p-1} \int_\alpha^{\xi_i} du_h + k_h. \tag{5}$$

Diese p Congruenzen mit $p-1$ Unbekannten sind mit einander verträglich, da zwischen den p Integralsummen die Relation $\vartheta((e)) = 0$ besteht.

Betrachtet man zweitens (4) als Function von y, während x irgendwie gewählt sei, so verschwindet dieselbe ebenfalls in p Punkten, nämlich in x und in $p-1$ weiteren Punkten $\eta_1, \ldots, \eta_{p-1}$, für welche nach (18) § 27 die Congruenzen gelten $(h = 1, \ldots, p)$:

$$e_h \equiv -\sum_{i=1}^{p-1} \int_\alpha^{\eta_i} du_h - k_h. \tag{6}$$

Aus (5) und (6) folgt durch Subtraction oder Elimination der e_h

$$\sum_{i=1}^{p-1} \int_\alpha^{\xi_i} du_h + \sum_{i=1}^{p-1} \int_\alpha^{\eta_i} du_h \equiv -2k_h \tag{7}$$

oder

$$\sum_{i=1}^{p-1} du_h^{(\xi_i)} + \sum_{i=1}^{p-1} du_h^{(\eta_i)} = 0. \tag{8}$$

Daher der Satz:

(II) Unter den Voraussetzungen (3) und (4) für die p Grössen e_h sind gleichzeitig die Congruenzen (5) und (6) lösbar.

Sind $\xi_1, \ldots, \xi_{p-1}$ ein System von Lösungen der Congruenzen (5); $\eta_1, \ldots, \eta_{p-1}$ ein solches von (6), so bilden die $2p-2$ Punkte ξ und η zusammen die 0^1 Punkte einer, $F(x, y) = 0$ adjungirten Φ-Function vom $n-3^{\text{ten}}$ Grade, wie aus (8) nach dem Abel'schen Theorem für die Differentiale 1. Gattung folgt (§ 20 Gl. 11).

Wir gehen einen Schritt weiter; die p Grössen e_h seien jetzt so beschaffen, dass

$$\vartheta\left(\left(\int_\alpha^x du - e\right)\right) \text{ identisch,} \tag{9}$$

d. h. für jede Lage des Punktes x verschwindet,

$$\vartheta\left(\left(\int_\alpha^x du + \int_\alpha^{\xi_1} du - \int_\alpha^y du - e\right)\right) \text{ nicht identisch,} \tag{10}$$

d. h. nicht für alle Lagen der Punkte x, ξ_1, y verschwindet.

Betrachtet man erstens (10) als Function von x, während ξ_1 und y irgendwie gewählt seien, so verschwindet sie für p bestimmte Punkte. Unter diesen befindet sich der Punkt y wegen der Voraussetzung (9) oder weil $\vartheta\left(\left(\int_\alpha^{\xi_1} du - e\right)\right)$ für jedes ξ_1 verschwindet. Die übrigen $p-1$ 0^1 Punkte von (10) seien $\xi_2, \ldots, \xi_p$. Dann hat man nach (18) § 27 die Congruenzen ($h = 1, \ldots, p$):

$$e_h \equiv \sum_{i=1}^{p} \int_\alpha^{\xi_i} du_h + k_h, \tag{11}$$

wo indess der Punkt ξ_1 ganz willkürlich bleibt.

Betrachtet man zweitens (10) als Function von y, während x und ξ_1 beliebig fixirt werden, so verschwindet sie ebenfalls in p Punkten, unter denen sich die zwei Punkte x und ξ_1 befinden. Für die übrigen $p-2$ 0^1 Punkte $\eta_1, \ldots, \eta_{p-2}$ von (10) gelten dann die Congruenzen ($h = 1, \ldots, p$):

$$e_h \equiv -\sum_{i=1}^{p-2} \int_\alpha^{\eta_i} du_h - k_h. \tag{12}$$

Aus (11) und (12) folgert man wieder durch Subtraction und Differentiation

$$\sum_{i=1}^{p} du_h^{(\xi_i)} + \sum_{i=1}^{p-2} du_h^{(\eta_i)} = 0, \tag{13}$$

d. h.

(III) Unter den Voraussetzungen (9) und (10) für die p Grössen e_h sind gleichzeitig die Congruenzen (11) und (12) lösbar; dabei ist von den p Punkten ξ_i in (11) einer im Voraus beliebig wählbar.

Sind $\xi_1, .., \xi_p$ ein System von Lösungen der Congruenzen (11), $\eta_1, .., \eta_{p-2}$ ein solches von (12), so bilden nach (13) die $2p-2$ Punkte ξ und η wieder zusammen die 0^1 Punkte einer Φ-Function.

In der begonnenen Weise kann man fortfahren und die Fälle untersuchen, in denen die Functionen (4) oder (10) und weitere solcher Functionen identisch verschwinden. Die Sätze I, II, III bilden alsdann den Anfang einer ganzen Reihe von Sätzen, deren Beweis sich ganz analog und ohne Schwierigkeit ergibt. Der allgemeinste Satz dieser Art lautet[1]):

(IV) Sind die p Grössen e_p von der Beschaffenheit, dass

$$\vartheta\left(\left(\sum_{i=0}^{m-1}\int_{\alpha}^{x_i} du - \sum_{i=0}^{n-1}\int_{\alpha}^{y_i} du - e\right)\right) \text{ noch identisch,} \tag{14}$$

$$\vartheta\left(\left(\sum_{i=0}^{m}\int_{\alpha}^{x_i} du - \sum_{i=0}^{n}\int_{\alpha}^{y_i} du - e\right)\right) \text{ nicht mehr identisch} \tag{15}$$

verschwindet, so lässt sich stets gleichzeitig den Congruenzen genügen ($h = 1, .., p$):

$$e_h \equiv \sum_{i=1}^{p+m-n-1}\int_{\alpha}^{x_i} du_h + k_h, \quad e_h \equiv -\sum_{i=1}^{p+n-m-1}\int_{\alpha}^{y_i} du_h - k_h. \tag{16}$$

Dabei sind von den $p+m-n-1$ Punkten x_i noch m, von den $p+n-m-1$ Punkten y_i noch n willkürlich wählbar.

Sind $x_1, .., x_{p+m-n-1}$ ein System von Lösungen der ersten Congruenzen (16), $y_1, .., y_{p+n-m-1}$ ein solches der zweiten Congruenzen (16), so bilden die $2p-2$ Punkte x und y wieder zusammen die 0^1 Punkte einer Φ-Function. Von den beiden Zahlen $p+m-n-1$

1) Riemann, Ges. W. S. 202, wo der Satz für $n=m-1$ ausgesprochen ist.

und $p+n-m-1$ wird im Allgemeinen die eine p überschreiten, die andere bleibt dann unter p. Die Fälle, in denen beide Zahlen $\overline{\overline{<}}p$, sind nur $m=n$ und $m=n-1$ oder $n=m-1$.

Weiter unten wird bewiesen, dass die in den Sätzen I—IV auftretenden Congruenzen unter den angegebenen Bedingungen auch stets eindeutig lösbar sind.

Man kann die in den Sätzen II', III, IV über die p Grössen e_h oder über das identische Verschwinden der Thetafunction gemachten Voraussetzungen in folgender Weise umformen[1]). Setzt man zur Abkürzung

$$(17)\qquad \frac{\partial \vartheta(v_1,..,v_p)}{\partial v_i} = \vartheta^i((v)),\quad \frac{\partial^2 \vartheta(v_1,..,v_p)}{\partial v_i \partial v_k} = \vartheta^{ik}((v))\quad \text{u. s. f.},$$

so gilt zunächst für den einfachsten Fall der Satz:

(V) Wenn die Function

$$(18)\qquad \vartheta\left(\left(\int_\alpha^x du - \int_\alpha^y du - e\right)\right)$$

identisch für alle Punkte x und y verschwindet, so sind auch die sämmtlichen Functionen $\vartheta^i((e))=0$ $(i=1,..,p)$.

Denn bezeichnet man die in den Zählern der Normaldifferentiale 1. Gattung $du_1,..,du_p$ auftretenden Φ-Functionen mit $f_1,..,f_p$ (vgl. (10) § 15), so ist

$$(19)\qquad du_1 : du_2 : \cdots : du_p = f_1 : f_2 : \cdots : f_p.$$

Setzt man nun die Function (18) gleich Null und lässt y mit x zusammenfallen, so hat man

$$\sum_{i=1}^p \vartheta^i((e))\, du_i^{(x)} = 0 \quad \text{oder} \quad \sum_{i=1}^p \vartheta^i((e))\, f_i(x) = 0.$$

Da nun zwischen den p Functionen f_i keine lineare Gleichung mit constanten Coefficienten besteht (§ 15, S. 121), so folgt hieraus, dass die sämmtlichen ersten Ableitungen von $\vartheta(v_1,..,v_p)$ für $v_1,..,v_p=e_1,..,e_p$ verschwinden müssen.

Die Verallgemeinerung von (V) führt zu dem Satze:

(VI) Wenn die Function

$$(20)\qquad \vartheta\left(\left(\sum_{i=1}^m \int_\alpha^{x_i} du - \sum_{i=1}^m \int_\alpha^{y_i} - e\right)\right)$$

1) Riemann, Ges. W. S. 204 ff.

identisch für alle Punkte x_i und y_i verschwindet, so verschwinden auch die sämmtlichen Ableitungen von $\vartheta(v_1,..,v_p)$ von der ersten bis zur m^{ten} für $v_1, .., v_p = e_1, .., e_p$.

Denn setzt man in der Function (20) zuerst $y_m = x_m$, so verschwinden nach (V) identisch die sämmtlichen, ersten Ableitungen der Function $\vartheta(v_1, .., v_p)$ für $(h = 1, .., p)$:

$$v_h = \sum_{i=1}^{m-1} \int_\alpha^{x_i} du_h - \sum_{i=1}^{m-1} \int_\alpha^{y_i} du_h - e_h. \tag{21}$$

Setzt man weiter $y_{m-1} = x_{m-1}$, so verschwinden die sämmtlichen, zweiten Ableitungen von $\vartheta(v_1, .., v_p)$ für

$$v_h = \sum_{i=1}^{m-2} \int_\alpha^{x_i} du_h - \sum_{i=1}^{m-2} \int_\alpha^{y_i} du_h - e_h \tag{22}$$

u. s. f. Unter der in Satz (VI) enthaltenen Voraussetzung müssen also sämmtliche, partielle Ableitungen von $\vartheta(v_1, .., v_p)$ bis zur m^{ten} für $v_1, .., v_p = e_1, .., e_p$ verschwinden. (q. e. d.) Hieraus folgt weiter der Satz:

(VIa) Wenn die Function

$$\vartheta\left(\!\left(\sum_{i=1}^{m} \int_\alpha^{x_i} du - \sum_{i=1}^{n} \int_\alpha^{y_i} du - e\right)\!\right) \tag{23}$$

identisch für alle Punkte x_i und y_i verschwindet und $m > n$ ist, so verschwinden auch die sämmtlichen, partiellen Ableitungen von $\vartheta(v_1, .., v_p)$ bis zur n^{ten} für $(h = 1, .., p)$:

$$v_h = \sum_{i=1}^{m-n} \int_\alpha^{x_i} du_h - e_h \tag{24}$$

und zwar identisch für die $m - n$ Punkte x_i.

Es gelten endlich auch die Umkehrungen der Sätze V und VI, nämlich:

Wenn sämmtliche Functionen $\vartheta^i((e)) = 0$ sind, so verschwindet die Function (18) identisch für alle Lagen der Punkte x und y.

Wenn die sämmtlichen, partiellen Ableitungen von $\vartheta(v_1, .., v_p)$ bis zur m^{ten} für $v_1, .., v_p = e_1, .., e_p$ verschwinden, so verschwindet die Function (20) identisch für alle Lagen der Punkte $x_1, .., x_m$ und $y_1, .., y_m$.

Wenn die sämmtlichen, partiellen Ableitungen von $\vartheta(v_1, .., v_p)$ bis zur n^{ten} für die Argumente (24) identisch bei allen Lagen der

$m - n$ Punkte x_i verschwinden, so verschwindet die Function (23) identisch für alle Lagen der m Punkte x_i und der n Punkte y_i.

Für den Beweis dieser Sätze verweisen wir auf die Litteratur[1]).

Wir ziehen aus den vorstehenden Sätzen weitere Folgerungen[2]), die in mehrfacher Beziehung von Wichtigkeit sind. Unter den Voraussetzungen (9) und (10) für die Grössen e_h existiren nach (III) unendlich viele, den Congruenzen (11) genügende Punktsysteme $\xi_1, .., \xi_p$; je p solcher Punkte sind 0^1 Punkte einer Φ-Function. Hieraus folgt:

(VII) Sind $\xi_1, .., \xi_p$ p Punkte in T von solcher Lage, dass

$$\vartheta\left(\left(\int_\alpha^x du - \sum_{i=1}^p \int_\alpha^{\xi_i} du - k\right)\right) \tag{25}$$

als Function von x identisch verschwindet, so sind die p Punkte ξ_i stets 0^1 Punkte einer Φ-Function.

Da nämlich (25) für jedes x verschwindet, so gibt es nach (III) unendlich viele Punktsysteme $\xi_1', .., \xi_p'$, die nach (11) mit dem gegebenen Punktsystem $\xi_1, .., \xi_p$ in der Beziehung stehen

$$\sum_{i=1}^p \int_\alpha^{\xi_i'} du_h + k_h \equiv \sum_{i=1}^p \int_\alpha^{\xi_i} du_p + k_h \quad \text{oder} \quad \sum_{i=1}^p \int_{\xi_i}^{\xi_i'} du_h \equiv 0.$$

Hieraus aber folgt nach der Umkehrung des Abel'schen Theorems (IV) § 20 und den Sätzen des § 12, dass es zwei Functionen Φ und Φ' gibt, die bez. in den p Punkten ξ_i und ξ_i' verschwinden. (q. e. d.)

Aus (VII) folgt weiter:

(VIII) Wählt man in T p Punkte $\xi_1, .., \xi_p$ so, dass sie nicht 0^1 Punkte einer Φ-Function sind und bildet aus ihnen die Function

$$\vartheta\left(\left(\int_\alpha^x du - \sum_{i=1}^p \int_\alpha^{\xi_i} du - k\right)\right), \tag{26}$$

so wird diese als Function von x nicht identisch Null, sondern $= 0^1$ in den p gewählten Punkten ξ_i.

Denn bei der Voraussetzung, dass die p Punkte ξ_i nicht 0^1 Punkte einer Φ-Function seien, kann (26) als Function von x nicht identisch

---

1) Riemann, Ges. W. S. 205 u. 207.

2) Riemann, Ges. W. S. 129. Man vergleiche die Darstellung der folgenden Sätze bei Weber, Abel'sche Function. ($p = 3$) S. 66 ff. (1876) und C. Neumann, Vorl. üb. Riemann's Theorie der Abel'schen Integrale. 2. A. S. 333 ff. (1884).

verschwinden (Satz VII); sie hat daher p Nullpunkte x_i, die sich nach (18) § 27 bestimmen aus

$$\sum_{i=1}^{p}\int_{\alpha}^{x_i} du_h + k_h \equiv \sum_{i=1}^{p}\int_{\alpha}^{\xi_i} du_h + k_h \quad \text{oder} \quad \sum_{i=1}^{p}\int_{\xi_i}^{x_i} du_h \equiv 0.$$

Hieraus aber folgt, dass die p Punkte x_i zusammenfallen müssen mit den p Punkten ξ_i; denn andernfalls wären (s. Beweis von VII) die p Punkte x_i sowohl, wie die p Punkte ξ_i Nullpunkte einer Φ-Function, was der Voraussetzung von (VIII) widerspricht. (q. e. d.)

Wir heben hervor, dass der Satz (VIII) es ermöglicht, eine Thetafunction mit dem variabeln Punkt x zu bilden, die p vorgegebene Nullpunkte $\xi_1, \ldots, \xi_p$ hat; es ist dies die Function (26). Die p Punkte ξ_i haben nur der Bedingung zu genügen, dass sie nicht Nullpunkte einer Φ-Function sind. Auf diese Bildung gründet sich später die Lösung des Umkehrproblems.

Aus (VIII) folgt endlich ein Satz[1]), der die Umkehrung von (II) bildet:

(IX) Sind $\xi_1, \ldots, \xi_{p-1}$ $p-1$ ganz beliebige Punkte in T, so gilt stets die Gleichung

$$\vartheta\left(\left(\sum_{i=1}^{p-1}\int_{\alpha}^{\xi_i} du + k\right)\right) = 0, \tag{27}$$

oder:

Die Function $\vartheta(v_1, \ldots, v_p)$ verschwindet jedesmal, wenn die Argumente $v_1, \ldots, v_p$ $p-1$-gliedrige Summen von der Form $(h = 1, \ldots, p)$:

$$\sum_{i=1}^{p-1}\int_{\alpha}^{\xi_i} du_h + k_h$$

sind.

Setzt man nämlich in (26) $x = \xi_p$, so folgt nach (VIII) die Gleichung (27), allerdings zunächst unter der Voraussetzung, dass die $p-1$ oberen Grenzen der Integrale p Punkten angehören, die nicht Nullpunkte einer Φ-Function sind. Diese Voraussetzung ist aber ganz unwesentlich. Wenn nämlich p Punkte $\xi_1, \ldots, \xi_p$ in T nicht Nullpunkte einer Φ-Function sind, so lassen sich um dieselben in T stets Bereiche von solcher Grösse abgrenzen, dass auch beliebige p Punkte $x_1, \ldots, x_p$ innerhalb dieser p Bereiche nicht Nullpunkte einer

---

1) Riemann, Ges. W. S. 200; vgl. auch Weber, l. c. S. 66 und C. Neumann, l. c. S. 347.

Φ-Function sind. Für je $p-1$ unter p solchen Punkten gilt daher auch die Gleichung (27), also

$$\vartheta\left(\left(\sum_{i=1}^{p-1}\int_{\alpha}^{x_i} du + k\right)\right) = 0. \tag{28}$$

Da nun die links stehende Function für jedes der x_i innerhalb T' eindeutig und stetig ist und eine solche Function nicht in einem Theile von T' gleich 0 sein kann, ohne allenthalben in T' gleich 0 zu sein, so gilt die Gleichung (28) noch, welche Lage auch die $p-1$ Punkte $x_1, \ldots, x_{p-1}$ in T' oder T annehmen. (q. e. d.)

Zu Anfang dieses § in den Sätzen I—IV wurde die Lösbarkeit von Congruenzen (oder Umkehrproblemen) unter gewissen Voraussetzungen bewiesen. Wir können jetzt auch zeigen, dass diese Lösungen eindeutig sind.

Zu Satz I erhält man die Ergänzung:

(X) Ist die Bedingung (1) erfüllt, so sind die Congruenzen (2) eindeutig lösbar.

Denn angenommen, es gäbe ausser den p Punkten x_i noch ein zweites System von p Punkten x_i', das den Congruenzen (2) genügt, so dass gleichzeitig ($h = 1, \ldots, p$):

$$e_h \equiv \sum_{i=1}^{p}\int_{\alpha}^{x_i} du_h + k_h \quad \text{und} \quad e_h \equiv \sum_{i=1}^{p}\int_{\alpha}^{x_i'} du_h + k_h$$

wäre, so würde die Function (1), nämlich $\vartheta\left(\left(\int_{\alpha}^{x} du - e\right)\right)$, nach (IX) sowohl in den p Punkten x_i, wie in den p Punkten x_i' verschwinden. Dies aber widerspricht der Voraussetzung, dass die Function (1) nicht identisch verschwinde; denn nach dieser Voraussetzung kann (1) nur p Nullpunkte haben. (Satz II § 27.)

Zu Satz II tritt die Ergänzung:

(XI) Sind die Bedingungen (3) und (4) erfüllt, so sind die Congruenzen (5) und (6) eindeutig lösbar.

Denn angenommen, es gäbe ausser $\xi_1, \ldots, \xi_{p-1}$ ein zweites System von $p-1$ Punkten $\xi_1', \ldots, \xi_{p-1}'$, das den Congruenzen (5) genügt, so dass gleichzeitig ($h = 1, \ldots, p$):

$$e_h \equiv \sum_{i=1}^{p-1}\int_{\alpha}^{\xi_i} du_h + k_h \quad \text{und} \quad e_h \equiv \sum_{i=1}^{p-1}\int_{\alpha}^{\xi_i'} du_h + k_h,$$

so würde die Function (4) bei beliebig gewähltem y nach (IX) als Function von x sowohl für die p Punkte $y, \xi_1, .., \xi_{p-1}$, wie für die p Punkte $y, \xi_1', .., \xi_{p-1}'$ verschwinden. Dies aber widerspricht der Voraussetzung, dass die Function (4) nicht identisch für jedes x und y verschwinden soll. Ebenso beweist man die eindeutige Lösbarkeit des Systemes (6).

Endlich kommt zu Satz III oder allgemeiner zu IV die Ergänzung:

(XII) Sind die Bedingungen (14) und (15) erfüllt, so ist von den Congruenzen (16) das erste System, nachdem m der Punkte x_i, das zweite, nachdem n der Punkte y_i willkürlich gewählt sind, eindeutig lösbar.

Denn angenommen, es gäbe, nachdem die m letzten Punkte $x_i = a_i$ willkürlich gewählt sind, zwei verschiedene Systeme von $p - n - 1$ Punkten, nämlich $x_1, .., x_{p-n-1}$ und $x_1', .., x_{p-n-1}'$, welche den ersten Congruenzen (16) genügen, so dass gleichzeitig ($h = 1, .., p$):

$$e_h \equiv \sum_{i=1}^{p-n-1} \int_\alpha^{x_i} du_h + \sum_{i=1}^{m} \int_\alpha^{a_i} du_h + k_h$$

und

$$e_h \equiv \sum_{i=1}^{p-n-1} \int_\alpha^{x_i'} du_h + \sum_{i=1}^{m} \int_\alpha^{a_i} du_h + k_h,$$

so würde die Function (15), nämlich

$$\vartheta\left(\left(\int_\alpha^{x} du + \sum_{i=1}^{m} \int_\alpha^{a_i} du - \sum_{i=0}^{n} \int_\alpha^{y_i} du - e\right)\right) \tag{29}$$

als Function von x bei beliebig gewählten Punkten $y_0, .., y_n$ nach Satz (IX) sowohl für die p Punkte $y_0, y_1, .., y_n, x_1, .., x_{p-n-1}$, wie für die p Punkte $y_0, y_1, .., y_n, x_1', .., x_{p-n-1}'$ verschwinden. Dies aber widerspricht der Voraussetzung, dass die Function (29) nicht identisch verschwinden soll. Ebenso beweist man die eindeutige Lösbarkeit des zweiten Systems (16).

Die Sätze X—XII lassen sich endlich noch umkehren; es genügt dies für den allgemeinen Satz XII auszuführen.

(XIII) Ist bei gegebenen Grössen e_h das erste System der Congruenzen (16), nachdem von den Punkten x_i m beliebig gewählt sind, eindeutig lösbar, so ist auch das zweite System der Congruenzen (16), nachdem von den Punkten y_i n beliebig gewählt sind, eindeutig lösbar.

Der Beweis hat wegen (XII) nur zu zeigen, dass, wenn das erste System (16) nach willkürlicher Wahl von m Punkten x_i eindeutig lösbar ist, auch die Bedingungen (14) und (15) erfüllt sind. Man denke sich eine Function von der Form (14), in der die Integrale beliebige, aber voraus bestimmte, obere Grenzen $x_0, .., x_{m-1} = a_0, .., a_{m-1}$ und $y_0, .., y_{n-1} = b_0, .., b_{n-1}$ haben. Trägt man in die so gebildete Function (14) für die e_h das erste System (16), nachdem die in demselben willkürlichen m Punkte x_i gleich $a_0, .., a_{m-1}$ gesetzt sind, ein, so bleibt eine Thetafunction, deren Argumente nur noch $p-1$-gliedrige Summen sind, die also nach Satz IX identisch verschwindet. Betrachtet man dagegen eine Thetafunction der Form (15), die Integrale gebildet mit beliebigen, oberen Grenzen $x_0, .., x_m = a_0, .., a_m$ und $y_0, .., y_n = b_0, .., b_n$ und trägt die Werthe der e_h aus dem ersten System (16) ein, nachdem die m willkürlichen Punkte $x_1, .., x_m$ gleich $a_1, .., a_m$ gesetzt sind, so bleibt eine Thetafunction, deren Argumente ausser $p-1$-gliedrigen Summen noch Integrale mit der oberen Grenze a_0 enthalten und diese Thetafunction verschwindet nicht identisch. Es sind also in der That die Bedingungen (14) und (15) erfüllt und folglich ist auch das zweite System der Congruenzen (16) nach willkürlicher Wahl der n Punkte y_i eindeutig lösbar. (q. e. d.)

Der Satz XIII steht in enger Beziehung zu früheren Untersuchungen; er enthält einen transcendenten Beweis des Riemann-Roch'schen Satzes. Man kann nämlich mit Rücksicht darauf, dass jedes System von Lösungen $x_1, .., x_{p+m-n-1}$ des ersten Systemes (16) mit jedem System von Lösungen $y_1, .., y_{p+n-m-1}$ des zweiten Systemes (16) zusammen die $2p-2$ Punkte einer Φ-Function bilden, den Satz XIII auch so aussprechen:

(XIV) Hat man in der Verzweigungsfläche T oder auf der Curve $F(x, y) = 0$ $p+m-n-1$ Punkte x_i, von welchen noch m Punkte willkürlich sind, und legt man durch dieselben eine Φ-Curve, so sind von den $p+n-m-1$ Restpunkten y_i noch n Punkte willkürlich.

Dieser Satz wird, indem man

$$m = q_2, \quad n = q_1, \quad p+m-n-1 = m_1, \quad p+n-m-1 = m_2$$

setzt, identisch mit dem Riemann-Roch'schen Satze in der Form (II) § 11.

Sechster Abschnitt.

Die Lösung des Umkehrproblems.

Der sechste Abschnitt enthält die Lösung des Jacobi'schen Umkehrproblems. Als Vorbereitung hierzu wird im Anschluss an die Untersuchungen des fünften Abschnitts in § 29 und 30 der Zusammenhang zwischen den Thetafunctionen $\vartheta_\mu(u_1, .., u_p)$ und gewissen algebraischen Wurzelfunctionen $\sqrt{\psi_\mu(x)}$[1]) untersucht, der sich auf die gemeinsamen Nullpunkte dieser Functionen gründet. § 31 gibt alsdann die Grundformeln zur Lösung des Umkehrproblems, § 32 und 33 eine Discussion dieser Formeln.

§ 29. **Die Nullpunkte der Function $\vartheta_\mu(u_1, .., u_p)$. Die Berührungscurven $\psi_\mu = 0$.**

Unter der Voraussetzung, dass $(h = 1, .., p)$:

$$u_h = \int_\alpha^x du_h \tag{1}$$

gesetzt wird, sind die p Nullpunkte $x_1, .., x_p$ der Function

$$\vartheta(u_1 - e_1, .., u_p - e_p) = \vartheta((u - e)) \tag{2}$$

nach (18) § 27 bestimmt durch die Congruenzen $(h = 1, .., p)$:

$$\sum_{i=1}^{p} \int_\alpha^{x_i} du_h \equiv e_h - k_h. \tag{3}$$

Dabei sind $e_1, .., e_p$ gedacht als ein beliebiges Grössensystem von der Beschaffenheit, dass (2) als Function von x nicht identisch verschwindet und es sind die Constanten $k_1, .., k_p$ definirt durch die Gleichungen (17) § 27, also in gewisser Weise abhängig von dem Querschnittsystem

---

1) Wir bezeichnen im Folgenden rationale Functionen ψ der Coordinaten (x, y) des Punktes x kurz durch $\psi(x)$; ersetzen also auch $F(x, y) = 0$ durch $F(x) = 0$ u. s. f.

der Fläche T. Hiernach sind auch die p Punkte x_i von dem Querschnittsystem abhängig. Es ist nun vortheilhaft[1]), die Auswerthung der Constanten k_h dadurch zu umgehen, dass man die Nullpunkte einer Function $\vartheta((u-e))$ für ein bestimmtes Grössensystem e_h und für ein bestimmtes Querschnittsystem als gegeben ansieht. Man wählt hierzu am einfachsten als Querschnittsystem das früher angegebene, kanonische System a, b, c der Fläche T (§ 2 und 3) und nimmt die Grössen e_h sämmtlich gleich 0 an. Dies ist zulässig, da die Function

$$\vartheta(u_1, \ldots, u_p) = \vartheta((u)) \tag{4}$$

als Function von x nicht identisch verschwindet. Wir bezeichnen die von α abhängigen p Nullpunkte dieser Function (4) mit

$$\alpha_1^0, \alpha_2^0, \ldots, \alpha_p^0. \tag{5}$$

Wie sich diese Punkte mit der Lage des Querschnittsystems ändern, ist später zu erörtern (§ 32 und Abschnitt VIII).

Mit Hilfe des Punktsystems (5) bestimmen sich die p Constanten k_h nach (3) bis auf ein System zusammengehöriger Periodicitätsmoduln durch die Congruenzen ($h = 1, \ldots, p$):

$$k_h \equiv -\sum_{i=1}^{p} \int_{\alpha}^{\alpha_i^0} du_h \tag{6}$$

und die p Nullpunkte x_i der Function (2) nach (3) und (6) durch die Congruenzen ($h = 1, \ldots, p$):

$$\sum_{i=1}^{p} \int_{\alpha_i^0}^{x_i} du_h \equiv e_h. \tag{7}$$

Dies gibt den Satz:

(I) Die p Nullpunkte x_i der Function (2) sind für das gewählte Querschnittsystem bestimmt durch die Congruenzen (7);
oder die Function

$$\vartheta\left(\left(\int_{\alpha}^{x} du - \sum_{i=1}^{p} \int_{\alpha_i^0}^{x_i} du\right)\right) \tag{8}$$

verschwindet als Function von x grade in den p Punkten $x_1, \ldots, x_p$.

---

1) Clebsch u. Gordan, Ab. F. S. 195 ff. (1866). Weber, Ab. F. ($p = 3$) S. 74. (1876).

Das System der Punkte α_i^0 (5) ist hier in transcendenter Weise definirt, nämlich als System der Nullpunkte der Function (4). Diese Definition lässt sich durch eine algebraische ersetzen in folgender Weise. Denkt man sich in den Gleichungen (5) § 28 die $p-1$ Punkte ξ_i beliebig gegeben, so sind damit zunächst die Grössen e_h in jenen Gleichungen bestimmt. Durch diese Grössen e_h sind aber weiterhin die $p-1$ Punkte η_i in (6) § 28 bestimmt und zwar eindeutig nach Satz XI § 28. Die $2p-2$ Punkte ξ_i und η_i sind nach (7) § 28 verbunden durch die Gleichungen ($h = 1, .., p$):

$$\sum_{i=1}^{p-1}\int_{\alpha}^{\xi_i} du_h + \sum_{i=1}^{p-1}\int_{\alpha}^{\eta_i} du_h \equiv -2k_h, \tag{9}$$

welche aussagen, dass die oberen Grenzpunkte ξ_i und η_i als irgend $2p-2$ durch eine, $F=0$ adjungirte Curve $\Phi = 0$ des $n-3^{\text{ten}}$ Grades algebraisch verknüpfte Punkte betrachtet werden können. Eliminirt man die Grössen k_h aus den Gleichungen (6) und (9), so folgt ($h = 1, .., p$):

$$\sum_{i=1}^{p-1}\int_{\alpha_i^0}^{\xi_i} du_h + \sum_{i=1}^{p-1}\int_{\alpha_i^0}^{\eta_i} du_h + 2\int_{\alpha_p^0}^{\alpha} du_h \equiv 0. \tag{10}$$

Hieraus ergibt sich nun die algebraische Definition des Punktsystems $\alpha_1^0, .., \alpha_p^0$. Wie die Umkehrung des Abel'schen Theorems (IV § 20) lehrt, existirt eine rationale Function, deren Zähler in der oberen, deren Nenner in den unteren Grenzpunkten der Integrale in (10) verschwindet, während die übrigen Nullpunkte von Zähler und Nenner dieselben sind. Es existiren also zwei, $F=0$ adjungirte Curven gleichen Grades, von denen die erste durch die oberen Grenzpunkte in (10) hindurchgeht, d. h. $F=0$ in $2p-2$ beliebigen, nur durch eine Φ-Curve verknüpften Punkten ξ_i und η_i schneidet und im Punkt α berührt, die zweite durch die unteren Grenzpunkte in (10) hindurchgeht, d. h. $F=0$ in jedem der p Punkte α_i^0 berührt (da jeder dieser Punkte in (10) doppelt auftritt); die übrigen Schnittpunkte beider Curven mit $F=0$ sind dieselben. Die Bildung dieser Curven geschieht nach den Grundsätzen des § 12. Man nehme für die erste dieser Curven eine adjungirte Curve des $n-2^{\text{ten}}$ Grades, nämlich die zerfallende Curve $(\alpha x)\varphi(x)=0$, wo $\varphi(x)=0$ eine ganz beliebige, adjungirte Curve vom $n-3^{\text{ten}}$ Grade ist, und $(\alpha x)=0$ die Tangente von $F=0$ im Punkte α, die also $F=0$ in α berührt und in $n-2$ weiteren Punkten ε schneidet. Dann hat man für die zweite der Curven ebenfalls eine adjungirte Curve vom $n-2^{\text{ten}}$ Grade $\psi(x)=0$ zu nehmen,

die durch die $n-2$ Punkte ε hindurchgeht, und hat die alsdann noch freien, linearen, nicht homogenen p Coefficienten dieser Curve $\psi(x)=0$ so zu bestimmen, dass sich ψ und F noch in p Punkten berühren. Dies ist stets möglich. Da aber die Bedingungen der Berührung algebraisch sind (s. § 32), so ist diese Definition der Curve $\psi=0$ nicht eindeutig; es gibt vielmehr ein endliches System von solchen zu α gehörigen Berührungsfunctionen ψ. Unter ihnen muss sich nach (10) auch diejenige Curve $\psi_0(x)=0$ befinden, die gerade in den p Punkten α_i^0, d. h. den Nullpunkten der Function (4) berührt. Daher der Satz:

(II) Die p Punkte α_i^0 (5) sind definirt, transcendent als die p 0^1 Punkte der Function (4), algebraisch als die p Berührungspunkte einer ganz bestimmten Curve ψ_0 aus dem zu α gehörigen System von Berührungscurven ψ.

Es hat sich hier ein ganzes System von Berührungscurven ψ ergeben; die Definition desselben war algebraisch. Dasselbe System aber erhält man auf transcendentem Wege, wenn man statt $\vartheta(u_1,..,u_p)$ die allgemeine Thetafunction 1. Ordnung mit der zweitheiligen Charakteristik μ $\vartheta_\mu(u_1,..,u_p)$ betrachtet. In § 26 (Gl. 36, 37 und 42) wurde gezeigt, dass jeder zweitheiligen Charakteristik

$$\mu=\begin{bmatrix}\mu_1, .., \mu_p\\ \mu_1', .., \mu_p'\end{bmatrix}$$

ein halbes Periodensystem

$$\frac{1}{2}A_i^\mu=\frac{1}{2}\mu_i'\pi i+\frac{1}{2}\sum_k a_{ik}\mu_k$$

entspricht, und dass die zugehörige Function $\vartheta_\mu(u_1,..,u_p)$ bis auf einen von den Argumenten u_i unabhängigen Factor C dargestellt wird durch

$$(11)\qquad \vartheta_\mu(u_1,..,u_p)=C\cdot\vartheta\left(u_1-\frac{1}{2}A_1^\mu,..,u_p-\frac{1}{2}A_p^\mu\right)e^{-\sum_i \mu_i u_i}.$$

Diese Function ist gerade oder ungrade, je nachdem

$$\sum_{i=1}^p \mu_i\mu_i'\equiv 0 \quad\text{oder}\quad \equiv 1 \pmod 2.$$

Die p 0^1 Punkte $(\alpha_1^\mu, .., \alpha_p^\mu)$ der Function (11) sind nun nach (7) eindeutig bestimmt durch die Congruenzen ($h=1,..,p$):

$$(12)\qquad \sum_{i=1}^p\int_{\alpha_i^0}^{\alpha_i^\mu} du_h\equiv\frac{1}{2}A_h^\mu.$$

Ist μ eine gerade Charakteristik, so verschwindet im Allgemeinen die Function (11) nicht für $x = \alpha$ (oder $u_1, .., u_p = 0, .., 0$) oder die p Punkte $\alpha_1^\mu, .., \alpha_p^\mu$ enthalten nicht den Punkt α.

Ist μ eine ungrade Charakteristik, so verschwindet die Function (11) für $x = \alpha$ (oder $u_1, .., u_p = 0, .., 0$) nach V § 26; es fällt also hier einer der p Punkte α_i^μ, etwa α_p^μ, mit α zusammen; die übrigen $p - 1$ Punkte $\alpha_1^\mu, .., \alpha_{p-1}^\mu$ sind eindeutig bestimmt durch die Congruenzen (12).

Multiplicirt man (12) mit 2, so folgt ($h = 1, .., p$):

$$2\sum_{i=1}^{p}\int_{\alpha_i^0}^{\alpha_i^\mu} du_h \equiv 0. \tag{13}$$

Diese Gleichungen geben nach (IV) § 20 die algebraische Definition der Punktsysteme $\alpha_1^\mu, .., \alpha_p^\mu$. Ist nämlich μ eine gerade Charakteristik, so sind die Punkte $\alpha_1^\mu, .., \alpha_p^\mu$ die p Berührungspunkte einer ganz bestimmten, durch (12), d. h. durch die gerade Charakteristik μ definirten Curve ψ_μ aus dem oben betrachteten, zu α gehörigen Berührungssystem ψ, zu welchem, der Charakteristik $\mu = 0$ entsprechend, auch die Curve ψ_0 gehört. Ist dagegen μ eine ungrade Charakteristik, so sind die $p - 1$ Punkte $\alpha_1^\mu, .., \alpha_{p-1}^\mu$ in Verbindung mit α ebenfalls die Berührungspunkte einer durch (12), d. h. durch die ungrade Charakteristik μ definirten Curve ψ_μ. Offenbar aber zerfällt im letzten Falle die Curve $\psi_\mu = 0$ in die Tangente $(\alpha x) = 0$ und eine von α ganz unabhängige, nur von F abhängige, in $p - 1$ Punkten $\alpha_1^\mu, .., \alpha_{p-1}^\mu$ berührende Curve $\varphi_\mu = 0$ von dem Grade $n - 3$, so dass, wenn μ eine ungrade Charakteristik ist: $\psi_\mu(x) = (\alpha x)\,\varphi_\mu(x)$.

Umgekehrt führen alle bei der algebraischen Bestimmung auftretenden Berührungscurven ψ auf die Gleichungen (13) oder (12) zurück, durch welche jeder solchen Curve ψ_μ eine bestimmte Charakteristik μ zugeordnet wird. Die Zahl der sämmtlichen Curven des Systems ψ ist daher gleich der Gesammtzahl der zweitheiligen Charakteristiken, d. h. $= 2^{2p}$, die Zahl der von α abhängigen Berührungscurven ψ_μ gleich der Zahl der geraden Charakteristiken, d. h. $= 2^{p-1}(2^p + 1)$ und die Zahl der von α unabhängigen Berührungscurven φ_μ gleich der Zahl der ungraden Charakteristiken, d. h. $= 2^{p-1}(2^p - 1)$ (Satz VI § 26).

Man kann die zerfallenden und die nicht zerfallenden Curven des Systemes ψ in einer gemeinsamen Form schreiben und dabei die in den Zählern der Normaldifferentiale 1. Gattung auftretenden Functionen $f_i(x)$ (10) § 15 benutzen. Da jedes ψ durch $p + 1$ linear un-

abhängige, adjungirte Curven vom Grade $n-2$ darstellbar ist (§ 12 Satz Ib), so hat man, wenn

$$(14)\qquad \mu \text{ gerade:}\quad \psi_\mu(x) = a_0^\mu\,\psi_0(x) + (\alpha x)\sum_{i=1}^{p} a_i^\mu f_i(x),$$

$$(15)\qquad \mu \text{ ungrade:}\quad \varphi_\mu(x) = \sum_{i=1}^{p} a_i^\mu f_i(x),$$

so dass im letzten Falle nur $a_0^\mu = 0$ zu setzen und der Factor (αx) zu unterdrücken ist.

Wir fassen das Vorstehende zusammen in dem Satze:

(III) Die p 0^1 Punkte der Function $\vartheta_\mu(u_1, .., u_p)$ mit der zweitheiligen Charakteristik μ sind,

wenn μ gerade ist, die Berührungspunkte einer adjungirten Curve $\psi_\mu = 0$ vom Grade $n-2$;

wenn μ ungrade ist, der Punkt α und die $p-1$ Berührungspunkte einer adjungirten Curve $\varphi_\mu = 0$ vom Grade $n-3$.

Durch diesen Satz ist also jeder Thetafunction $\vartheta_\mu(u_1, .., u_p)$ mit der zweitheiligen Charakteristik μ eine Berührungscurve ψ_μ oder φ_μ mit derselben Charakteristik μ zugeordnet. Diese Zuordnung gilt aber nur für ein bestimmtes, kanonisches Querschnittsystem und ändert sich, wenn dieses durch ein anderes ersetzt wird.

Mit Hilfe der Punkte α_i^μ $(i = 1, .., p)$ lassen sich zugleich die 0^1 Punkte $x_1, .., x_p$ der Function $\vartheta_\mu((u-e))$ oder auch der Function $\vartheta((u - e - \frac{1}{2}A^\mu))$ leicht angeben. Diese Punkte sind nach (7) bestimmt durch die Congruenzen $(h = 1, .., p)$:

$$\sum_{i=1}^{p}\int_{\alpha_i^0}^{x_i} du_h \equiv e_h + \frac{1}{2}A_h^\mu$$

oder wegen (12) durch

$$(16)\qquad \sum_{i=1}^{p}\int_{\alpha_i^\mu}^{x_i} du_h \equiv e_h\,.$$

Daher die Verallgemeinerung von Satz I:

(IV) Die p Nullpunkte x_i der Function $\vartheta_\mu((u-e))$ sind bestimmt durch die Congruenzen (16),

oder die Function

$$\vartheta_\mu\left(\left(\int_\alpha^x du - \sum_{i=1}^p \int_{\alpha_i^\mu}^{x_i} du\right)\right) \tag{17}$$

verschwindet als Function von x gerade in den p Punkten $x_1, \ldots, x_p$.

§ 30. Thetaquotienten und Wurzelfunctionen.

Das Umkehrproblem besteht darin, aus den p Gleichungen $(h = 1, \ldots, p)$:

$$U_h \equiv \sum_{i=1}^p \int_{\alpha_i}^{x_i} du_h \tag{1}$$

die Coordinaten der p oberen Grenzpunkte x_i als Functionen der p-gliedrigen Integralsummen U_h darzustellen, welche Aufgabe nach (X) § 28 im Allgemeinen eindeutig lösbar ist. Die p unteren Grenzpunkte α_i in (1) sind beliebig, eine Veränderung derselben vermehrt die Grössen U_h nur um Constanten.

Wir geben die Lösung des Umkehrproblems (1) nach Riemann in der Weise, dass wir zunächst aus Thetafunctionen mit den speciellen Argumenten $(h = 1, \ldots, p)$:

$$u_h \equiv \int_\alpha^x du_h \tag{2}$$

$2p$-fach periodische Functionen aufbauen, die, als Functionen der Coordinaten des Punktes x betrachtet, mit algebraischen Functionen der Coordinaten von x identisch werden. Ebenso stellen sich dann (§ 31) dieselben $2p$-fach periodischen Functionen mit den allgemeinen Argumenten $U_1, \ldots, U_p$ als algebraische und symmetrische Functionen der Coordinaten der oberen Grenzpunkte x_i in (1) dar. Diese Identitäten zwischen transcendenten und algebraischen Functionen enthalten die Lösung des Umkehrproblems in mannigfacher Form. Dasselbe Verfahren, zuerst Ausdrücke mit den speciellen Argumenten u_h (2) und dann die nämlichen Ausdrücke mit den allgemeinen Argumenten U_h (1) zu bilden, wird auch bei den Darstellungen im siebenten Abschnitt festgehalten.

Wir beginnen mit der Aufstellung der einfachsten Beziehung zwischen Thetafunctionen mit den Argumenten u_h und algebraischen Functionen von x, die unmittelbar aus dem letzten

Satze (IV) § 29 folgt. Sind nämlich μ und ν zwei beliebige, zweitheilige Charakteristiken, so hat der Quotient

$$\vartheta_\mu(u_1, .., u_p) : \vartheta_\nu(u_1, .., u_p), \tag{3}$$

wie sich aus den Eigenschaften der Thetafunction und den Gleichungen (38) § 26 ergibt, als Function der Coordinaten des Punktes x betrachtet, folgende Eigenschaften:

Er ist eindeutig in der Fläche T', die durch die Querschnitte a, b, c aus T entsteht; er wird ferner $= \infty^1$ in den p Berührungspunkten $\alpha_1^\nu, .., \alpha_p^\nu$ der Curve $\psi_\nu = 0$ und $= 0^1$ in den p Berührungspunkten $\alpha_1^\mu, .., \alpha_p^\mu$ der Curve $\psi_\mu = 0$; er nimmt endlich beim Ueberschreiten der Querschnitte a_k und b_k von T' bez. die Factoren an:

$$(-1)^{\mu_k - \nu_k} \quad \text{und} \quad (-1)^{\mu'_k - \nu'_k}. \tag{4}$$

Hiernach ist das Quadrat der Function (3) eine Function der Coordinaten von x, die an den Querschnitten a, b, c von T' die Factoren 1 annimmt, die also in T selber stetig und ausserdem regulär ist. Eine solche Function ist aber nach (I) § 6 eine rationale Function der Coordinaten von x. Da sie ausserdem in denselben Punkten 0^2 und ∞^2 wird wie $\psi_\mu(x) : \psi_\nu(x)$, so kann sie sich von dieser Function nur um eine von x unabhängige Constante $c_{\mu\nu}^2$ unterscheiden (Ib. § 6). Man hat daher die fundamentale Gleichung[1]):

$$\frac{\vartheta_\mu(u_1, .., u_p)}{\vartheta_\nu(u_1, .., u_p)} = c_{\mu\nu} \sqrt{\frac{\psi_\mu(x)}{\psi_\nu(x)}}. \tag{5}$$

In derselben ist jedesmal $\psi_\mu(x)$ von der zerfallenden Form $(\alpha x)\,\varphi_\mu(x)$, wenn μ eine ungrade Charakteristik ist; das entsprechende gilt von $\psi_\nu(x)$. Die Gleichung (5) gibt zunächst Anlass zu algebraischen Betrachtungen.

Man nennt den Ausdruck $\sqrt{\psi_\mu(x)}$ eine Wurzelfunction. Bei gegebenem, kanonischen Querschnittsystem der Fläche T besteht nach § 29 eine eindeutige Zuordnung zwischen den Thetafunctionen $\vartheta_\mu((u))$ und den Berührungscurven $\psi_\mu(x) = 0$ oder den Wurzelfunctionen $\sqrt{\psi_\mu(x)}$; man kann sagen, die Functionen $\vartheta_\mu((u))$ und $\sqrt{\psi_\mu(x)}$ sind beide derselben zweitheiligen Charakteristik μ zugeordnet. Ebenso sind die Quotienten auf beiden Seiten in (5) der Differenz $\mu - \nu$ der Charakteristiken μ und ν zugeordnet. Diese letztere Zuordnung hat noch den geometrischen Sinn, dass die aus den Elementen der Cha-

---

1) Riemann, Ges. W. S. 134 und 457. Roch, Journ. für Math. Bd. 66 S. 104. Die Wurzelformen $\sqrt{\varphi_\nu}$ mit ungrader Charakteristik ν nennt Riemann „Abel'sche Functionen".

rakteristik $\mu - \nu$ gebildeten Werthe (4) die Factoren angeben, welche die Quotienten in (5) an den gewählten Querschnitten a, b annehmen.

Man kann sich auch die Zuordnung der Berührungscurven $\psi_\mu(x) = 0$ oder der Wurzelfunctionen $\sqrt{\psi_\mu(x)}$ zu den Charakteristiken μ bei gegebenem Querschnittsystem a, b ohne Benutzung der Thetafunctionen hergestellt denken. Man bestimme auf algebraischem Wege (s. § 32) das in § 29 definirte System der Berührungscurven $\psi_\mu(x) = 0$ und bilde aus ihm alle möglichen Quotienten $\sqrt{\psi_\mu(x)} : \sqrt{\psi_\nu(x)}$ mit demselben Nenner $\sqrt{\psi_\nu(x)}$, aber verschiedenen Zählern $\sqrt{\psi_\mu(x)}$. Dann ermittele man für sie die Factoren (4) an den Querschnitten a_k, b_k von T', indem man jeden solchen Quotienten von einem Punkte in T' ausgehend über die Fläche T' fortsetzt. Damit kennt man die zu jedem solchen Quotienten gehörige Charakteristik $\mu - \nu$. Man hat jetzt noch diejenige Charakteristik ν zu ermitteln, welche die Eigenschaft hat, dass ihre Addition zu den Charakteristiken $\mu - \nu$ eine gerade Charakteristik μ ergibt, wenn die zugehörige Zählerfunction $\psi_\mu(x)$ eine eigentliche Berührungsfunction des $n - 2^{\text{ten}}$ Grades ist und eine ungrade Charakteristik μ, wenn $\psi_\mu(x)$ eine zerfallende Function $(\alpha x)\,\varphi_\mu(x)$ ist. Damit hat man auch zu jeder Wurzelfunction $\sqrt{\psi_\mu(x)}$ die zugehörige Charakteristik μ. Dass es nur eine solche, zu addirende Charakteristik ν gibt, folgt daraus, dass die Zuordnung der Berührungsfunctionen ψ_μ zu den Thetafunctionen ϑ_μ oder auch zu den Charakteristiken μ bei gegebenem Querschnittsystem nach § 29 eine eindeutige ist.

Die Zuordnung der Thetafunctionen und Wurzelfunctionen zu den Charakteristiken gibt Anlass, die Operationen der Multiplication und Division mit Thetafunctionen oder Wurzelfunctionen abkürzend durch die Operationen der Addition und Subtraction an den zugehörigen Charakteristiken zu ersetzen. Wir machen sogleich Gebrauch von diesem Verfahren bei dem Beweis der folgenden zwei Sätze über Wurzelfunctionen[1]). Dabei soll ein Product von ϱ einfachen Wurzelfunctionen mit beliebigen Charakteristiken μ_1, μ_2, . ., μ_ϱ, also der Ausdruck:

$$\sqrt{\psi_{\mu_1}\,\psi_{\mu_2}\,\cdot\,\cdot\,\psi_{\mu_\varrho}} \tag{6}$$

ebenfalls als Wurzelfunction bezeichnet und derselben die Charakteristik

$$\mu_1\mu_2\,\cdot\,\cdot\,\mu_\varrho \tag{6a}$$

d. h. die Summe der Charakteristiken $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_\varrho$ zugeordnet werden.

1) Das Princip der Herleitung und einfache Beispiele solcher Sätze über Wurzelfunctionen finden sich bei Riemann (Ges. W. S. 456 ff.), vgl. auch Roch, Journ. für Math. Bd. 66 S. 106 ff. (1864), Weber, Ab. F. ($p = 3$) S. 110 ff. u. A.

Der erste Satz bezieht sich auf die linearen Relationen, die zwischen Producten von der Form (6) bestehen. Bildet man eine Reihe solcher Producte von je ϱ Wurzelfunctionen mit jedesmal anderen Charakteristiken $(\mu_1^i, \ldots, \mu_\varrho^i)$ $(i = 1, 2, \ldots)$, jedoch so, dass die Summe der Charakteristiken für alle diese Producte dieselbe ist, oder dass

$$(7) \qquad (\mu_1' \cdots \mu_\varrho') \equiv (\mu_1'' \cdots \mu_\varrho'') \equiv \cdots \pmod 2,$$

so gilt der Satz:

(I) Es besteht zwischen je $p(\varrho - 1) + 2$ allgemeinen Wurzelfunctionen der Form (6) mit derselben Charakteristik (7) mindestens eine lineare, homogene Relation der Form

$$(8) \qquad \sum_{i=1}^{p(\varrho-1)+2} l_i \sqrt{\psi_{\mu_1^i} \cdots \psi_{\mu_\varrho^i}} = 0;$$

oder, eine Wurzelfunction der Form (6) lässt sich stets durch ein Aggregat von höchstens $p(\varrho - 1) + 1$ linear unabhängigen Functionen von derselben Form und derselben Charakteristik darstellen.

In der That, man dividire jedes Glied auf der linken Seite von (8) durch $\sqrt{\psi_{\nu_1} \cdots \psi_{\nu_\varrho}}$, wo $\nu_1, \ldots, \nu_\varrho$ ϱ Charakteristiken von der Beschaffenheit sind, dass $(\nu_1 \ldots \nu_\varrho)$ congruent mit den Charakteristiken (7) ist; dann ist der Quotient des i^{ten} Gliedes eine rationale Function von x, da die Factoren an den Querschnitten a, b von T' nach (4) sämmtlich $= 1$ werden, und diese Function ist von der Ordnung ϱp oder sie hat ϱp 0^1 Punkte (die Berührungspunkte der Curven $\psi_{\mu_1^i} = 0, \ldots, \psi_{\mu_\varrho^i} = 0$) und ϱp ∞^1 Punkte (die Berührungspunkte der Curven $\psi_{\nu_1} = 0, \ldots, \psi_{\nu_\varrho} = 0$). Nach (Ib) § 12 aber besteht zwischen je $\varrho p - p + 2$ rationalen Functionen der Ordnung ϱp mindestens eine lineare, homogene Gleichung. Lässt man den gemeinsamen Nenner $\sqrt{\psi_{\nu_1} \ldots \psi_{\nu_\varrho}}$ weg, so hat man die Gleichung (8). (q. e. d.)

Am einfachsten sind die Relationen (8) für $\varrho = 2$. Unterscheidet man die einer geraden Charakteristik μ zugeordnete Berührungsfunction ψ_μ des $n - 2^{\text{ten}}$ Grades von der einer ungraden Charakteristik ν zugeordneten Berührungsfunction φ_ν des $n - 3^{\text{ten}}$ Grades, so erhält man als speciellen Fall von (8) die Relationen

$$(9) \qquad \sum_{i=1}^{p+2} \alpha_i \sqrt{\psi_{\mu_1^i} \psi_{\mu_2^i}} = 0, \quad \sum_{i=1}^{p+1} \beta_i \sqrt{\psi_{\mu_1^i} \varphi_{\nu_1^i}} = 0, \quad \sum_{i=1}^{p} \gamma_i \sqrt{\varphi_{\nu_1^i} \varphi_{\nu_2^i}} = 0,$$

wo α_i, β_i, γ_i constante Coefficienten sind und vorausgesetzt ist, dass die zusammengesetzten Charakteristiken $\mu_1{}^i \mu_2{}^i$ oder $\mu_1{}^i \nu_1{}^i$ oder $\nu_1{}^i \nu_2{}^i$ für alle Glieder einer Summe einander congruent sind (mod 2). Der

Die Darstellung (16) lässt sich geometrisch interpretiren[1]) und gibt den Satz:

(IIa) Wenn die Summe einer geraden Anzahl $2\lambda+2$ von geraden Charakteristiken μ congruent 0 (mod 2) ist, so berühren die zugehörigen Curven $\psi_\mu = 0$ ausser $F=0$ noch sämmtlich eine bestimmte Curve $\mathsf{P}_1 = 0$, wo sie derselben begegnen. Die sämmtlichen Berührungspunkte der Curven $\psi_\mu = 0$ mit $F=0$ und mit $\mathsf{P}_1 = 0$ liegen auf ein und derselben, bestimmten Curve $\mathsf{P}=0$ vom Grade $(\lambda+1)(n-2)$ in x.

Bei dieser Fassung ist von den Doppelpunkten δ und den Punkten ε von $F=0$, durch welche ebenfalls die Curven $\psi_\mu = 0$, $\mathsf{P}=0$ und $\mathsf{P}_1 = 0$ hindurchgehen, abgesehen.

Die vorstehende Betrachtung erfährt eine leichte Abänderung, wenn sich unter (11) ungrade Charakteristiken befinden. Dann geht jede Function $\psi_\nu(x)$ mit ungrader Charakteristik ν über in $(\alpha x)\varphi_\nu(x)$ (§ 29). In Folge dessen tritt eine Reduction der Gleichung (16) oder (17) ein, indem auf der linken Seite Factoren der Form (αx) ausscheiden und entsprechend der Grad von P und P_1 sich erniedrigt.

Hat man insbesondere $2\lambda+2$ ungrade Charakteristiken $\nu_0, .., \nu_{2\lambda+1}$, deren Summe $\equiv 0$ (mod 2) und bezeichnet man die zugehörigen Berührungscurven φ_ν mit $\varphi_{\nu_0}, .., \varphi_{\nu_{2\lambda+1}}$ und die Systeme von Berührungspunkten derselben mit $\alpha_i^{\nu_0}, .., \alpha_i^{\nu_{2\lambda+1}}$ $(i = 1, .., p-1)$, so scheidet in (16) der Factor $(\alpha x)^{2\lambda+2}$ aus und an Stelle von (16) und (17) treten die Gleichungen

$$\left.\begin{array}{c} \varphi_{\nu_0}\varphi_{\nu_1}\cdot\cdot\varphi_{\nu_{2\lambda+1}} = \mathsf{P}^2 + \mathsf{P}_1 F \\ \text{oder} \\ \sqrt{\varphi_{\nu_0}\varphi_{\nu_1}\cdot\cdot\varphi_{\nu_{2\lambda+1}}} \equiv \mathsf{P}(x, \alpha_i^{\nu_0}, .., \alpha_i^{\nu_{2\lambda}}). \end{array}\right\} \quad (18)$$

Hier wird also das Product der $2\lambda+2$ Wurzelfunctionen $\sqrt{\varphi_{\nu_i}}$ mit Hilfe von $F=0$ gleich einer ganzen, rationalen Function P in x vom Grade $(\lambda+1)(n-3)$, deren Coefficienten die Coordinaten des Punktes α nicht mehr enthalten. Die Function P lässt sich als homogene Function der $(\lambda+1)^{\text{ten}}$ Dimension in Functionen des Berührungssystemes φ_ν darstellen; die Function P_1 ist vom Grade $(2\lambda+2)(n-3)-n$ in x. Daher der Satz:

---

1) Berührungssätze dieser und allgemeinerer Art (vgl. § 35 Satz IIIa) sind von Clebsch (Journ. für Math. Bd. 63, S. 189 ff.) in grosser Zahl mittels des Abel'schen Theorems abgeleitet worden. Die obige Beweisführung ist der von Clebsch benutzten nahe verwandt; sie beruht, wie diese, auf der Rechnung mit Charakteristiken.

Denn dividirt man den Ausdruck (15) durch $\sqrt{\psi_\mu^{2\lambda+2}} = \psi_\mu^{\lambda+1}$, wo ψ_μ die zu einer beliebigen Charakteristik μ gehörige Berührungsfunction ist, so ist der Quotient eine rationale Function, weil er nach (14) und nach (4) an den Querschnitten a_k und b_k von T' die Factoren 1 hat. Da nun der Nenner $\psi_\mu^{\lambda+1}$ für sich eine ganze, rationale Function vom Grade $(\lambda+1)(n-2)$ in x (d. h. in den Coordinaten des Punktes x) ist, so muss auch der Zähler, d. i. die Function (15) eine ganze, rationale Function sein und sich mit Hilfe von $F=0$ ebenfalls auf den Grad $(\lambda+1)(n-2)$ in x bringen lassen. (q. e. d.)

Um (15) in der letztgenannten Form darzustellen, bilde man eine allgemeine Curve $\mathsf{P}(x)=0$ von dem Grade $(\lambda+1)(n-2)$ in x, welche durch jeden der r Doppelpunkte δ von $F=0$ und durch jeden der $n-2$ Schnittpunkte ε der Tangente (αx) des Punktes α mit $F=0$ je $(\lambda+1)$-fach hindurchgeht. Nach dieser Bestimmung setzt sich (nach § 11 und 12) die Function P linear und homogen mit unbestimmten Coefficienten zusammen aus $(2\lambda+1)p+1$ unabhängigen Functionen derselben Art, die ihrerseits vollkommen bestimmt sind und deren Coefficienten die Coefficienten von $F=0$ und die Coordinaten des Punktes α in rationaler Weise enthalten. Die Curve $\mathsf{P}=0$ muss ferner $F=0$ in den $2\lambda+2$ Systemen von Berührungspunkten (13) schneiden. Zur Bestimmung der $(2\lambda+1)p$ noch willkürlichen, nicht homogenen Coefficienten in P sind aber die $2\lambda+1$ ersten Punktsysteme (13) gerade ausreichend, da die p letzten Nullpunkte einer ganzen, rationalen Function durch die übrigen bereits bestimmt sind (I § 12). Die Coefficienten in P sind also rationale und symmetrische Functionen von jedem der $(2\lambda+1)$ ersten Punktsysteme (13). Bezeichnet man die so gebildete Function genauer durch $\mathsf{P}(x, \alpha_i^{\mu_0}, \ldots, \alpha_i^{\mu_{2\lambda}})$, so hat man die Gleichung:

$$(16) \qquad \psi_{\mu_0}\psi_{\mu_1} \cdots \psi_{\mu_{2\lambda+1}} = \mathsf{P}^2 + \mathsf{P}_1 F,$$

die wir abgekürzt schreiben:

$$(17) \qquad \sqrt{\psi_{\mu_0}\psi_{\mu_1} \cdots \psi_{\mu_{2\lambda+1}}} \equiv \mathsf{P}(x, \alpha_i^{\mu_0}, \ldots, \alpha_i^{\mu_{2\lambda}}).$$

Die Function P ist vom Grade $(\lambda+1)(n-2)$ in x und lässt sich, wie aus ihrer Bildung hervorgeht, darstellen als homogene Function der $(\lambda+1)^{\text{ten}}$ Dimension in Functionen des Berührungssystems ψ_μ. Die Function P_1 in (16) ist vom Grade $(2\lambda+2)(n-2)-n$ in x und wird nach (16) für jeden Doppelpunkt δ von $F=0$ gleich $0^{2\lambda}$, für jeden der Punkte ε gleich $0^{2\lambda+1}$.

Die Darstellung (16) lässt sich geometrisch interpretiren[1]) und gibt den Satz:

(IIa) Wenn die Summe einer geraden Anzahl $2\lambda + 2$ von geraden Charakteristiken μ congruent 0 (mod 2) ist, so berühren die zugehörigen Curven $\psi_\mu = 0$ ausser $F = 0$ noch sämmtlich eine bestimmte Curve $\mathsf{P}_1 = 0$, wo sie derselben begegnen. Die sämmtlichen Berührungspunkte der Curven $\psi_\mu = 0$ mit $F = 0$ und mit $\mathsf{P}_1 = 0$ liegen auf ein und derselben, bestimmten Curve $\mathsf{P} = 0$ vom Grade $(\lambda + 1)(n - 2)$ in x.

Bei dieser Fassung ist von den Doppelpunkten δ und den Punkten ε von $F = 0$, durch welche ebenfalls die Curven $\psi_\mu = 0$, $\mathsf{P} = 0$ und $\mathsf{P}_1 = 0$ hindurchgehen, abgesehen.

Die vorstehende Betrachtung erfährt eine leichte Abänderung, wenn sich unter (11) ungrade Charakteristiken befinden. Dann geht jede Function $\psi_\nu(x)$ mit ungrader Charakteristik ν über in $(\alpha x)\varphi_\nu(x)$ (§ 29). In Folge dessen tritt eine Reduction der Gleichung (16) oder (17) ein, indem auf der linken Seite Factoren der Form (αx) ausscheiden und entsprechend der Grad von P und P_1 sich erniedrigt.

Hat man insbesondere $2\lambda + 2$ ungrade Charakteristiken $\nu_0, .., \nu_{2\lambda+1}$, deren Summe $\equiv 0$ (mod 2) und bezeichnet man die zugehörigen Berührungscurven φ_ν mit $\varphi_{\nu_0}, .., \varphi_{\nu_{2\lambda+1}}$ und die Systeme von Berührungspunkten derselben mit $\alpha_i^{\nu_0}, .., \alpha_i^{\nu_{2\lambda+1}}$ $(i = 1, .., p - 1)$, so scheidet in (16) der Factor $(\alpha x)^{2\lambda+2}$ aus und an Stelle von (16) und (17) treten die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} \varphi_{\nu_0}\varphi_{\nu_1}\cdot\cdot\varphi_{\nu_{2\lambda+1}} &= \mathsf{P}^2 + \mathsf{P}_1 F \\ \text{oder} \qquad \sqrt{\varphi_{\nu_0}\varphi_{\nu_1}\cdot\cdot\varphi_{\nu_{2\lambda+1}}} &\equiv \mathsf{P}(x, \alpha_i^{\nu_0}, .., \alpha_i^{\nu_{2\lambda}}). \end{aligned}\right\} \qquad (18)$$

Hier wird also das Product der $2\lambda + 2$ Wurzelfunctionen $\sqrt{\varphi_{\nu_i}}$ mit Hilfe von $F = 0$ gleich einer ganzen, rationalen Function P in x vom Grade $(\lambda + 1)(n - 3)$, deren Coefficienten die Coordinaten des Punktes α nicht mehr enthalten. Die Function P lässt sich als homogene Function der $(\lambda + 1)^{\text{ten}}$ Dimension in Functionen des Berührungssystemes φ_ν darstellen; die Function P_1 ist vom Grade $(2\lambda + 2)(n - 3) - n$ in x. Daher der Satz:

---

1) Berührungssätze dieser und allgemeinerer Art (vgl. § 35 Satz IIIa) sind von Clebsch (Journ. für Math. Bd. 63, S. 189 ff.) in grosser Zahl mittels des Abel'schen Theorems abgeleitet worden. Die obige Beweisführung ist der von Clebsch benutzten nahe verwandt; sie beruht, wie diese, auf der Rechnung mit Charakteristiken.

(IIb) Wenn die Summe einer geraden Anzahl $2\lambda + 2$ von ungraden Charakteristiken ν congruent 0 ist (mod 2), so berühren die zugehörigen Curven $\varphi_\nu = 0$ ausser $F = 0$ noch sämmtlich eine bestimmte Curve $\mathsf{P}_1 = 0$, wo sie derselben begegnen und die sämmtlichen Berührungspunkte der Curven φ_ν mit F und P_1 liegen auf ein und derselben, bestimmten Curve P vom Grad $(\lambda + 1)(n - 3)$ in x.

§ 31. Lösung des Umkehrproblems.

Im Anfang von § 30 wurde bemerkt, die Lösung des in den Gleichungen (1) § 30 enthaltenen Umkehrproblems geschehe dadurch, dass man Beziehungen herstellt zwischen Thetaquotienten mit den allgemeinen Argumenten $U_1, .., U_p$ und zwischen algebraischen und symmetrischen Functionen der p Punkte $x_1, .., x_p$, analog der Beziehung (5) § 30, die zwischen den speciellen Argumenten $u_1, .., u_p$ und den Coordinaten des Punktes x besteht, wenn diese Elemente durch die Gleichungen (2) § 30 verbunden sind.

Wir verallgemeinern indess die Betrachtung, indem wir an Stelle von (1) § 30 die Gleichungen setzen ($h = 1, .., p$):

$$(1) \qquad V_h = \sum_{k=0}^{q} \int_{\alpha_k}^{x_k} du_h = \sum_{k=0}^{q} \int_{\varepsilon}^{x_k} du_h - \sum_{k=0}^{q} \int_{\varepsilon}^{\alpha_k} du_h,$$

wo q eine beliebige Zahl, $x, x_1, .., x_q$ und $\alpha, \alpha_1, .., \alpha_q$ zwei Systeme von je $q + 1$ beliebigen Punkten sind[1]). Die letzte Form in (1), in der ε ein beliebiger Punkt ist, zeigt, dass V_h sowohl für die oberen Grenzpunkte x_k, wie für die unteren Grenzpunkte α_k symmetrisch gebildet ist. Die Aufgabe ist nun, Thetaquotienten mit den Argumenten $V_1, .., V_p$ als algebraische und symmetrische Functionen der Coordinaten sowohl der oberen Grenzpunkte x_k, wie der unteren α_k darzustellen. Wir untersuchen, wie früher den speciellen Ausdruck (3) § 30, so jetzt den entsprechend gebildeten, allgemeinen Ausdruck

$$(2) \qquad \vartheta_\mu(V_1, .., V_p) : \vartheta_\nu(V_1, .., V_p),^{2})$$

der ebenso wie in den $q + 1$ Punkten x_k, auch in den $q + 1$ Punkten α_k symmetrisch gebildet ist. Der Ausdruck (2) hat, wenn er zunächst nur als Function von x betrachtet wird, ähnliche Eigenschaften,

1) Die in (1) auftretenden Punkte α_0 und x_0 sollen mit α und x identisch sein.

2) Riemann, Ges. W. S. 134. H. Stahl, Journ. für Math. Bd. 111, S. 98 ff. 1892).

wie der frühere, specielle Thetaquotient. Er ist eindeutig in T', hat an den Querschnitten a_k und b_k ebenfalls die Factoren

$$(-1)^{\mu_k - \nu_k} \quad \text{und} \quad (-1)^{\mu'_k - \nu'_k} \tag{3}$$

und wird $= 0^1$ in p Punkten $y_1, \ldots, y_p$ und $= \infty^1$ in p Punkten $z_1, \ldots, z_p$, die nach Satz IV § 29 bestimmt sind durch die Congruenzen $(h = 1, \ldots, p)$:

$$\sum_{i=1}^{p} \int_{\alpha_i^\mu}^{y_i} du_h + \sum_{k=1}^{q} \int_{\alpha_k}^{x_k} du_h \equiv 0, \quad \sum_{i=1}^{p} \int_{\alpha_i^\nu}^{z_i} du_h + \sum_{k=1}^{q} \int_{\alpha_k}^{x_k} du_h \equiv 0. \tag{4}$$

Der Ausdruck (2) hat ferner, wenn man ihn als Function von irgend einem anderen der Punkte x_k in (1) betrachtet, genau dieselben Factoren (3) an den Querschnitten, wie als Function von x und wird ebenfalls in je p Punkten $= 0^1$ und $= \infty^1$. Ist daher S irgend eine algebraische, wie T' verzweigte Function von x allein, die an den Querschnitten a_k, b_k ebenfalls die Factoren (3) annimmt und bezeichnet S_k den Werth dieser Function für $x = x_k$, so ist der darzustellende Ausdruck (2), dividirt durch das Product $S S_1 \ldots S_q$ eine rationale Function der Coordinaten eines jeden der Punkte $x, x_1, \ldots, x_q$. Bezeichnet man diese rationale Function mit R, so ist die Function (2) dargestellt in der Form[1]):

$$R\, S\, S_1 \ldots S_q. \tag{5}$$

Wir setzen nun für S die einfachste Function, die möglich ist, nämlich

$$S = \sqrt{\frac{\psi_\mu(x)}{\psi_\nu(x)}}. \tag{6}$$

Dann ist, wie die Vergleichung von (2) mit (5) ergibt, die rationale Function R in (5) folgendermassen bestimmt. Als Function von x betrachtet, wird $R = 0^1$ in den p Punkten α_i^ν (in denen $S = \infty^1$ wird) und $= \infty^1$ in den p Punkten α_i^μ (in denen $S = 0^1$ wird). Sie ist ferner $= 0^1$ in den p 0^1 Punkten y_i und $= \infty^1$ in den p ∞^1 Punkten z_i der Function (2), welche Punkte bestimmt sind durch die Congruenzen (4). In ähnlicher Weise, wie als Function von x, ist R als Function von jedem der anderen oberen Grenzpunkte $x_1, \ldots, x_q$ in (1) definirt.

Um die rationale Function R darzustellen, bilden wir sie zunächst als Function von x aus den angegebenen 0^1 und ∞^1 Punkten

---

1) Riemann, Ges. W. S. 135 Anmerkung.

nach der Methode des § 12. Dabei braucht man aber die Punkte y_i und z_i selber gar nicht zu kennen. Diese Punkte lassen sich vielmehr nach (4) ersetzen durch die q Punkte $x_1, .., x_q$. Man lege durch die r Doppelpunkte δ von $F = 0$, durch die p Punkte α_i^μ und die q Punkte $\alpha_1, .., \alpha_q$ eine Curve von hinreichend hohem Grade $\Psi_\mu(x) = 0$. Diese Curve wird $F = 0$ noch in einer Anzahl weiterer Punkte $\xi_1, .., \xi_t$ schneiden. Legt man nun durch die r Punkte δ und durch die t Punkte ξ eine Curve desselben Grades, so hat diese noch q lineare, nicht homogene Coefficienten oder noch q willkürliche 0^1 Punkte. Wählt man für diese die q Punkte $x_1, .., x_q$, so sind die p letzten 0^1 Punkte wegen (4) nach den Sätzen IV § 20 und I § 12 gerade noch die p Punkte y_i. Bezeichnet man die gebildete Curve mit $\Psi_\mu(x, x_1, .., x_q) = 0$, so wird der Quotient $\Psi_\mu(x, x_1, .., x_q) : \Psi_\mu(x)$ als Function von x

$= 0^1$ in den p Punkten $y_1, .., y_p$ und den q Punkten $x_1, .., x_q$,

$= \infty^1$ in den p Punkten $\alpha_1^\mu, .., \alpha_p^\mu$ und den q Punkten $\alpha_1, .., \alpha_q$.

Entsprechend bestimme man zwei Curven $\Psi_\nu(x)$ und $\Psi_\nu(x, x_1, .., x_q)$ von demselben Grade wie die vorigen, nur mit Benutzung der p Punkte α_i^ν statt α_i^μ, und t anderen Hilfspunkten $\xi_1', .., \xi_t'$, so dass der Quotient $\Psi_\nu(x, x_1, .., x_q) : \Psi_\nu(x)$

$= 0^1$ in den p Punkten $z_1, .., z_p$ und den q Punkten $x_1, .., x_q$,

$= \infty^1$ in den p Punkten $\alpha_1^\nu, .., \alpha_p^\nu$ und den q Punkten $\alpha_1, .., \alpha_q$

wird. Nunmehr hat der Ausdruck

$$(7) \qquad \frac{\Psi_\mu(x, x_1, .., x_q)}{\Psi_\nu(x, x_1, .., x_q)} \frac{\Psi_\nu(x)}{\Psi_\mu(x)},$$

als Function von x betrachtet, dieselben 0^1 und ∞^1 Punkte wie die Function R, stimmt also nach Satz Ib § 6 mit R bis auf einen von x unabhängigen, dagegen von $x_1, .., x_q$ noch abhängigen Factor überein. Um die Function R, die in den $q + 1$ Punkten $x, x_1, .., x_q$ symmetrisch ist, wie aus der Vergleichung von (2) und (5) hervorgeht, vollständig zu erhalten, hat man offenbar den Ausdruck (7) nur durch Zufügung eines von x unabhängigen Factors ebenfalls in den Punkten $x, x_1, .., x_q$ symmetrisch zu machen. Man erhält so für R den Ausdruck

$$(8) \qquad R = C_{\mu\nu} \frac{\Psi_\mu(x, x_1, .., x_q)}{\Psi_\nu(x, x_1, .., x_q)} \prod_{k=0}^{q} \frac{\Psi_\nu(x_k)}{\Psi_\mu(x_k)},$$

wo nunmehr $C_{\mu\nu}$ eine von $x, x_1, .., x_q$ unabhängige Constante ist.

Trägt man die Werthe (6) und (8) in (5) ein, so hat man für den Thetaquotienten (2) folgende Darstellung[1]):

$$\frac{\vartheta_\mu(V_1, .., V_p)}{\vartheta_\nu(V_1, .., V_p)} = C_{\mu\nu} \frac{\Psi_\mu(x, x_1, .., x_q)}{\Psi_\nu(x, x_1, .., x_q)} \prod_{k=0}^{q} \frac{\Psi_\nu(x_k)}{\Psi_\mu(x_k)} \sqrt{\frac{\psi_\mu(x_k)}{\psi_\nu(x_k)}}. \quad (9)$$

Zur Bestimmung der Constanten $C_{\mu\nu}$ wähle man (wenn $q \gtreqless p$) eine Charakteristik λ so, dass $\lambda\mu$ und $\lambda\nu$ gerade Charakteristiken sind und setze in (9) $x, x_1, .., x_q$ einmal gleich $\alpha_0^\lambda, \alpha_1^\lambda, .., \alpha_q^\lambda$, das andere mal gleich $\alpha_0^{\lambda\mu\nu}, \alpha_1^{\lambda\mu\nu}, .., \alpha_q^{\lambda\mu\nu}$, wo die Punkte α_k^λ und $\alpha_k^{\lambda\mu\nu}$ $(k = 0, .., q)$ den Congruenzen genügen:

$$\sum_{k=0}^{q} \int_{\alpha_k}^{\alpha_k^\lambda} du_h \equiv \tfrac{1}{2} A_h^\lambda, \quad \sum_{k=0}^{q} \int_{\alpha_k}^{\alpha_k^{\lambda\mu\nu}} du_h \equiv \tfrac{1}{2} (A_h^\lambda + A_h^\mu + A_h^\nu), \quad (10)$$

während $\frac{1}{2} A_h^\lambda$, $\frac{1}{2} A_h^\mu$, $\frac{1}{2} A_h^\nu$ halbe Periodensysteme sind, die den Charakteristiken λ, μ, ν entsprechen (vgl. (36) § 26). Dann erhält man durch die beiden Substitutionen nach (40) § 26 aus (9) Gleichungen von der Form:

$$\frac{\vartheta_{\lambda\mu}}{\vartheta_{\lambda\nu}} = \frac{C_{\mu\nu}}{P_{\nu\mu}} \quad \text{und} \quad \frac{\vartheta_{\lambda\nu}}{\vartheta_{\lambda\mu}} = \frac{C_{\mu\nu}}{P_{\mu\nu}}, \quad (11)$$

wo $P_{\nu\mu}$ und $P_{\mu\nu}$ vollkommen bestimmte, algebraische Ausdrücke sind, symmetrisch für jedes einzelne System der Punkte $\alpha_k, \alpha_k^\lambda, \alpha_k^{\lambda\mu\nu}$. Durch Multiplication und Division ergibt sich aus (11):

$$\frac{\vartheta_{\lambda\mu}^2}{\vartheta_{\lambda\nu}^2} = \frac{P_{\mu\nu}}{P_{\nu\mu}} \quad \text{und} \quad C_{\mu\nu}^2 = P_{\mu\nu} P_{\nu\mu}. \quad (12)$$

Hierdurch ist $C_{\mu\nu}$ bis auf das Vorzeichen bestimmt. Das letztere ist durch directe Vergleichung der beiden Seiten in (9) zu ermitteln. Durch Einführung von $C_{\mu\nu}$ in (9) muss die rechte Seite dieser Gleichung auch in den $q+1$ Punkten α_k symmetrisch werden, da dies für die linke Seite bereits zutrifft. Das Vorstehende, zusammengefasst, gibt den Satz:

(I) Der Quotient zweier Thetafunctionen mit beliebigen, zweitheiligen Charakteristiken μ und ν, deren Argumente Integralsummen 1. Gattung mit einer beliebigen Zahl $q+1$ von Gliedern und mit beliebigen oberen und unteren Grenzpunkten x_k und α_k $(k = 0, 1, .., q)$ sind, lässt sich

1) H. Stahl, l. c. S. 104.

symmetrisch in den Coordinaten dieser zwei Punktsysteme darstellen durch rationale Functionen in Verbindung mit Quadratwurzeln aus solchen Functionen.

Dieser Satz wird in § 35 bedeutend verallgemeinert.

Aus der Gleichung (9) lassen sich in mehrfacher Weise specielle Formeln ableiten. Dabei kann man, wenn q besondere Werthe hat und die bisher willkürlichen, untern Grenzpunkte $\alpha_0, \alpha_1, .., \alpha_q$ der Integrale in (1) passend gewählt werden, die rationalen Functionen in (9) auch durch Wurzelfunctionen ersetzen. Die zwei einfachsten Fälle sind folgende.

Erstens sei $q = p$ und $\alpha_1, .., \alpha_p = \alpha_1^0, .., \alpha_p^0$, d. h. = den 0^1 Punkten der von α abhängigen Function $\vartheta_0((u))$ oder $\sqrt{\psi_0(x)}$. An Stelle von (1) tritt jetzt ($h = 1, .., p$):

$$(13) \qquad \int_\alpha^x du_h + \sum_{i=1}^p \int_{\alpha_i^0}^{x_i} du_h \equiv V_h$$

und an Stelle von (9) die Gleichung[1])

$$(14) \qquad \frac{\vartheta_\mu(V_1, .., V_p)}{\vartheta_\nu(V_1, .., V_p)} = C_{\mu\nu} \frac{\Psi_\mu(x, x_1, .., x_p)}{\Psi_\nu(x, x_1, .., x_p)} \prod_{i=0}^p \frac{\Psi_\nu(x_i)}{\Psi_\mu(x_i)} \sqrt{\frac{\psi_\mu(x_i)}{\psi_\nu(x_i)}}.$$

Die oben angegebene Bildung der rationalen Functionen Ψ kann hier folgendermassen modificirt werden. Man bilde $\Psi_\mu(x) = 0$ als Curve des $3(n-2)^{\text{ten}}$ Grades in x so, dass sie durch jeden der r Doppelpunkte δ von $F = 0$ und ebenso durch jeden der $n - 2$ Schnittpunkte ε der Tangente $(\alpha x) = 0$ mit $F = 0$ je dreimal hindurchgeht. Die noch freien Coefficienten lassen sich dann gerade noch so bestimmen, dass diese Curve durch die p Punkte α_i^μ und die p Punkte α_i^0 hindurchgeht. Sie ist damit vollständig bestimmt und schneidet $F = 0$ noch in p Punkten $\zeta_1, .., \zeta_p$, die von den Punktsystemen α_i^μ und α_i^0 abhängen. Die Curve $\Psi_\mu(x, x_1, .., x_p) = 0$ ist alsdann von demselben Grad $3(n-2)$ in x zu wählen und dreifach durch jeden der Punkte δ und ε und einfach durch die p Punkte $\zeta_1, .., \zeta_p$ und die p Punkte $x_1, .., x_p$ zu legen, wodurch sie vollständig bestimmt ist. Ebenso hat man $\Psi_\nu(x)$ und $\Psi_\nu(x, x_1, .., x_p)$ zu bilden mit dem Unterschied, dass hier statt der p Punkte α_i^μ die p Punkte α_i^ν zu nehmen sind, in Folge dessen auch die p Punkte ζ_i andere werden. Aus dieser Bildungsweise geht hervor, dass sich die Func-

1) H. Stahl, Diss. Berlin 1882. S. 15.

tionen Ψ in (14) als homogene Functionen des dritten Grades in den zu α gehörigen, adjungirten Functionen ψ allein darstellen lassen. Hiernach hat man den Satz:

(II) Der Quotient zweier Thetafunctionen mit beliebigen, zweitheiligen Charakteristiken μ und ν, in welchen die Argumente $p+1$-gliedrige Integralsummen 1. Gattung sind, deren obere Grenzpunkte beliebig, deren untere Grenzpunkte der beliebige Punkt α und das System der p 0^1 Punkte der zu α gehörigen Berührungsfunction ψ_0 sind, lässt sich algebraisch darstellen durch das System der zu α gehörigen Functionen ψ und durch die Coordinaten der Berührungspunkte dieser ψ-Curven.

Man kann indess die rechte Seite in (14) auch durch lauter Wurzelfunctionen darstellen. Die Function $\Psi_\mu(x, x_1, .., x_p) : \Psi_\mu(x)$ ist als rationale Function von x definirt durch ihre $2p$ ∞^1 Punkte α_i^0 und α_i^μ und durch p ihrer $2p$ 0^1 Punkte, nämlich $x_1, .., x_p$. Man kann nun den Nenner $\Psi_\mu(x)$ ersetzen durch $\sqrt{\psi_0(x)\;\psi_\mu(x)}$. Dies ist eine besondere, aus zwei Berührungsfunctionen ψ gebildete Wurzelfunction von der Charakteristik μ. Um den Zähler $\Psi_\mu(x, x_1, .., x_p)$ zu erhalten, hat man eine entsprechende, allgemeine Wurzelfunction mit derselben Charakteristik μ zu bilden. Eine solche lässt sich nach (I) § 30 durch $p+1$ linear unabhängige Wurzelfunctionen derselben Art darstellen, also nach (9) § 30 durch einen Ausdruck von der Form

$$\sum_{i=0}^{p} l_i \sqrt{S_\mu^i(x)}, \tag{15}$$

wo $S_\mu^i(x) = \psi_{\mu_1^i}(x)\,\psi_{\mu_2^i}(x)$ und $\mu_1^i\mu_2^i \equiv \mu$ $(i = 0, 1, .., p)$ ist. Bestimmt man die Coefficienten l_i so, dass der Ausdruck (15) für $x = x_1, .., x_p$ verschwindet, so hat man den Zähler $\Psi_\mu(x, x_1, .., x_p)$. Hiernach erhält man an Stelle von (14) die Gleichung

$$\frac{\vartheta_\mu(V_1, .., V_p)}{\vartheta_\nu(V_1, .., V_p)} = C_{\mu\nu} \frac{\sum \pm \sqrt{S_\mu^0(x)} \ldots \sqrt{S_\mu^p(x_p)}}{\sum \pm \sqrt{S_\nu^0(x)} \ldots \sqrt{S_\nu^p(x_p)}}, \tag{16}$$

deren rechte Seite der Quotient zweier Determinanten ist, gebildet aus den Wurzelfunctionen $\sqrt{S_\mu^i(x)}$ und $\sqrt{S_\nu^i(x)}$ mit den Argumenten $x, x_1, .., x_p$. Die Constante $C_{\mu\nu}$ bestimmt sich wieder am einfachsten durch die Substitutionen $x, x_1, .., x_p = \alpha, \alpha_1^\lambda, .., \alpha_p^\lambda$ und $x, x_1, .., x_p = \alpha, \alpha_1^{\lambda\mu\nu}, .., \alpha_p^{\lambda\mu\nu}$, mit der Voraussetzung, dass $\lambda\mu$ und $\lambda\nu$ gerade Charakteristiken sind.

Zweitens sei in (9) $q = \varrho\,(2p-2)$ und die q Punkte α_k seien die Schnittpunkte von $F = 0$ mit einer Curve $\Phi(x) = 0$ vom Grade $\varrho\,(n-3)$ in x, die ausserdem $F = 0$ in den r Doppelpunkten δ je ϱ-fach schneidet.

Dann lässt sich der Nenner $\Psi_\mu(x)$ in (9) ersetzen durch $\Phi\sqrt{\psi_\mu(x)}$. Dies ist eine Wurzelfunction mit der Charakteristik μ, die in den q Punkten α_k $(k=1,..,q)$ und den p Punkten α_i^μ $(i=1,..,p)$ in erster Ordnung verschwindet und ausserdem noch in gewissen Punkten, nämlich in jedem der r Doppelpunkte δ von $F = 0$ in der Ordnung $\varrho + \frac{1}{2}$ (für jeden der beiden Zweige) und in jedem der $n-2$ Schnittpunkte ε der Tangente $(\alpha x) = 0$ mit $F = 0$ je in der Ordnung $\frac{1}{2}$ verschwindet. Um den zugehörigen Zähler $\Psi_\mu(x, x_1, .., x_p)$ in (9) zu erhalten, hat man eine allgemeine Wurzelfunction mit derselben Charakteristik μ zu bilden, welche in den Punkten δ und ε in derselben Ordnung wie $\Psi_\mu(x)$ und in $q+p$ weiteren Punkten verschwindet. Eine solche Function drückt sich nach (I) § 30 durch $q+1$ linear unabhängige Functionen derselben Art aus in der Form:

$$\sqrt{R_\mu(x)} + \sqrt{(\alpha\,x)}\sum_{k=1}^{q} l_k\sqrt{T_\mu^k(x)}. \tag{17}$$

Dabei ist die Function $R_\mu(x)$ vom Grade $2\varrho\,(n-3) + (n-2)$ in x und von α abhängig. Die Functionen $T_\mu^k(x)$ sind vom Grade $(2\varrho+1)(n-3)$ und von α unabhängig; sie lassen sich durch homogene Ausdrücke der $(2\varrho+1)^{\text{ten}}$ Dimension in den adjungirten Functionen φ von $n-3^{\text{ten}}$ Grade darstellen. Bestimmt man die Coefficienten l_k so, dass der Ausdruck (17) für $x = x_1, .., x_q$ verschwindet, so hat man den Zähler $\Psi_\mu(x, x_1, .., x_q)$ in (9). Da (αx) verschwindet für $x = \alpha$, so erhält man $\Psi_\mu(\alpha, x_1, .., x_q)$ in Form einer Determinante, nämlich:

$$\Psi_\mu(\alpha, x_1, .., x_q) = \sqrt{R_\mu(\alpha)}\prod_{k=1}^{q}\sqrt{(\alpha\,x_k)}\sum\pm\sqrt{T_\mu^1(x_1)}\;...\;\sqrt{T_\mu^q(x_q)}.$$

Ebenso ist mit $\Psi_\nu(x)$ und $\Psi_\nu(x, x_1, .., x_q)$ zu verfahren. Setzt man nunmehr in (9) $x = \alpha$, also an Stelle von (1) $(h = 1, .., p)$:

$$V_h \equiv \sum_{k=1}^{q}\int_{\alpha_k}^{x_k} du_h \quad (q = \varrho\,(2p-2)), \tag{18}$$

so erhält man statt (9):

$$\frac{\vartheta_\mu(V_1, \ldots, V_p)}{\vartheta_\nu(V_1, \ldots, V_p)} = C_{\mu\nu} \frac{\sum \pm \sqrt{T_\mu'(x_1)} \ldots \sqrt{T_\mu^q(x_q)}}{\sum \pm \sqrt{T_\nu'(x_1)} \ldots \sqrt{T_\nu^q(x_q)}}, \tag{19}$$

wo $C_{\mu\nu}$ wieder wie früher bestimmt werden kann. Für $\varrho = 1$ hat man den Satz[1]):

(III) Der Quotient zweier Thetafunctionen mit beliebigen, zweitheiligen Charakteristiken μ und ν, in welchen die Argumente $2p-2$-gliedrige Integralsummen 1. Gattung (18) sind, deren obere Grenzpunkte x_k beliebig, deren untere Grenzpunkte α_k die 0^1 Punkte einer φ-Function sind, lässt sich symmetrisch in den Coordinaten der Punkte x_i darstellen durch Wurzelfunctionen, die sich allein aus Wurzelfunctionen $\sqrt{\varphi_\nu}$ zusammensetzen.

Ist $\varrho = 1$, $q = 2p - 2$, sind μ und ν ungrade Charakteristiken, $\sqrt{\varphi_\mu}$ und $\sqrt{\varphi_\nu}$ die zugehörigen Wurzelfunctionen und setzt man

$$\sqrt{\frac{T_\mu^i(x)}{\varphi_\mu(x)}} = M_i(x), \quad \sqrt{\frac{T_\nu^i(x)}{\varphi_\nu(x)}} = N_i(x), \tag{20}$$

so dass $M_i(x)$ und $N_i(x)$ rationale Functionen sind, die sich allein aus φ-Functionen zusammensetzen lassen, so geht unter Voraussetzung von (18) die Gleichung (19) über in

$$\frac{\vartheta_\mu(V_1, \ldots, V_p)}{\vartheta_\nu(V_1, \ldots, V_p)} = C_{\mu\nu} \frac{\sum \pm M_1(x_1) \ldots M_q(x_q)}{\sum \pm N_1(x_1) \ldots N_q(x_q)} \sqrt{\frac{\varphi_\mu(x_1) \ldots \varphi_\mu(x_q)}{\varphi_\nu(x_1) \ldots \varphi_\nu(x_q)}}. \tag{21}$$

Handelt es sich nun um die Lösung des Jacobi'schen Umkehrproblems (1) § 30, so kann man jede der entwickelten Gleichungen (14), (16), (19) oder (21) verwenden, indem man einen Theil der oberen Grenzpunkte x_i mit unteren Grenzpunkten zusammenfallen lässt. Die Formel (19) oder (21) hat den Vorzug, dass sie nur Quotienten von φ-Functionen, also nur Elemente enthält, die der eindeutigen Transformation gegenüber invariant sind (§ 23). Wir werden

1) Die Formel (19) wurde zuerst von Herrn Weber für $p = 3$, $q = 4$ (Theorie der Ab. F. $p = 3$, § 24, 1876) aufgestellt und zur Lösung des Umkehrproblems verwerthet; später von Herrn Nöther für $q = 2p - 2$ (Math. Ann. Bd. 28, S. 367, 1887) und von Herrn Klein für $q = \varrho(2p - 2)$ (Math. Ann. Bd. 36, S. 40, 1890) verallgemeinert. Für die obige Herleitung aus allgemeineren Formeln vgl. H. Stahl, Journ. für Math. Bd. 111, S. 106, 1892. Es ist von Interesse, dass dieselbe Formel für $q = 2p - 2$ und für ungrade Charakteristiken μ und ν in der obigen Fassung (21) aber etwas anderer Herleitung bereits von Riemann in einer Vorlesung Winter 1861/62 (s. Vorwort) entwickelt wurde.

indess in den folgenden §§ die Gleichung (14) zu Grunde legen, weil sich an ihr die weitere Discussion des Umkehrproblems in ihren Grundzügen einfacher und symmetrischer entwickeln lässt, als an der Gleichung (19) oder (21). Zudem schliesst sich diese Behandlung am engsten an die Theorie der elliptischen Functionen an.

Setzt man in (13) und (14) $x = \alpha$ und bildet alsdann die Gleichung (14) für p verschiedene Charakteristiken $\mu_1, .., \mu_p$ und dieselbe Charakteristik ν, so hat man, in Verbindung mit

$$(22) \qquad F(x_1) = 0, \ldots, F(x_p) = 0,$$

$2p$ Gleichungen, aus denen sich auf algebraischem Wege die Coordinaten der p Punkte $x_1, .., x_p$ als Functionen der Argumente V_h (oder U_h in (1) § 30) darstellen lassen. Diese Darstellung muss eindeutig sein, da die Lösung des Umkehrproblems (13) nach X § 28 eindeutig ist.

Wir erwähnen noch eine andere Bestimmungsweise[1]) der p Punkte x_i als Functionen der Argumente U_h aus den Gleichungen (14). Dieselbe gründet sich auf das Additionstheorem der Thetafunctionen, das wir, ohne einen Beweis zu geben, voraussetzen. Versteht man unter u_h und U_h die Werthe (2) und (1) § 30, nachdem in U_h die unteren Grenzpunkte durch $\alpha_1^0, .., \alpha_p^0$ ersetzt sind, so sind die p Punkte x_i in den Gleichungen (1) § 30 gerade die p 0^1 Punkte der Function $\vartheta(\!(u - U)\!)$, betrachtet als Function von x (I § 29). Nun gibt das Additionstheorem der Thetafunctionen Gleichungen der Form $(i = 1, .., 2^p)$:

$$(23) \quad \vartheta(\!(u - U)\!)\,\vartheta_\varkappa(\!(u + U)\!) = \sum_i A_i\,\vartheta_{\lambda_i}(\!(U)\!)\,\vartheta_{\varkappa\lambda_i}(\!(U)\!)\,\vartheta_{\mu_i}(\!(u)\!)\,\vartheta_{\varkappa\mu_i}(\!(u)\!),$$

in welchen A_i constante Coefficienten und $\varkappa$, λ_i, μ_i zweitheilige Charakteristiken sind. Bildet man die in die rechte Seite eingehenden Thetafunctionen mit den Argumenten u aus (5) § 30 (indem man für μ der Reihe nach μ_i und $\varkappa\mu_i$ setzt, während die Charakteristik ν im Nenner bleibt), so bestimmen sich die p Punkte x_i aus einer Gleichung der Form $(i = 1, .., 2^p)$:

$$(24) \qquad \sum_i B_i\,\vartheta_{\lambda_i}(\!(U)\!)\,\vartheta_{\varkappa\lambda_i}(\!(U)\!)\,\sqrt{\psi_{\mu_i}(x)\,\psi_{\varkappa\mu_i}(x)} = 0,$$

in welcher die Argumente $U_1, .., U_p$ gegebene Grössen sind. Diese Gleichung lässt sich mit Hilfe von $F = 0$ rational machen in den Coordinaten des Punktes x. Denn dividirt man die linke Seite durch

1) Weber, Ab. F. ($p = 3$) § 26.

die Wurzelfunction irgend eines Gliedes, so hat man eine in x rationale Function, die in je $2p$ Punkten $= 0^1$ und $= \infty^1$ wird. Auf rationale Form gebracht, stellt (24) eine Curve dar, die $F = 0$ in den p Punkten x_i und ausserdem in p andern Punkten schneidet. Die letzteren sondert man ab, indem man die Gleichung (24) für zwei verschiedene Charakteristiken $\varkappa$ bildet; die gemeinsamen Schnittpunkte dieser beiden Gleichungen mit $F = 0$ sind die gesuchten Punkte x_i. Eine dieser Gleichungen, nämlich die für $\varkappa = 0$ gebildete, ist bereits rational.

Zur vollständigen Lösung des Umkehrproblems sind noch gewisse Bestimmungen zu leisten, die bei der Aufstellung der Gleichung (9) und der aus ihr folgenden Gleichungen (14), (16), (19) oder (21) vorausgesetzt wurden, nämlich

1) die algebraische Bestimmung der Wurzelfunctionen $\sqrt{\psi_\mu(x)}$ und ihre Zuordnung zu den zweitheiligen Charakteristiken μ (s. § 32);
2) die Aufstellung der Normalintegrale 1. Gattung und die Bestimmung der Thetamoduln durch die Klassenmoduln (s. § 33).

§ 32. Bestimmung der Berührungsfunctionen ψ_μ. Zuordnung zu den Thetacharakteristiken μ.

Die erste der Fragen, die nach der Schlussbemerkung von § 31 für das Umkehrproblem noch zu lösen sind, ist eine algebraische; sie betrifft die Herstellung des den zweitheiligen Charakteristiken μ entsprechenden Systemes von Berührungscurven ψ_μ und die Zuordnung derselben zu den Thetafunctionen ϑ_μ bei gegebenem Querschnittsystem. Wir knüpfen zur Lösung dieser Aufgabe[1]) an die Betrachtungen des § 29 an. Nach denselben hat man, um die Functionen ψ_μ zu finden, in dem willkürlich gewählten Punkte α die Tangente an $F = 0$ zu ziehen und durch die übrigen $n - 2$ Schnittpunkte ε derselben, sowie durch die r Doppelpunkte von F alle Curven ψ vom Grade $n - 2$ zu legen, die $F = 0$ in p Punkten berühren. Eine Curve des $n - 2^{\text{ten}}$ Grades, die durch die r Doppelpunkte δ geht, hat nach Satz II § 10 noch $n(n-2) - 2r - p + 1$ oder, da nach (6) § 5 $(n-1)(n-2) = 2p + 2r$ ist, noch $p + n - 1$ nicht homogene, lineare Coefficienten. Legt man diese Curve noch durch die $n - 2$ Punkte ε, so bleiben $p + 1$ solcher Coefficienten oder die Function ψ lässt sich durch

1) Clebsch u. Gordan, Ab. F. S. 233 u. 266 (1866). H. Stahl, Diss. Berlin. S. 17 ff. (1882).

$p+1$ linear unabhängige Functionen derselben Art $\psi^{(0)}$, $\psi^{(1)}$, .., $\psi^{(p)}$ darstellen in der Form

(1) $$\psi = \psi^{(0)} + r_1\psi^{(1)} + \cdot\cdot r_p\psi^{(p)}.$$

Die Functionen $\psi^{(i)}$ sind nach § 9 S. 74 rational gebildet in den Coefficienten von $F=0$ und den Coordinaten des Punktes α. Die Coefficienten r_1, .., r_p heissen das Coefficientensystem von ψ, bezogen auf ψ^0, ψ^1, .., $\psi^{(p)}$. Dasselbe ist so zu bestimmen, dass die $2p$ Schnittpunkte der Curve $\psi=0$ mit $F=0$ paarweise zusammenfallen. Hierzu bilde man die drei Gleichungen

(2) $$\psi = 0, \quad F = 0, \quad p + \lambda q = 0,$$

wo die letzte Gleichung ein beliebiges Strahlenbüschel mit dem Parameter λ vorstellt und unterwerfe dieselben drei Eliminationsprocessen.

Erstens eliminire man die Coordinaten des variabeln Punktes x. Dies gibt eine Gleichung in λ, welche die Parameter der nach den Schnittpunkten von F und ψ gehenden Strahlen bestimmt. Nach Absonderung der bekannten, den festen Punkten δ und ε entsprechenden Factoren ist diese Gleichung vom Grade $2p$ in λ, also von der Form

(3) $$A = \lambda^{2p} + A_1\lambda^{2p-1} + \cdot\cdot + A_{2p-1}\lambda + A_{2p} = 0,$$

wo die Coefficienten A rationale Functionen der p Grössen r_1, .., r_p in (1) sind. Da die $2p$ durch (3) bestimmten Strahlen paarweise zusammenfallen sollen, so muss A die zweite Potenz eines Ausdrucks $\mathfrak{L}$ vom Grade p in λ sein von der Form

(4) $$\mathfrak{L} = \lambda^p + a_1\lambda^{p-1} + \cdot\cdot + a_{p-1}\lambda + a_p.$$

Diese Bedingung gibt $2p$ Gleichungen zwischen den Coefficienten von $\mathfrak{L}$ und A oder $2p$ Gleichungen, in welche die Coefficienten a_i von (4) und die Coefficienten r_i von (1) rational eingehen. Man eliminire

zweitens aus diesen $2p$ Gleichungen zwischen a_i und r_i die p Grössen a_i und erhält dann p Gleichungen, die rational in den r_i sind. Zu diesen p Gleichungen füge man der Symmetrie halber die Gleichung

(5) $$r = \gamma_1 r_1 + \cdot\cdot + \gamma_p r_p,$$

hinzu, wo die γ_i beliebige Zahlenwerthe sind und eliminire

drittens die p Grössen r_i; dann bleibt eine einzige Gleichung in r übrig

(6) $$R = 0,$$

deren Coefficienten rational gebildet sind in den Coefficienten von $F = 0$ und in den Coordinaten des Punktes α.

Die Bestimmung des Systems der Berührungsfunctionen ψ_μ hängt nun lediglich von der Lösung der Gleichung $R = 0$ (6) ab. Denn geht man den beschriebenen Weg zurück, so ergibt sich Folgendes:

1) Jeder Wurzel $r^{(\mu)}$ von $R = 0$ entspricht eindeutig eine Berührungsfunction ψ_μ. Da es 2^{2p} solcher Functionen gibt (S. 239), so ist die Gleichung $R = 0$ vom Grade 2^{2p} in r.

   In der That drückt sich im Laufe der dritten Elimination das Coefficientensystem $r_1^{(\mu)}, \ldots, r_p^{(\mu)}$ von ψ_μ rational durch die zugehörige Wurzel $r^{(\mu)}$ von $R = 0$ aus.

   Man sieht zugleich, dass sich $r^{(\mu)}$ stets auf mannigfache Weise rational und symmetrisch durch das zugehörige Coefficientensystem $r_1^{(\mu)}, \ldots, r_p^{(\mu)}$ von ψ_μ darstellen lässt.

2) Jeder Wurzel $r^{(\mu)}$ von $R = 0$ oder jeder Berührungscurve ψ_μ entspricht ferner eindeutig eine Gleichung $\mathfrak{L}_\mu = 0$ vom Grade p in λ.

   Denn im Laufe der zweiten Elimination stellen sich die p Coefficienten $a_i^{(\mu)}$ von $\mathfrak{L}_\mu = 0$ rational dar durch die p Grössen $r_1^{(\mu)}, \ldots, r_p^{(\mu)}$, also auch rational durch die eine Wurzel $r^{(\mu)}$.

   Hieraus folgt, dass auch die rationalen und symmetrischen Functionen der p Wurzeln $\lambda_1^{(\mu)}, \ldots, \lambda_p^{(\mu)}$ von $\mathfrak{L}_\mu = 0$ rationale Functionen von $r^{(\mu)}$ sind.

3) Jeder der p Wurzeln $\lambda_1^{(\mu)}, \ldots, \lambda_p^{(\mu)}$ von $\mathfrak{L}_\mu = 0$ endlich entspricht eindeutig einer der p Berührungspunkte $\alpha_1^{(\mu)}, \ldots, \alpha_p^{(\mu)}$ der Curve ψ_μ.

   Denn im Laufe der ersten Elimination ergeben sich die Coordinaten eines solchen Berührungspunktes $\alpha_i^{(\mu)}$ als rationale Functionen des zugehörigen Parameters $\lambda_i^{(\mu)}$ und der p Coefficienten $r_1^{(\mu)}, \ldots, r_p^{(\mu)}$ von ψ_μ oder auch nach 1) als rationale Functionen von $\lambda_i^{(\mu)}$ und der Wurzel $r^{(\mu)}$. Es stellen sich also die rationalen und symmetrischen Functionen der Coordinaten der p Berührungspunkte $\alpha_1^{(\mu)}, \ldots, \alpha_p^{(\mu)}$ der Curve ψ_μ rational durch die Wurzel $r^{(\mu)}$ und durch die rationalen und symmetrischen Functionen der p Wurzeln $\lambda_1^{(\mu)}, \ldots, \lambda_p^{(\mu)}$ oder nach 2) auch rational durch die Wurzel $r^{(\mu)}$ allein dar.

Umgekehrt lässt sich auf unendlich viele Arten jede rationale Function von $r^{(\mu)}$, wie oben durch das zugehörige Coefficientensystem $r_1^{(\mu)}, \ldots, r_p^{(\mu)}$, so auch durch die Coordinaten der p Berührungspunkte $\alpha_1^{(\mu)}, \ldots, \alpha_p^{(\mu)}$ der Curve ψ_μ rational und sym-

metrisch darstellen. Wir drücken dies, indem wir eine rationale Function durch fr, eine rationale und symmetrische Function durch frs bezeichnen, aus durch die Gleichungen:

$$(7)\qquad \begin{cases} frs\,(\alpha_1^{(\mu)}, \ldots, \alpha_p^{(\mu)}) = fr\,(r^{(\mu)})\,; \\ r^{(\mu)} = Frs\,(r_1^{(\mu)}, \ldots, r_p^{(\mu)}) = \Phi rs\,(\alpha_1^{(\mu)}, \ldots, \alpha_p^{(\mu)})\,. \end{cases}$$

Für die Bildung des Umkehrproblems ist die Kenntniss der einzelnen Berührungspunkte einer Curve ψ_μ und folglich auch die Lösung der Gleichung $\mathfrak{L}_\mu = 0$ nicht nöthig; es handelt sich dort nur um rationale und symmetrische Functionen dieser Berührungspunkte.

Diese Betrachtungen erhalten eine schärfere Fassung, wenn man die Fälle unterscheidet, wo die zweitheilige Charakteristik μ gerade oder ungrade ist. Es wurde in § 29 gezeigt, dass die einer ungraden Charakteristik ν entsprechende Function $\psi_\nu(x)$ von der Form $(\alpha x)\,\varphi_\nu(x) = 0$ ist, wo $(\alpha x) = 0$ die Gleichung der Tangente im Punkte α und $\varphi_\nu(x) = 0$ eine von α ganz unabhängige, der ungraden Charakteristik ν zugeordnete, adjungirte Curve vom $n - 3^{\text{ten}}$ Grade ist, die $F = 0$ in $p - 1$ Punkten $\alpha_1^{(\nu)}, \ldots, \alpha_{p-1}^{(\nu)}$ berührt. Hieraus folgt, dass die Gleichung $R = 0$ vom Grade 2^{2p} in r in zwei Gleichungen zerfallen muss.

Die erste Gleichung $R_1 = 0$ ist entsprechend der Zahl der geraden Charakteristiken (S. 239) vom Grade $2^{p-1}(2^p + 1)$ in r und gibt die den geraden Charakteristiken μ zugeordneten Functionen ψ_μ; ihre Coefficienten enthalten rational die Coordinaten des Punktes α. Für die Gleichung $R_1 = 0$ gelten ohne Aenderung die obigen Betrachtungen; man hat demnach den Satz:

(Ia) Die algebraische Bestimmung des Systems der Berührungsfunctionen ψ_μ, die den geraden, zweitheiligen Charakteristiken μ entsprechen, hängt ab von der Lösung der Gleichung $R_1 = 0$ vom Grade $2^{p-1}(2^p + 1)$ in r, deren Coefficienten rational gebildet sind in den Coefficienten der Gleichung $F = 0$ und den Coordinaten des Punktes α. Durch je eine Wurzel $r^{(\mu)}$ dieser Gleichung drücken sich rational aus:

1) Die Coefficienten $r_1^{(\mu)}, \ldots, r_p^{(\mu)}$ der zugehörigen Berührungsfunction ψ_μ,

2) die rationalen und symmetrischen Functionen der p Berührungspunkte $\alpha_1^{(\mu)}, \ldots, \alpha_p^{(\mu)}$ der Curve ψ_μ.

In diese Darstellungen gehen die Coefficienten von $F = 0$ und ausserdem die Coordinaten des Punktes α in rationaler Weise ein.

Die zweite Gleichung $R_2 = 0$ ist, entsprechend der Zahl der ungraden Charakteristiken (S. 239), vom Grade $2^{p-1}(2^p - 1)$ in r und liefert die den ungraden Charakteristiken ν zugeordneten Functionen φ_ν. Die Coefficienten von $R_2 = 0$ sind unabhängig von den Coordinaten des Punktes α.

Um das System der Berührungscurven φ_ν direct zu erhalten, hat man nur die Gleichung (1) zu ersetzen durch

$$\varphi = \varphi^{(0)} + r_1 \varphi^{(1)} + \cdots + r_{p-1} \varphi^{(p-1)}, \tag{8}$$

wo die $\varphi^{(i)}$ p linear unabhängige, adjungirte Functionen vom $n - 3^{\text{ten}}$ Grade vorstellen, deren Coefficienten nach § 9 rational in den Coefficienten von F gebildet sind. Dann erhält man durch dieselbe Behandlung wie oben statt $\Delta = 0$ eine Gleichung $\Delta_2 = 0$ vom Grade $2p - 2$ in λ oder statt $\mathfrak{L} = 0$ eine Gleichung $\mathfrak{L}_2 = 0$ vom Grade $p - 1$ in λ. Setzt man endlich statt (5) $r = \gamma_1 r_1 + \cdots + \gamma_{p-1} r_{p-1}$, so ergibt sich durch Elimination der r_i die Gleichung $R_2 = 0$ in r vom Grade $2^{p-1}(2^p - 1)$. Jeder Wurzel $r^{(\nu)}$ dieser Gleichung entspricht eindeutig eine Berührungsfunction φ_ν mit den Berührungspunkten $\alpha_1^{(\nu)}, \ldots, \alpha_{p-1}^{(\nu)}$. Dabei ist

$$\left.\begin{aligned} & frs\,(\alpha_1^{(\nu)}, \ldots, \alpha_{p-1}^{(\nu)}) = fr\,(r^{(\nu)}); \\ & r^{(\nu)} = Frs\,(r_1^{(\nu)}, \ldots, r_{p-1}^{(\nu)}) = \Phi rs\,(\alpha_1^{(\nu)}, \ldots, \alpha_{p-1}^{(\nu)}). \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Für die Gleichung $R_2 = 0$ gilt daher der Satz:

(Ib) Die algebraische Bestimmung des Systems der Berührungsfunctionen φ_ν, die den ungraden Charakteristiken ν entsprechen, hängt ab von der Lösung einer Gleichung $R_2 = 0$ vom Grade $2^{p-1}(2^p - 1)$ in r, deren Coefficienten rational gebildet sind in den Coefficienten von $F = 0$. Durch je eine Wurzel $r^{(\nu)}$ dieser Gleichung drücken sich rational aus:

1) Die Coefficienten $r_1^{(\nu)}, \ldots, r_{p-1}^{(\nu)}$ der zugehörigen Berührungsfunction φ_ν,

2) die rationalen und symmetrischen Functionen der $p - 1$ Berührungspunkte $\alpha_1^{(\nu)}, \ldots, \alpha_{p-1}^{(\nu)}$ der Curve φ_ν.

In diese Darstellungen gehen nur noch die Coefficienten von $F = 0$ in rationaler Weise ein.

Aus den vorstehenden Sätzen zieht man Folgerungen über die Abhängigkeit der Wurzeln $r^{(\mu)}$ der Gleichung $R = 0$ von einander und über die Beziehungen der zugehörigen Wurzelfunctionen $\sqrt{\psi_\mu}$ zu einander[1]).

1) H. Stahl, l. c. S. 20.

Es seien, wie in § 30,

(10) $\mu_0, \mu_1, .., \mu_{2\lambda+1}$ eine gerade Anzahl von Charakteristiken,

(11) $r^{(\mu_0)}, r^{(\mu_1)}, .., r^{(\mu_{2\lambda+1})}$ die entsprechenden Wurzeln von $R = 0$,

(12) $\psi_{\mu_0}, \psi_{\mu_1}, .., \psi_{\mu_{2\lambda+1}}$ die entsprechenden Functionen ψ_μ,

(13) $r_i^{(\mu_0)}, r_i^{(\mu_1)}, .., r_i^{(\mu_{2\lambda+1})}$ die Coefficientensysteme derselben,

(14) $\alpha_i^{\mu_0}, \alpha_i^{\mu_1}, .., \alpha_i^{\mu_{2\lambda+1}}$ die Systeme von Berührungspunkten derselben.

Setzt man voraus, dass die Summe der Charakteristiken (10) congruent 0 sei, also

$$(15) \qquad \mu_0\mu_1 \ldots\ldots \mu_{2\lambda+1} \equiv 0 \pmod 2 \qquad (\lambda > 0)$$

und betrachtet demgemäss die $2\lambda + 1$ ersten Charakteristiken (10) als unabhängig, die letzte $\mu_{2\lambda+1}$ als abhängig, ebenso in (11) bis (14) die letzten Werthsysteme $r^{\mu_{2\lambda+1}}$, $\psi_{\mu_{2\lambda+1}}$, $r_i^{(\mu_{2\lambda+1})}$, $\alpha_i^{\mu_{2\lambda+1}}$ als abhängige, die andern als unabhängige Elemente und berücksichtigt man, dass nach (17) § 30 das Product der zu den Functionen (12) gehörigen Wurzelfunctionen eine ganze, rationale Function der Coordinaten von x ist, nämlich

$$(16) \qquad \sqrt{\psi_{\mu_0}\psi_{\mu_1} \ldots \psi_{\mu_{2\lambda+1}}} \equiv \mathsf{P}(x, \alpha_i^{\mu_0}, .., \alpha^{\mu_{2\lambda}}),$$

so ergibt sich Folgendes:

Nach (16) ist jede rationale und symmetrische Function der Coordinaten der p Punkte $\alpha_1^{\mu_{2\lambda+1}}, .., \alpha_p^{\mu_{2\lambda+1}}$ des letzten Punktsystems in (14) eine rationale Function der Coefficienten in P oder auch eine rationale und symmetrische Function der Coordinaten eines jeden der $2\lambda + 1$ ersten Punktsysteme in (14). Nach den Gleichungen (7) ist also die letzte Wurzel $r^{(\mu_{2\lambda+1})}$ in (11) eine rationale und symmetrische Function der übrigen $2\lambda + 1$ Wurzeln $r^{(\mu_i)}$ und die p Coefficienten $r_i^{(\mu_{2\lambda+1})}$ $(i = 1, .., p)$ der letzten Function $\psi_{\mu_{2\lambda+1}}$ sind rationale und symmetrische Functionen eines jeden der Coefficientensysteme $r_i^{(\mu_0)}, .., r_i^{(\mu_{2\lambda})}$ der Functionen $\psi_{\mu_0}, .., \psi_{\mu_{2\lambda}}$. Trennt man wieder die Fälle, wo die Charakteristiken (10) gerade oder ungrade sind, so folgen die Sätze:

(IIa) Hat man eine gerade Anzahl $2\lambda + 2$ von geraden Charakteristiken (10), deren Summe $\equiv 0$ ist (mod 2), so drückt sich jede der zugehörigen Wurzeln $r^{(\mu_0)}, .., r^{(\mu_{2\lambda+1})}$ der Gleichung $R_1 = 0$ rational und symmetrisch durch die $2\lambda + 1$ übrigen Wurzeln aus und das Coefficientensystem

jeder der zugehörigen Functionen $\psi_{\mu_0}, \ldots, \psi_{\mu_{2\lambda+1}}$ rational und symmetrisch durch die Coefficientensysteme der $2\lambda + 1$ übrigen ψ-Functionen. In diese Darstellungen gehen die Coefficienten von $F = 0$ und ausserdem die Coordinaten des Punktes α in rationaler Weise ein.

(IIb) Hat man eine gerade Anzahl $2\lambda + 2$ von ungraden Charakteristiken, deren Summe $\equiv 0$ ist (mod 2), so drückt sich jede der zugehörigen Wurzeln von $R_2 = 0$ rational und symmetrisch durch die übrigen $2\lambda + 1$ Wurzeln aus und das Coefficientensystem jeder der zugehörigen Functionen φ rational und symmetrisch durch die Coefficientensysteme der $2\lambda + 1$ übrigen Functionen φ. In diese Darstellungen gehen nur noch die Coefficienten von $F = 0$ in rationaler Weise ein.

Diese Sätze enthalten alle möglichen, rationalen Beziehungen zwischen den Wurzeln von $R_1 = 0$ (oder $R_2 = 0$) und ebenso zwischen den Coefficientensystemen der Berührungsfunctionen ψ (oder φ). Da $\lambda > 0$ (15), so lässt sich niedrigsten Falles eine Wurzel von $R_1 = 0$ (oder $R_2 = 0$) rational durch drei andere und das Coefficientensystem einer ψ- (oder φ-) Function durch die Coefficientensysteme von drei anderen ψ- (oder φ-) Functionen ausdrücken.

Für die vorstehenden Sätze ist wesentlich, dass die Summe einer geraden Anzahl von Charakteristiken (10) congruent 0 ist (mod 2), dass sich also eine dieser Charakteristiken als Summe einer ungraden Anzahl von anderen Charakteristiken darstellt oder, wie man auch sagt, dass sich eine dieser Charakteristiken als wesentliche Combination von andern Charakteristiken darstellt. Besondere Bedeutung gewinnen daher diese Sätze, wenn man solche Systeme von Charakteristiken betrachtet, die die Eigenschaft haben, dass sich jede weitere Charakteristik aus ihnen als wesentliche Combination oder durch eine ungrade Anzahl zusammensetzt. Solche Systeme bestehen aus $2p + 2$ Charakteristiken und heissen allgemeine Fundamentalsysteme. Wir kommen auf sie im Abschnitt VIII § 41 ausführlicher zurück und führen hier nur das Wichtigste über sie an. Setzt man, wenn $\mu, \nu, \varrho, \ldots$ beliebige, zweitheilige Charakteristiken sind (die Congruenzen im Folgenden sind stets (mod 2) zu nehmen):

$$\left.\begin{aligned} |\mu| \equiv \sum_i \mu_i \mu_i', \quad |\mu, \nu| \equiv \sum_i (\mu_i \nu_i' \pm \nu_i \mu_i'), \\ |\mu, \nu, \varrho| \equiv |\nu, \varrho| + |\varrho, \mu| + |\mu, \nu| \equiv |\mu| + |\nu| + |\varrho| + |\mu\nu\varrho|, \end{aligned}\right\} \quad (17)$$

so heisst ein System von $2p+2$ Charakteristiken

$$(18) \qquad \mu_0, \mu_1, \cdot\cdot, \mu_{2p+1}$$

ein allgemeines Fundamentalsystem, wenn zwischen je drei derselben die Relation besteht:

$$(19) \quad |\mu_i, \mu_k, \mu_l| \equiv 1 \quad \text{oder} \quad |\mu_i| + |\mu_k| + |\mu_l| + |\mu_i\mu_k\mu_l| \equiv 1.$$

Die Charakteristiken (18) sind nicht unabhängig; es bestehen zwischen ihnen zwei lineare Relationen, die von der Form sind

$$(20) \qquad \mu_0\mu_1 \cdot\cdot \mu_{2\lambda} \equiv \mu_{2\lambda+1} \cdot\cdot \mu_{2p+1} \equiv 0,$$

so dass auch

$$(21) \qquad \mu_0\mu_1 \cdot\cdot\cdot \mu_{2p+1} \equiv 0.$$

Die Zahl der möglichen Fundamentalsysteme ist endlich. Ein Fundamentalsystem kann nur ausnahmsweise (für bestimmte Werthe von p) aus lauter geraden oder lauter ungraden Charakteristiken bestehen. Die Zahl s der in ihm enthaltenen, ungraden Charakteristiken ist nämlich an die Bedingung gebunden:

$$(22) \qquad s \equiv p \pmod 4,$$

so dass es z. B. stets Fundamentalsysteme von p ungraden und $p+2$ geraden Charakteristiken gibt.

Es lassen sich nun sämmtliche Charakteristiken nach einem einfachen Gesetz durch die Charakteristiken eines Fundamentalsystems darstellen in der Art, dass man den geraden oder ungraden Charakter einer jeden Charakteristik sofort erkennen kann. Solche Darstellungen heissen k a n o n i s c h. Bezeichnet man nämlich die Summe der s ungraden oder die Summe der $2p+2-s$ geraden unter den Charakteristiken (18) mit K und die Summe von i der Charakteristiken (18) mit $\sum^{i}\mu$, so stellen sich die sämmtlichen Charakteristiken dar durch kanonische Formen, nämlich die

$$(23) \quad \begin{cases} 2^{p-1}(2^p-1) \text{ ungraden Charakteristiken durch } K + \sum^{p+4\varrho-1}\mu, \\ 2^{p-1}(2^p+1) \text{ geraden} \quad \text{„} \quad \text{„} \quad K + \sum^{p+4\varrho+1}\mu \end{cases}$$

wo $\varrho = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ Diese Formen sind nach (22) sämmtlich wesentliche Combinationen der Charakteristiken (18). Die Charakteristik 0 ist ebenfalls in (20) durch eine solche Combination dargestellt.

Um diese Bemerkungen auf unsere Frage anzuwenden, nennen wir das dem Fundamentalsystem (18) von Charakteristiken entsprechende System von Wurzeln der Gleichung $R = 0$

$$r^{(\mu_0)}, r^{(\mu_1)}, \ldots, r^{(\mu_{2p+1})} \tag{24}$$

ein Fundamentalsystem von Wurzeln der Gleichung $R = 0$. Dabei entspricht jeder geraden Charakteristik eine Wurzel von $R_1 = 0$, jeder ungraden eine Wurzel von $R_2 = 0$. Wir nennen ferner das dem Fundamentalsystem (18) entsprechende System von Berührungsfunctionen ψ

$$\psi_{\mu_0}, \psi_{\mu_1}, \ldots, \psi_{\mu_{2p+1}} \tag{25}$$

ein Fundamentalsystem von ψ-Functionen. Dabei entspricht jeder geraden Charakteristik eine eigentliche Function $\psi(x)$, jeder ungraden eine zerfallende Function $(\alpha x)\,\varphi(x)$.

Es gibt ebensoviele Fundamentalsysteme von Wurzeln der Gleichung $R = 0$ und Fundamentalsysteme von ψ-Functionen, wie Fundamentalsysteme von Charakteristiken. Wie jede weitere Charakteristik μ sich nach (23) aus einer ungraden Anzahl von bestimmten Charakteristiken des Systems (18) zusammensetzt, so gehört zu jeder weiteren Wurzel r von $R = 0$ eine ungrade Anzahl von bestimmten Wurzeln des Systems (24) und zu jeder weiteren Function ψ eine ungrade Anzahl von bestimmten Functionen des Systems (25). Nach (IIa) und (IIb) gilt der Satz:

(III) Ein Fundamentalsystem von $2p + 2$ Wurzeln von $R = 0$ hat die Eigenschaft, dass sich durch sie alle übrigen Wurzeln von $R = 0$ rational ausdrücken, und ein Fundamentalsystem von $2p + 2$ Functionen ψ hat die Eigenschaft, dass sich durch ihre Coefficientensysteme die Coefficientensysteme alle übrigen Functionen ψ rational darstellen.

Dieser Satz legt die Frage nahe, ob sich die Fundamentalsysteme der Wurzeln von $R = 0$ oder die Fundamentalsysteme der ψ-Functionen nicht rein algebraisch und unabhängig von den Fundamentalsystemen der Charakteristiken definiren lassen. Um dies zu prüfen, gehen wir auf die Gleichungen (19) zurück. Nach ihnen ist ein Fundamentalsystem von Charakteristiken definirt als ein System von $2p + 2$ Charakteristiken von der Beschaffenheit, dass sich unter je dreien derselben und ihrer Summe, also unter den vier Charakteristiken μ_i, μ_k, μ_l, $\mu_i\mu_k\mu_l$ entweder eine ungrade und drei gerade oder drei ungrade und eine gerade Charakteristik befinden.

Nun drückt sich nach (III) die zur Charakteristik $\mu_i\mu_k\mu_l$ gehörige Wurzel von $R=0$ rational durch die zu den Charakteristiken μ_i, μ_k, μ_l gehörigen Wurzeln aus. Daher folgt für ein Fundamentalsystem von Wurzeln der Gleichung $R=0$ der Satz:

(IV) Fügt man zu drei beliebigen Wurzeln eines Fundamentalsystems diejenige, nicht dem System angehörige, vierte Wurzel von $R=0$, die sich durch die drei ersten rational ausdrückt, hinzu, so gehören von diesen vier Wurzeln entweder eine zu $R_2=0$ und drei zu $R_1=0$ oder drei zu $R_2=0$ und eine zu $R_1=0$.

Man hat ferner für die ψ-Functionen nach (17) § 30 die Gleichung

$$\sqrt{\psi_{\mu_i}\psi_{\mu_k}\psi_{\mu_l}\psi_{\mu_i\mu_k\mu_l}} \equiv \mathsf{P}(x,\ \alpha_i^{(\mu_i)}\,\alpha_i^{(\mu_k)}\,\alpha_i^{(\mu_l)}), \tag{26}$$

wo die rationale Function P vom Grade $2(n-2)$ in x ist. Hieraus folgt für ein Fundamentalsystem von ψ-Functionen der Satz:

(V) Fügt man zu drei beliebigen ψ-Functionen eines Fundamentalsystems diejenige, nicht dem System angehörige, vierte ψ-Function, die mit den drei ersten multiplicirt das Quadrat einer rationalen Function P von dem Grade $2(n-2)$ gibt, hinzu, so befinden sich unter diesen vier ψ-Functionen entweder eine oder drei eigentliche und drei oder eine zerfallende ψ-Functionen.

Man kann diese Eigenschaft der Fundamentalsysteme auch auf die Berührungspunkte der ψ-Functionen übertragen. Unter den vier Charakteristiken $\mu_i, \mu_k, \mu_l, \mu_i\mu_k\mu_l$ befinden sich stets entweder eine oder drei ungrade. Ist eine ungrade, so bleibt P in (26) vom Grade $2n-4$; sind drei ungrade, so reducirt sich, in Folge des Ausscheidens von (αx) in (26), P auf den Grad $2n-5$. Ebenso würde sich der Grad von P beim Auftreten von zwei ungraden unter den vier Charakteristiken auf $2n-5$, von vier ungraden auf $2n-6$ reduciren. Die beiden letzten Fälle aber treten nicht ein. Daher folgt für die Berührungspunkte der ψ-Functionen eines Fundamentalsystems der Satz:

(VI) Die Berührungspunkte von je drei ψ-Functionen eines Fundamentalsystems können nicht auf einer Curve vom Grade $2n-5$ liegen, wenn unter diesen ψ-Functionen zwei sind, die geraden Charakteristiken entsprechen, und sie können nicht auf einer Curve vom Grade $2n-6$ liegen, wenn unter den ψ-Functionen zwei sind, die ungraden Charakteristiken entsprechen.

Um nun die oben aufgeworfene Frage nach einer rein algebraischen Definition eines Fundamentalsystems von Wurzeln der Gleichung $R=0$ oder eines Fundamentalsystems von ψ-Functionen zu beantworten, wäre mit Hilfe der zwischen den Wurzelfunctionen $\sqrt{\psi_\mu}$ und $\sqrt{\varphi_\nu}$ bestehenden Relationen (9) § 30 zu untersuchen, ob die in den Sätzen (IV) und (V) angegebenen, nothwendigen Eigenschaften zur Definition solcher Fundamentalsysteme auch hinreichend sind. Diese Untersuchung für allgemeines p durchzuführen, bietet grosse, algebraische Schwierigkeiten. Wenn aber die Antwort, wie dies für $p=3$ der Fall ist, bejahend ausfällt, so lässt sich noch eine weitere wichtige Frage, nämlich die nach der Zuordnung der Berührungsfunction ψ_μ zu den Charakteristiken μ, auf eine einfachere Art wie früher beantworten. Wir haben in § 30 S. 243 gesehen, wie sich bei gegebenem, kanonischen Querschnittsystem die 2^{2p} Berührungsfunctionen ψ_μ auf algebraischem Wege den 2^{2p} Thetacharakteristiken μ eindeutig zuordnen lassen. Diese Zuordnung ändert sich, sobald man für das ursprüngliche, kanonische Querschnittsystem ein anderes substituirt. Es zeigt sich nun (worauf wir im Abschnitt VIII näher eingehen), dass bei einer solchen Substitution nicht blos der gerade oder ungrade Charakter einer Thetacharakteristik erhalten bleibt, sondern dass auch jedes Fundamentalsystem von Thetacharakteristiken und folglich auch jedes Fundamentalsystem der Wurzeln von $R=0$ und jedes Fundamentalsystem von ψ-Functionen in ein anderes Fundamentalsystem derselben Grössen übergeht und dass umgekehrt zu jeder Ueberführung eines Fundamentalsystems der genannten Elemente in ein anderes eine entsprechende Substitution von einem kanonischen Querschnittsystem durch ein anderes existirt. Hieraus folgt der Satz:

(VII) Man kann bei der Lösung des Umkehrproblems von vornherein einem beliebigen Fundamentalsystem von Thetacharakteristiken μ (18), definirt durch die Relationen (19), ein beliebiges Fundamentalsystem von Berührungsfunctionen ψ_μ zuordnen, definirt durch die in Satz V ausgesprochene, rein algebraische Eigenschaft (vorausgesetzt, dass diese als hinreichend zur Definition eines Fundamentalsystems von Berührungsfunctionen ψ_μ erkannt ist). Für eine jede solche Zuordnung kann man nachträglich das entsprechende, kanonische Querschnittsystem angeben.

Die letzte Betrachtung setzt uns in den Stand, der Lösung des Umkehrproblems oder dem Satze II § 31 eine andere Form zu geben.

Sei wieder (18) ein Fundamentalsystem von Charakteristiken, (24) das zugehörige Fundamentalsystem von Wurzeln von $R=0$ und (25) das zugehörige Fundamentalsystem von ψ-Functionen. Man kann offenbar alle Charakteristiken als wesentliche Combinationen der $2p+1$ ersten Charakteristiken (18) allein, nämlich

$$\mu_0,\ \mu_1,\ \ldots,\ \mu_{2p} \tag{27}$$

darstellen, indem man in den Formen (23) μ_{2p+1} nach (20) durch $\mu_{2\lambda+1}\ldots\mu_{2p}$, also durch eine gerade Zahl von Charakteristiken ersetzt, während μ_{2p+1} selber sich nach (21) durch die Summe der Charakteristiken (27) darstellt. Demgemäss drücken sich alle Wurzeln von $R=0$ rational durch die $2p+1$ ersten Wurzeln (24) und die Coefficientensysteme aller ψ-Functionen rational durch die der $2p+1$ ersten Functionen (25) aus.

Nun waren in (1) alle Berührungsfunctionen ψ_μ dargestellt durch $p+1$ linear unabhängige, adjungirte Functionen $\psi^{(0)}, \psi^{(1)}, \ldots, \psi^{(p)}$ vom Grade $n-2$, die rational in den Coefficienten von $F=0$ und den Coordinaten des Punktes α gebildet sind. Hiernach hat man die den $2p+1$ Charakteristiken (27) entsprechenden Berührungsfunctionen ψ_μ in der Form ($i=0, 1, \ldots, 2p$):

$$\psi_{\mu_i}=\psi^{(0)}+r_1^{(\mu_i)}\psi^{(1)}+\cdots+r_p^{(\mu_i)}\psi^{(p)}, \tag{28}$$

wo das Coefficientensystem $r_1^{(\mu_i)}, \ldots, r_p^{(\mu_i)}$ sich nach (I a) rational ausdrückt in den Coefficienten von $F=0$, in den Coordinaten des Punktes α und in der zur Charakteristik μ_i gehörigen Wurzel $r^{(\mu_i)}$ der Gleichung $R=0$, deren Coefficienten ebenfalls die Coefficienten von F und die Coordinaten von α rational enthalten. Eliminirt man aus den $2p+1$ Gleichungen (28) die Functionen $\psi^{(0)}, \psi^{(1)}, \ldots, \psi^{(p)}$, so erhält man p Gleichungen von der Form ($m=1, \ldots, p$):

$$\psi_{\mu_{p+m}}=r_{0m}\psi_{\mu_0}+\cdots+r_{pm}\psi_{\mu_p}. \tag{29}$$

Bezieht man ebenso alle übrigen Functionen des Berührungssystemes ψ_μ auf die $p+1$ Functionen $\psi_{\mu_0}, \ldots, \psi_{\mu_p}$, so drücken sich die Coefficientensysteme und ebenso die rationalen und symmetrischen Functionen der Coordinaten der Berührungspunkte einer jeden solchen Function ψ_μ rational durch die $p(p+1)$ Coefficienten r_{im} in (29) aus. Dies angewandt auf die Gleichung (14), § 31, gibt folgende Ergänzung des Satzes II § 31:

(VIII) In der Lösung (14) § 31 des Umkehrproblems lassen sich die auf der rechten Seite auftretenden Functionen ausdrücken durch die $p+1$ Functionen $\psi_{\mu_0}, \psi_{\mu_1}, \ldots, \psi_{\mu_p}$

ferner alle dabei auftretenden Coefficientensysteme und ebenso die rationalen und symmetrischen Functionen der Berührungspunkte jeder ψ-Curve rational darstellen durch die Coefficienten von $F=0$, die Coordinaten des Punktes α und die $p(p+1)$ Coefficienten, welche die linearen Relationen (29) zwischen $2p+1$ ψ-Functionen eines Fundamentalsystems vermitteln.

Legt man statt der Gleichung (14) § 31 die Gleichung (19) oder (21) § 31 der Lösung des Umkehrproblems zu Grunde, so hat man, statt mit den allgemeinen ψ-Functionen, nur mit den von α ganz unabhängigen, für eindeutige Transformation invarianten φ-Functionen zu operiren und wird dem entsprechend zu den Charakteristiken (27) möglichst viel ungrade nehmen. Nun gibt es nach (22) nur für bestimmte Werthe von p Fundamentalsysteme, die $2p+1$ ungrade Charakteristiken enthalten. Wohl aber lassen sich für alle Werthe von p mit Hilfe der Fundamentalsysteme andere Systeme von $2p+1$ ungraden Charakteristiken bilden, deren wesentliche Combinationen sämmtliche Charakteristiken ergeben. Ihnen entsprechen solche Systeme von $2p+1$ Functionen φ, durch deren Coefficientensysteme sich die Coefficientensysteme aller übrigen φ-Functionen rational ausdrücken. Es würde sich dann noch um die Frage handeln, ob die Gleichung $F=0$ durch ein solches System von $2p+1$ Functionen φ eindeutig bestimmt ist und ob sich die Coefficienten von $F=0$ ebenfalls rational durch die $p(p+1)$ Coefficienten, welche die linearen Relationen zwischen solchen $2p+1$ φ-Functionen vermitteln, ausdrücken lassen, ob man also diese $p(p+1)$ Coefficienten allein als das System der Klassenmoduln ansehen kann. Auch diese Untersuchung, die an die Relationen (10) § 30 zwischen den Wurzelfunctionen $\sqrt{\varphi_\nu}$ anzuschliessen hat, ist bis jetzt nur für $p=3$ durchgeführt und die Antwort bejahend.

Wir gehen auf die Behandlung des Falles $p=3$ etwas näher ein.

Für $p=3$ ist $F(x)=0$ eine Curve 4. Grades ohne singuläre Punkte ($n=4$; $r=0$); die Zahl der Klassenmoduln (§ 22) ist $3p-3=6$. Die den ungraden Charakteristiken ν entsprechenden Berührungscurven $\varphi_\nu(x)=0$ (§ 29) sind vom Grade $n-3=1$; sie berühren $F=0$ in $p-1=2$ Punkten; ihre Zahl ist $2^{p-1}(2^p-1)=28$. Es sind dies die 28 Doppeltangenten der Curve 4. Ordnung. Für $p=3$ kann ein Fundamentalsystem nach (22) d. § $2p+1=7$ ungrade Charakteristiken $\nu_1, .., \nu_7$ enthalten, deren Summe $\equiv 0$ ist. Ihnen entsprechen 7 unter den 28 Doppeltangenten von der Art, dass niemals die Berührungspunkte von dreien derselben auf einem Kegel-

schnitt liegen (Satz VI). Umgekehrt lässt sich zeigen, dass durch 7 solcher Doppeltangenten die Curve $F=0$ eindeutig bestimmt ist. Drückt man die 4 letzten Doppeltangenten des Fundamentalsystems durch die 3 ersten aus, so hat man die (29) entsprechenden Gleichungen ($m=1, \ldots, 4$):

$$\psi_{\nu_{3+m}} = r_{1m}\varphi_{\nu_1} + r_{2m}\varphi_{\nu_2} + r_{3m}\varphi_{\nu_3}$$

mit $p(p+1)=12$ Coefficienten. Von diesen kann man die drei letzten r_{14}, r_{24}, r_{34} gleich 1 setzen. Zwischen den übrigen 9 Coefficienten bestehen, wie die Gleichungen (10) § 30, deren jede für $p=3$ die Gleichung $F=0$ ersetzen kann, zeigen, drei algebraische Relationen. Die 6 unabhängigen Coefficienten sind die oben erwähnten 6 Klassenmoduln. Durch die 3 Functionen $\varphi_{\nu_1}, \varphi_{\nu_2}, \varphi_{\nu_3}$ lassen sich nun sämmtliche 28 Doppeltangenten φ_ν linear ausdrücken; die Coefficienten in dieser Darstellung sind rationale Functionen der 9 Coefficienten r_{im} oder algebraische Functionen der 6 Klassenmoduln. Zur Lösung des Umkehrproblems hat man die zugehörigen Wurzelfunctionen $\sqrt{\varphi_\nu}$ in die Gleichungen (19) oder (21) § 31 einzuführen und die Constante $C_{\mu\nu}$ in der früher angegebenen Weise zu bestimmen.

Die Litteratur, die sich auf diese Behandlung des Falles $p=3$ bezieht, ist im Wesentlichen folgende. Die Gruppirung der 28 Doppeltangenten der Curve 4. Ordnung ist zuerst untersucht von Hesse, Journ. für Math. Bd. 49, S. 243 u. 273 (1853) und von Steiner (ibid. S. 265). Riemann (Ges. W. S. 459 ff.) hat durch Zuordnung der 28 Doppeltangenten zu den 28 ungraden Thetacharakteristiken die Uebersicht über ihre Gruppirung erleichtert und die Gleichungen der 28 Doppeltangenten oder die linearen Relationen zwischen den Berührungsfunctionen φ_ν in einfacher Form aufgestellt. Herr Weber (Ab. Funct. $p=3$ S. 85 ff.) vereinfacht die Herleitung noch weiter mit Hilfe der Fundamentalsysteme von 7 Charakteristiken, deren Summe $\equiv 0$ ist (dort „vollständige“ Systeme genannt) und gibt (l. c. S. 153 ff.) die Einführung der Wurzelfunctionen $\sqrt{\varphi_\nu}$ in die Gleichung (19) § 31 mit den zugehörigen Constantenbestimmungen. Herr Schottky (Abriss einer Theorie der Ab. F. von 3 Variabeln, Leipzig 1880) entwickelt die Relationen zwischen den Functionen $\sqrt{\varphi_\nu}$ und die Lösung des Umkehrproblems unmittelbar aus dem Additionstheorem der Thetafunctionen.

§ 33. Die Normalintegrale 1. Gattung und die Thetamoduln.

Die zweite Frage, die nach der Schlussbemerkung von § 31 für das Umkehrproblem zu erledigen ist, betrifft die Bestimmung gewisser transcendenter Elemente, nämlich der p Normalintegrale

1. Gattung u_h und der Thetamoduln a_{hk}, die bei der Aufstellung der Formeln in § 31 als gegeben vorausgesetzt wurden. Zur Bestimmung dieser beiden Elemente hätte man, wie in § 15 angegeben wurde, p beliebige, linear unabhängige Integrale 1. Gattung $v_1, \ldots, v_p$ zu bilden, die Periodicitätsmoduln A_{mn} und B_{mn} von v_n an den Querschnitten a_m und b_m durch bestimmte, zwischen den Verzweigungspunkten verlaufende Integrale auszudrücken und durch lineare Combination der v p neue Integrale $u_1, \ldots, u_p$ herzuleiten, von denen u_h an den Querschnitten a_k die Periodicitätsmoduln 0, nur an a_h den Modul πi hat. Die Integrale u_h sind alsdann die Normalintegrale 1. Gattung und ihre Periodicitätsmoduln a_{kh} an den Querschnitten b_k die Thetamoduln (§ 27 S. 218). Diese Operationen lassen sich in der That bei den hyperelliptischen und ähnlichen, explicite gegebenen Integralen in der angegebenen Weise vollständig durchführen[1]). Im allgemeinen Falle aber wird man dieselben durch andere zu ersetzen suchen[2]).

Wir ziehen zunächst einige Folgerungen aus der Gleichung (5) § 30, nämlich

$$\frac{\vartheta_\mu(u_1, \ldots, u_p)}{\vartheta_\nu(u_1, \ldots, u_p)} = c_{\mu\nu} \sqrt{\frac{\psi_\mu(x)}{\psi_\nu(x)}}, \tag{1}$$

indem wir $x = \alpha$ setzen. Wir unterscheiden hierbei nach dem Charakter von μ und ν drei Fälle und ersetzen jedesmal die Gleichung (1) durch Zufügung gewisser Constanten durch eine andere Gleichung, wobei sich nur die Bedeutung der Constanten $c_{\mu\nu}$ ändert; wir schreiben daher $e_{\mu\nu}$ statt $c_{\mu\nu}$.

1. Fall. μ und ν sind beide gerade Charakteristiken. Wir schreiben die Gleichung (1) in der Form

$$\frac{\vartheta_\mu(u_1, \ldots, u_p)}{\vartheta_\nu(u_1, \ldots, u_p)} = e_{\mu\nu} \sqrt{\frac{\psi_\mu(x)\,\psi_\mu(\alpha)}{\psi_\nu(x)\,\psi_\nu(\alpha)}}. \tag{2}$$

Die Substitution $x = \alpha$ ergibt, wenn zur Abkürzung $\vartheta_\mu(0, \ldots, 0) = \vartheta_\mu$ gesetzt wird,

$$\frac{\vartheta_\mu}{\vartheta_\nu} = e_{\mu\nu} \frac{\psi_\mu(\alpha)}{\psi_\nu(\alpha)}. \tag{3}$$

2. Fall. μ und ν sind beide ungrade Charakteristiken. Dann ist $\psi_\mu(x) = (\alpha x)\,\varphi_\mu(x)$ und $\psi_\nu(x) = (\alpha x)\,\varphi_\nu(x)$; ferner $\alpha_p^\mu = \alpha$ und $\alpha_p^\nu = \alpha$ (§ 29). Wir schreiben an Stelle von (1)

---

1) Vgl. z. B. Prym, Theorie der Functionen in einer zweiblättr. Fläche Zürich 1866. S. 5 ff. Thomae, Ueber eine specielle Klasse Abel'scher Functionen Halle 1877. S. 11 ff.

2) H. Stahl, Diss. Berlin. 1882. S. 30 ff.

$$(4)\qquad \frac{\vartheta_\mu(u_1,\ldots,u_p)}{\vartheta_\nu(u_1,\ldots,u_p)} = e_{\mu\nu}\sqrt{\frac{\varphi_\mu(x)\,\varphi_\mu(\alpha)}{\varphi_\nu(x)\,\varphi_\nu(\alpha)}}.$$

Hier ist $e_{\mu\nu}$ wie von x so auch von α unabhängig, weil die Function der linken wie der rechten Seite für x und α symmetrisch ist und φ_μ und φ_ν unabhängig von α sind. Setzt man $x=\alpha$, so nimmt die linke Seite die Form $0:0$ an. Man hat also Zähler und Nenner einzeln nach x zu differenziren und dann $x=\alpha$ zu setzen. Mit Hilfe der Bezeichnung $(i=1,\ldots,p)$:

$$(5)\qquad \left[\frac{\partial\vartheta_\mu(u_1,\ldots,u_p)}{\partial u_i}\right]_{u_1=0,\ldots,u_p=0} = \vartheta_\mu^{(i)}$$

und mit Rücksicht auf die aus (10) § 15 hervorgehenden Gleichungen

$$(6)\qquad \frac{du_1}{dx} = \frac{f_1(x)}{F'y},\ \ldots,\ \frac{du_p}{dx} = \frac{f_p(x)}{F'y}$$

erhält man

$$(7)\qquad \frac{\sum\limits_i \vartheta_\mu^{(i)} f_i(\alpha)}{\sum\limits_i \vartheta_\nu^{(i)} f_i(\alpha)} = e_{\mu\nu}\frac{\varphi_\mu(\alpha)}{\varphi_\nu(\alpha)}.$$

Da α ein ganz beliebiger Punkt der Curve $F=0$ und $e_{\mu\nu}$ unabhängig von α ist, so muss die Gleichung (7) für jeden Punkt der Curve $F(x)=0$ eine identische Gleichung sein. Folglich hat man für jede ungrade Charakteristik ν:

$$(8)\qquad \varphi_\nu(x) = a_\nu \sum_i \vartheta_\nu^{(i)} f_i(x),$$

wo a_ν eine zu der ungraden Charakteristik ν gehörige, von α unabhängige Constante ist. Durch die Gleichung (8) sind die Functionen $\varphi_\nu(x)$ in der § 29 (15) angegebenen Form, jede bis auf einen noch zu bestimmenden Factor a_ν, dargestellt. Nach (7) und (8) ist $e_{\mu\nu} = a_\nu : a_\mu$.

3. Fall. μ ist eine gerade, ν eine ungrade Charakteristik. Dann ist $\psi_\nu(x) = (\alpha x)\,\varphi_\nu(x)$ und $\alpha_p^\nu = \alpha$. Hier muss man ausser den ψ-Functionen noch andere Elemente von $F(x)=0$ zuziehen. Wir schreiben an Stelle von (1)

$$(9)\qquad \frac{\vartheta_\mu(u_1,\ldots,u_p)}{\vartheta_\nu(u_1,\ldots,u_p)} = \frac{e_{\mu\nu}}{\sqrt{(\alpha x)}}\sqrt{\frac{\psi_\mu(x)\,\psi_\mu(\alpha)}{\varphi_\nu(x)\,\varphi_\nu(\alpha)}}.$$

Setzt man $x=\alpha$, so verschwinden $\vartheta_\nu(u_1,\ldots,u_p)$ und $\sqrt{(\alpha x)}$, jedes in 1. Ordnung. Es handelt sich also um die Werthbestimmung des Quotienten dieser zwei Functionen, wozu eine Entwicklung von

$F(x) = 0$ oder $F(x, y) = 0$ in der Nähe des Punktes α nöthig ist. Dieselbe lautet, wenn man die Coordinaten von α durch (α, β) bezeichnet und der Einfachheit halber (α, β) als einen regulären Punkt der Fläche T voraussetzt:

$$F(x, y) = (x - \alpha) F'(\alpha) + (y - \beta) F'(\beta)$$
$$+ \frac{1}{2}[(x-\alpha)^2 F''(\alpha,\alpha) + 2(x-\alpha)(y-\beta) F''(\alpha,\beta) + (y-\beta)^2 F''(\beta,\beta)] + \cdots$$

Nimmt man nun den Ausdruck (αx) für die Tangente des Punktes α in der Form an

$$(\alpha x) = (x - \alpha) F'(\alpha) + (y - \beta) F'(\beta),$$

so hat man in der Umgebung von α

$$\sqrt{(\alpha x)} = \frac{T}{F'(\beta)}(x - \alpha), \quad \left(\frac{d\sqrt{(\alpha x)}}{dx}\right)_{x=\alpha} = \frac{T}{F'(\beta)},$$

wo

$$T^2 = -\frac{1}{2}[F''(\alpha,\alpha)F'(\beta)F'(\beta) - 2F''(\alpha,\beta)F'(\alpha)F'(\beta) + F''(\beta,\beta)F'(\alpha)F'(\alpha)].$$

Ferner ist nach (5) und (6)

$$\left[\frac{d\vartheta_\nu(u_1, \ldots, u_p)}{dx}\right]_{\substack{x=\alpha \\ y=\beta}} = \frac{\sum_{i=1}^{p} \vartheta_\nu^{(i)} f_i(\alpha)}{F'(\beta)}.$$

Aus (9) folgt daher, wenn man $x = \alpha$ setzt,

$$\sum_{i=1}^{p} \vartheta_\nu^{(i)} f_i(\alpha) = \frac{T \varphi_\nu(\alpha)\, \vartheta_\mu}{e_{\mu\nu}\, \psi_\mu(\alpha)}, \tag{10}$$

oder, wenn man von Gleichung (8) Gebrauch macht,

$$\alpha_\nu = \frac{e_{\mu\nu}\, \psi_\mu(\alpha)}{T\, \vartheta_\mu}. \tag{11}$$

Nach diesen Vorbereitungen gehen wir über zu der allgemeinen Gleichung (14) § 31, nämlich:

$$\frac{\vartheta_\mu(U_1, \ldots, U_p)}{\vartheta_\nu(U_1, \ldots, U_p)} = C_{\mu\nu} \frac{\Psi_\mu(x, x_1, \ldots, x_p)}{\Psi_\nu(x, x_1, \ldots, x_p)} \prod_{i=0}^{p} \frac{\Psi_\nu(x_i)}{\Psi_\mu(x_i)} \sqrt{\frac{\psi_\mu(x_i)}{\psi_\nu(x_i)}}, \tag{12}$$

in welcher $(h = 1, \ldots, p)$:

$$U_h = \int_{\alpha}^{x} du_h + \sum_{i=1}^{p} \int_{\alpha_i^0}^{x_i} du_h. \tag{13}$$

Aus der Bildung der Ψ als Functionen von x geht hervor, dass der Quotient

(14a) $$\Psi_\mu(x, x_1, .., x_p) : \Psi_\mu(x)$$
$$= 0^1 \text{ in den } 2p \text{ Punkten } x_i \text{ und } y_i;$$
$$= \infty^1 \text{ in den } 2p \text{ Punkten } \alpha_i^0 \text{ und } \alpha_i^\mu$$

und der Quotient

(14b) $$\Psi_\nu(x, x_1, .., x_p) : \Psi_\nu(x)$$
$$= 0^1 \text{ in den } 2p \text{ Punkten } x_i \text{ und } z_i;$$
$$= \infty^1 \text{ in den } 2p \text{ Punkten } \alpha_i^0 \text{ und } \alpha_i^\nu$$

ist. Die Punkte y_i und z_i waren mit x_i verbunden durch die Congruenzen (4) § 31, die wir schreiben $(i, h = 1, .., p)$:

(15) $$\begin{cases} \sum_i \int_{\alpha_i^0}^{y_i} du_h + \sum_i \int_{\alpha_i^0}^{x_i} du_h \equiv \sum_i \int_{\alpha_i^0}^{\alpha_i^\mu} du_h \equiv \frac{A_h^\mu}{2} \\ \sum_i \int_{\alpha_i^0}^{z_i} du_h + \sum_i \int_{\alpha_i^0}^{x_i} du_h \equiv \sum_i \int_{\alpha_i^0}^{\alpha_i^\nu} du_h \equiv \frac{A_h^\nu}{2}. \end{cases}$$

Wir bestimmen zuerst die Constante $C_{\mu\nu}$ in (12). (Vgl. S. 251.)

Lässt man erstens die Punkte $x_1, .., x_p$ zusammenfallen mit $\alpha_1^0, .., \alpha_p^0$, so kommt die Gleichung (12) auf die Gleichung (1) zurück. Denn nach (15) fallen alsdann die Punkte y_i mit α_i^μ und die Punkte z_i mit α_i^ν zusammen, so dass sich die beiden Quotienten (14a) und (14b) auf Constanten reduciren, die durch die angegebene Substitution vollkommen bestimmt sind.

Lässt man zweitens die Punkte $x_1, .., x_p$ zusammenfallen mit $\alpha_1^{\mu\nu}, .., \alpha_p^{\mu\nu}$, die bestimmt sind durch die Congruenzen $(h = 1, .., p)$:

(16) $$\sum_i \int_{\alpha_i^0}^{\alpha_i^{\mu\nu}} du_h \equiv \frac{A_h^\mu}{2} + \frac{A_h^\nu}{2},$$

so erhält man abermals die Gleichung (1), nur in reciproker Form. Denn nach (15) und (16) fallen alsdann die Punkte y_i mit α_i^ν, die Punkte z_i mit α_i^μ zusammen. Daher wird der Quotient

$$\Psi_\mu(x, x_1, .., x_p)\, \Psi_\nu(x) : \Psi_\nu(x, x_1, .., x_p)\, \Psi_\mu(x)$$

als Function von x gleich 0^2 in den p Punkten α_i^ν und gleich ∞^2 in den p Punkten α_i^μ. Er geht also, abgesehen von einer Constanten, über in $\psi_\nu(x) : \psi_\mu(x)$ und die rechte Seite von (12) erhält, abgesehen von

einer Constanten, die Form $\sqrt{\psi_\nu(x) : \psi_\mu(x)}$. Andrerseits geht der Thetaquotient der linken Seite in (12) nach (40) § 26 über in

$$\tau_\nu \vartheta_\nu(u_1, \ldots, u_p) : \tau_\mu \vartheta_\mu(u_1, \ldots, u_p),$$

wo $\tau_\nu : \tau_\mu$ einen der Werthe $+1$ oder -1 hat.

Durch die beiden Substitutionen $x_i = \alpha_i^0$ und $x_i = \alpha_i^{\mu\nu}$ $(i = 1, \ldots, p)$ ergeben sich also aus (12) zwei Gleichungen der Form (1), nämlich:

$$\frac{\vartheta_\mu(u_1, \ldots, u_p)}{\vartheta_\nu(u_1, \ldots, u_p)} = \frac{C_{\mu\nu}}{G_{\nu\mu}} \sqrt{\frac{\psi_\mu(x)}{\psi_\nu(x)}}, \qquad \frac{\vartheta_\nu(u_1, \ldots, u_p)}{\vartheta_\mu(u_1, \ldots, u_p)} = \frac{C_{\mu\nu}}{G_{\mu\nu}} \sqrt{\frac{\psi_\nu(x)}{\psi_\mu(x)}}. \tag{17}$$

Hier sind $G_{\mu\nu}$ und $G_{\nu\mu}$ vollkommen bestimmte Ausdrücke, algebraisch und symmetrisch für jedes einzelne System der Berührungspunkte α_i^0, α_i^μ, α_i^ν, $\alpha_i^{\mu\nu}$ oder nach (VI) § 20 nur der Punkte α_i^0, α_i^μ, α_i^ν, oder endlich nach (7) § 32 algebraisch in den Wurzeln $r^{(0)}$, $r^{(\mu)}$ und $r^{(\nu)}$ von $R = 0$. Vergleicht man aber die Gleichungen (17) mit (1), so folgt $C_{\mu\nu} : G_{\nu\mu} = c_{\mu\nu}$ und $C_{\mu\nu} : G_{\mu\nu} = 1 : c_{\mu\nu}$. Daher ist

$$C_{\mu\nu}^2 = G_{\mu\nu} G_{\nu\mu}, \quad c_{\mu\nu}^2 = G_{\mu\nu} : G_{\nu\mu} \tag{18}$$

und man hat den Satz:

(I) Die Constanten $c_{\mu\nu}$ in (1) und $C_{\mu\nu}$ in (12) sind bis auf das Vorzeichen algebraisch vollkommen bestimmt, sobald man das System der Berührungsfunctionen ψ und φ kennt und seine Zuordnung zu den zweitheiligen Charakteristiken. Das Vorzeichen von $c_{\mu\nu}$ und $C_{\mu\nu}$ ist durch directe Vergleichung der beiden Seiten in (1) und (12) zu ermitteln.

Mit Hilfe der Gleichungen (18) ergeben sich nun Relationen zur Bestimmung der Thetamoduln a_{hk} und der Normalintegrale 1. Gattung u_h. Hierzu unterscheiden wir, wie oben, drei Fälle, indem wir die Gleichungen (17) entweder auf die Form (2) oder (4) oder (9) bringen. Da sich hierbei die Bedeutung von G etwas ändert, ersetzen wir G durch H. Ebenso wie die Gleichungen (18), erhält man in jedem der drei Fälle die Relation $C_{\mu\nu} : H_{\nu\mu} = e_{\mu\nu}$ und $C_{\mu\nu} : H_{\mu\nu} = 1 : e_{\mu\nu}$, woraus

$$e_{\mu\nu}^2 = H_{\mu\nu} : H_{\nu\mu}. \tag{19}$$

Vergleicht man diesen Werth mit den früheren Werthen von $e_{\mu\nu}$, so folgt:

1) wenn μ und ν beide gerade sind, aus (3)

$$\frac{\vartheta_\mu}{\vartheta_\nu} = \frac{\psi_\mu(\alpha)}{\psi_\nu(\alpha)} \sqrt{\frac{H_{\mu\nu}}{H_{\nu\mu}}}, \tag{20}$$

d. i. die algebraische Darstellung des Quotienten zweier geraden Thetafunctionen;

2) wenn μ und ν beide ungrade sind aus (7) und (8)

$$\frac{a_\nu}{a_\mu} = \sqrt{\frac{H_{\mu\nu}}{H_{\nu\mu}}}, \tag{21}$$

d. i. die algebraische Darstellung des Quotienten von zwei der in (8) noch unbestimmt gebliebenen Factoren a_ν;

3) wenn μ gerade, ν ungrade ist, aus (11)

$$a_\nu = \frac{\psi_\mu(\alpha)}{T\vartheta_\mu} \sqrt{\frac{H_{\mu\nu}}{H_{\nu\mu}}}, \tag{22}$$

d. i. die Darstellung des in (8) auftretenden Factors a_ν in einer aus transcendenten und algebraischen Elementen gemischten Form.

In den Gleichungen (20) bis (22) müssen die Ausdrücke auf der rechten Seite von α unabhängig sein, da es die Ausdrücke auf der linken Seite sind. Durch diese Gleichungen wird die Frage nach den Thetamoduln und den Normalintegralen in folgender Weise gelöst:

(II) Die Thetamoduln a_{hk} lassen sich aus algebraischen Elementen näherungsweise berechnen mittels der Gleichungen (20); aus den Werthen der a_{hk} kann man alsdann auch den Werth der Grössen ϑ_μ selber annähernd berechnen.

(III) Die Zähler $f_i(x)$ der Normalintegrale u_i bestimmen sich aus den Gleichungen (8), wenn man die Factoren a_ν aus (22) eingeführt hat; die Berührungsfunctionen ψ_μ und φ_ν sind bereits in § 32 bestimmt.

Es schliessen sich noch zwei Bemerkungen an. Die erste derselben bezieht sich auf eine Darstellung der Thetamoduln a_{hk} und der Quotienten $a_\mu : a_\nu$ durch die invarianten Klassenmoduln von $F(x, y) = 0$ (s. § 22). Die Grössen a_{hk}, $a_\mu : a_\nu$ und a_ν sind, wie schon bemerkt, unabhängig von dem Punkte α. Die beiden ersten Elemente sind aber auch unabhängig von einer bestimmten Form der Gleichung $F(x, y) = 0$, während der Werth von a_ν selber von der Form von $F(x, y) = 0$ abhängig bleibt. In der That lassen sich die Grössen a_{hk} und $a_\mu : a_\nu$ allein durch diejenigen Coefficientensysteme ausdrücken, welche die linearen Beziehungen zwischen den Berührungsfunctionen φ vermitteln. Diese Coefficientensysteme sind aber nach (I) § 23 unabhängig von einer

bestimmten Form von $F(x, y) = 0$ und die nämlichen für alle Gleichungen, in die $F = 0$ durch eindeutige Transformation übergeführt werden kann; mit anderen Worten die Grössen a_{hk} und $a_\mu : a_\nu$ sind Functionen der invarianten Klassenmoduln.

Um dies zu zeigen[1]), bilde man für 2 mal p verschiedene, ungrade Charakteristiken μ_h und ν_h $(h = 1, .., p)$ die Gleichung (8), indem man setzt (die Summationen in den folgenden Gleichungen sind stets von 1 bis p zu nehmen):

$$\varphi_{\mu_h} = a_{\mu_h} \sum_i \vartheta^{(i)}_{\mu_h} f_i, \quad \varphi_{\nu_h} = a_{\nu_h} \sum_i \vartheta^{(i)}_{\nu_h} f_i \tag{23}$$

und definire zwei weitere Functionen des Berührungssystems φ durch die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} \varphi_\mu &= a_\mu \sum_i \vartheta^{(i)}_\mu f_i = \sum_h r_{\mu_h} \varphi_{\mu_h} = \sum_h s_{\nu_h} \varphi_{\nu_h}, \\ \varphi_\nu &= a_\nu \sum_i \vartheta^{(i)}_\nu f_i = \sum_h \varrho_{\mu_h} \varphi_{\mu_h} = \sum_h \sigma_{\nu_h} \varphi_{\nu_h}, \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

wobei die Coefficienten r, s, ϱ, σ als bekannt vorausgesetzt werden. Durch Einführung der Werthe (23) in die Gleichungen (24) und durch Vergleichung der Coefficienten von f_i erhält man $(i, h = 1, .., p)$:

$$\left.\begin{aligned} \sum_h r_{\mu_h} a_{\mu_h} \vartheta^{(i)}_{\mu_h} &= \sum_h s_{\nu_h} a_{\nu_h} \vartheta^{(i)}_{\nu_h} = a_\mu \vartheta^{(i)}_\mu, \\ \sum_h \varrho_{\mu_h} a_{\mu_h} \vartheta^{(i)}_{\mu_h} &= \sum_h \sigma_{\nu_h} a_{\nu_h} \vartheta^{(i)}_{\nu_h} = a_\nu \vartheta^{(i)}_\nu. \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

Setzt man zur Abkürzung

$$\sum \pm \vartheta^{(1)}_{\mu_1} \vartheta^{(2)}_{\mu_2} \cdot \cdot \vartheta^{(p)}_{\mu_p} = \Delta(\mathsf{M}),$$

und bezeichnet mit $\Delta_h(\mathsf{M})_\nu$ diejenige Determinante, die aus $\Delta(\mathsf{M})$ hervorgeht, wenn man die Charakteristik μ_h durch ν ersetzt, so gibt die Auflösung des Systems (25)

$$\Delta(\mathsf{M})\, r_{\mu_h} a_{\mu_h} = a_\mu \Delta_h(\mathsf{M})_\mu, \quad \Delta(\mathsf{N})\, s_{\nu_h} a_{\nu_h} = a_\mu \Delta_h(\mathsf{N})_\mu,$$

$$\Delta(\mathsf{M})\, \varrho_{\mu_h} a_{\mu_h} = a_\nu \Delta_h(\mathsf{M})_\nu, \quad \Delta(\mathsf{N})\, \sigma_{\nu_h} a_{\nu_h} = a_\nu \Delta_h(\mathsf{N})_\nu.$$

Durch Elimination von a_{μ_h} und a_{ν_h} folgt

$$\frac{r_{\mu_h}}{\varrho_{\mu_h}} = \frac{a_\mu}{a_\nu} \frac{\Delta_h(\mathsf{M})_\mu}{\Delta_h(\mathsf{M})_\nu}, \quad \frac{s_{\nu_h}}{\sigma_{\nu_h}} = \frac{a_\mu}{a_\nu} \frac{\Delta_h(\mathsf{N})_\mu}{\Delta_h(\mathsf{N})_\nu}$$

und hieraus

1) Vgl. Weber, Ab. F. $p = 3$. S. 103—110.

$$(26)\qquad \frac{r_{\mu_h}\sigma_{\nu_h}}{\varrho_{\mu_h}s_{\nu_h}} = \frac{\varDelta_h(\mathsf{M})_\mu \varDelta_h(\mathsf{N})_\nu}{\varDelta_h(\mathsf{M})_\nu \varDelta_h(\mathsf{N})_\mu}, \qquad \frac{a_\mu^2}{a_\nu^2} = \frac{r_{\mu_h}s_{\nu_h}}{\varrho_{\mu_h}\sigma_{\nu_h}} \frac{\varDelta_h(\mathsf{M})_\nu \varDelta_h(\mathsf{N})_\nu}{\varDelta_h(\mathsf{M})_\mu \varDelta_h(\mathsf{N})_\mu}.$$

Die erste dieser Gleichungen drückt den Quotienten zweier Producte gewisser p-gliedriger Determinanten, gebildet aus den Ableitungen ungrader Thetafunctionen, durch die Coefficientensysteme der zwischen den Berührungsfunctionen φ bestehenden Gleichungen aus; sie gibt also eine annähernde Bestimmung der Thetamoduln a_{hk} durch invariante Elemente. Die zweite Gleichung (26) drückt den früher rein algebraisch dargestellten Quotienten $a_\mu : a_\nu$ ebenfalls durch die Coefficientensysteme der φ-Relationen und durch die zuvor bestimmten Thetamoduln a_{hk} aus. Verbindet man die letzte Gleichung (26) mit (21), so erhält man eine rein algebraische Darstellung der Quotienten $\varDelta_h(\mathsf{M})_\mu : \varDelta_h(\mathsf{M})_\nu$.

Eine zweite Bemerkung bezieht sich auf die Darstellung von $\vartheta_\mu(0, .., 0) = \vartheta_\mu$ durch gewisse algebraische und transcendente Elemente. Schreibt man die Gleichung (10), in der μ eine gerade, ν eine ungrade Charakteristik ist:

$$\sum_i \vartheta_\nu^{(i)} f_i(\alpha) = P_{\mu\nu}\vartheta_\mu,$$

wo $P_{\mu\nu}$ ein algebraischer Ausdruck ist, setzt für α der Reihe nach p verschiedene Punkte $\alpha', \alpha'', .., \alpha^p$, die nicht auf einer adjungirten Curve des $n-3^{\text{ten}}$ Grades liegen und bezeichnet die entsprechenden Werthe von $P_{\mu\nu}$ mit $P'_{\mu\nu}, .., P^p_{\mu\nu}$, so hat man ($k = 1, .., p$):

$$\sum_i \vartheta_\nu^{(i)} f_i(\alpha^k) = P^k_{\mu\nu}\vartheta_\mu.$$

Bildet man diese p Gleichungen für p verschiedene, ungrade Charakteristiken $\nu_1, .., \nu_p$, so folgt

$$\begin{vmatrix} \vartheta^{(1)}_{\nu_1} & . & . & \vartheta^{(p)}_{\nu_1} \\ . & . & . & . \\ \vartheta^{(1)}_{\nu_p} & . & . & \vartheta^{(p)}_{\nu_p} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} f_1(\alpha') & . & . & f_p(\alpha') \\ . & . & . & . \\ f_1(\alpha^p) & . & . & f_p(\alpha^p) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} P'_{\mu\nu_1} & . & . & P'_{\mu\nu_p} \\ . & . & . & . \\ P^p_{\mu\nu_1} & . & . & P^p_{\mu\nu_p} \end{vmatrix} (\vartheta_\mu)^p,$$

oder in abgekürzter Schreibweise ($i, k = 1, .., p$):

$$(27)\qquad \left|\vartheta^{(k)}_{\nu_i}\right| \left|f_i(\alpha^k)\right| = \left|P^k_{\mu\nu_i}\right| (\vartheta_\mu)^p.$$

Ist nun (Gl. 5 § 15) $v_1, .., v_p$ ein beliebiges System von p linear unabhängigen Integralen 1. Gattung, sind $\varphi_1, .., \varphi_p$ die Zähler in den-

selben und sind die Periodicitätsmoduln A_{ik}, B_{ik} derselben gegeben durch das Schema (13) § 15, so hat man nach (17) § 15:

$$\pi i v_1 = \sum_i A_{i1} u_i, \ldots, \pi i v_p = \sum_i A_{ip} u_i,$$

also

$$\pi i \varphi_1(\alpha) = \sum_i A_{i1} f_i(\alpha), \ldots, \pi i \varphi_p(\alpha) = \sum_i A_{ip} f_i(\alpha).$$

Bildet man auch dieses System für die p Punkte $\alpha', \alpha'', .., \alpha^p$, so folgt

$$(\pi i)^p \begin{vmatrix} \varphi_1(\alpha') & .. & \varphi_p(\alpha') \\ . & . & . \\ \varphi_1(\alpha^p) & .. & \varphi_p(\alpha^p) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_{11} & .. & A_{p1} \\ . & . & . \\ A_{1p} & .. & A_{pp} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} f_1(\alpha') & .. & f_p(\alpha') \\ . & . & . \\ f_1(\alpha^p) & .. & f_p(\alpha^p) \end{vmatrix},$$

oder abgekürzt geschrieben $(i, k = 1, .., p)$:

$$(\pi i)^p \,|\, \varphi_i(\alpha^k) \,| = |\, A_{ik} \,| \; |\, f_i(\alpha^k) \,|. \tag{28}$$

Bei der Division von (27) durch (28) hebt sich die Determinante $|\, f_i(\alpha^k) \,|$ weg und man erhält

$$\frac{\left| \vartheta^{(k)}_{\nu_i} \right|}{\left| A_{ik} \right|} = \frac{(\vartheta_\mu)^p}{(\pi i)^p} \, \frac{\left| P^k_{\mu \nu_i} \right|}{\left| \varphi_i(\alpha^k) \right|}. \tag{29}$$

Bildet man die Gleichungen (29) für zwei verschiedene gerade Charakteristiken μ und μ' und dasselbe System von ungraden Charakteristiken $\nu_1, .., \nu_p$, so fallen bei der Division dieser Gleichungen durch einander die Determinanten $|\, A_{ik} \,|$ und $|\, \varphi_i(\alpha_k) \,|$ weg und man erhält eine algebraische Darstellung des Quotienten $\vartheta_\mu : \vartheta_{\mu'}$ (s. auch Gl. (20)). Bildet man dagegen die Gleichung (29) für zwei verschiedene Systeme von ungraden Charakteristiken $\nu_1, .., \nu_p$ und $\nu_1', .., \nu_p'$ und dieselbe gerade Charakteristik μ, so gibt die Division eine algebraische Darstellung des Quotienten $\left| \vartheta^{(k)}_{\nu_i} \right| : \left| \vartheta^{(k)}_{\nu_i'} \right|$.

Man erhält noch weitere Darstellungen, wenn man die Theorie der Thetafunctionen zuzieht. Diese gibt[1]) gewisse Relationen (P), die gebildet sind einerseits aus Producten von je $p + 2$ geraden Thetafunctionen von der Form ϑ_{μ_l} und andrerseits aus p-gliedrigen Determinanten mit ungraden Thetafunctionen von der Form $\left| \vartheta^{(k)}_{\nu_i} \right|$, wobei die Fundamentalsysteme von $2p + 2$ Charakteristiken eine Rolle spielen. Aus diesen Gleichungen (P) erhält man durch Division

---

1) Dies gilt wenigstens für die bis jetzt untersuchten Fälle $p = 1, 2, 3, 4$ und den hyperelliptischen Fall von allgemeinem p (s. d. Litteratur S. 281). Für diese Fälle kann man daher auch die algebraische Darstellung der Ausdrücke (30) und (31) vollständig durchführen.

andere Gleichungen (Q), in welche nur Quotienten von Determinanten $|\vartheta_{\nu_i}^{(k)}|$ und von Functionen ϑ_{μ_l} eingehen. Man kann nun zunächst den Gleichungen (26) eine andere Form geben, indem man mittels der Gleichungen (P) die Determinanten auf der rechten Seite in (26) ersetzt durch Ausdrücke, die nur gerade ϑ_{μ_l} enthalten. Man kann ferner die Gleichungen (29) umformen. Eliminirt man nämlich aus den Gleichungen (P) und (29) die Ausdrücke $|\vartheta_{\nu_i}^{(k)}|$ und nimmt die Gleichungen (20) hinzu, so erhält man eine algebraische Darstellung der Functionen

$$(30) \qquad \vartheta_{\mu_l} : \sqrt{|A_{ik}|}.$$

Eliminirt man dagegen aus den Gleichungen (P) und (29) die Functionen ϑ_{μ_l}, so erhält man eine algebraische Darstellung der Ausdrücke

$$(31) \qquad |\vartheta_{\nu_i}^{(k)}| : \sqrt{|A_{ik}|^{p+2}}.$$

Die Durchführung dieser Rechnungen würde eine genauere Kenntniss der Relationen (P) erfordern, die zur Zeit nur für die niedersten Werthe von p ermittelt sind.

Zu den letzten Untersuchungen ist noch folgende Litteratur nachzutragen.

Die im Abschnitt VI enthaltene Lösung des Umkehrproblems entspricht genau dem Verfahren, das in der Theorie der elliptischen Functionen eingeschlagen wird. (Vgl. Einleitung zum II. Theil.) Die Gleichungen des § 31 bilden in mehrfacher Weise Verallgemeinerungen der Gleichungen (5—7) S. 189. Die algebraischen Darstellungen der Functionen (30) entsprechen den drei ersten Gleichungen (9) S. 190, die der Ausdrücke (31) der vierten Gleichung (9) S. 190. Die zu diesen Darstellungen nöthigen, im Vorigen erwähnten Relationen (P) und (Q) sind, wie schon bemerkt, nur für die niedersten Werthe von p bekannt. In der Theorie der elliptischen Functionen beschränken sich die Relationen (P) auf die Gleichung (8) S. 190, nämlich $\pi\vartheta_1\vartheta_2\vartheta_3 = \vartheta'$ (Jacobi, Ges. W. I. S. 516). Für die hyperelliptischen Functionen ($p = 2$) sind die entsprechenden Relationen von Rosenhain (Mém. Sav. Étrang. XI) durch Verallgemeinerung des Jacobi'schen Verfahrens abgeleitet worden. Einen anderen Weg zur Bestimmung der Functionen (30) durch die Klassenmoduln hat Riemann (Ges. W. S. 131) angegeben. In der Verfolgung desselben gelangt Herr Thomae (Journ. für Math. Bd. 66, S. 92 ff. (1865) und Bd. 71, S. 218 (1869)) für die hyperelliptischen Functionen von allgemeinem p zur algebraischen Darstellung von (30). (Vgl. auch

Fuchs, Journ. für Math. Bd. 73, S. 305 und 324. 1871.) Herr Weber hat zuerst den Fall $p = 3$ behandelt (Ab. F. $p = 3$ 1876) und für ihn das Umkehrproblem vollständig gelöst. Er gibt u. A. (l. c. S. 40 ff.) die Relationen (Q), ferner (l. c. S. 103—110; 161 und 167) in etwas anderer Form die obigen Gleichungen (2—26). Herr Schottky (Ab. F. $p = 3$. 1880) leitet für $p = 3$ die Relationen (Q) aus dem Additionstheorem der Thetafunctionen, Herr Frobenius (Journ. für Math. Bd. 98 S. 244 ff. 1884) für $p = 1, 2, 3, 4$ und für den allgemeinen hyperelliptischen Fall die Relationen (P) aus den Eigenschaften der Thetafunctionen ab. Wieder auf anderem Wege hat Herr Klein (Math. Ann. Bd. 36, S. 67 ff. 1889) für $p = 3$ eine elegante Darstellung von (30) durch die Klassenmoduln gegeben. Von Interesse ist, dass Riemann in der in dem Vorwort erwähnten Vorlesung (Winter 1861/2) für $p = 3$ bereits die Relationen (P) und die obigen Gleichungen (26) mitgetheilt hat.

Wir schliessen diesen Abschnitt mit einer allgemeinen Bemerkung[1]). Die Lösung des zur Gleichung $F(x, y) = 0$ gehörigen Umkehrproblems geschieht für $p > 3$ nicht durch die allgemeinsten, sondern durch specielle Thetafunctionen von p Argumenten. Denn für die allgemeinsten Thetafunctionen bestehen zwischen den Thetamoduln a_{hk} nur die $\frac{1}{2}p(p-1)$ Bedingungen $a_{hk} = a_{kh}$ (Gl. 22 § 25), so dass $\frac{1}{2}p(p+1)$ Thetamoduln a_{hk} im Uebrigen unabhängig sind. Für das Jacobi'sche Umkehrproblem bestimmen sich aber die Thetamoduln a_{hk} mittels der Gleichungen (26) durch die $3p-3$ invarianten Klassenmoduln von $F(x, y) = 0$. Von den p^2 Thetamoduln sind daher ebenfalls nur $3p-3$ unabhängig oder es bestehen zwischen ihnen ausser den Bedingungen $a_{hk} = a_{kh}$ noch $\frac{1}{2}p(p+1) - (3p-3) = \frac{1}{2}(p-2)(p-3)$ Relationen (T), die transcendenter Natur und bis jetzt nur für den niedersten Werth $p = 4$ ermittelt sind[2]). Die letzten Relationen geben den bei dem Jacobi'schen Umkehrproblem auftretenden Thetafunctionen und den aus ihnen gebildeten, $2p$-fach periodischen Functionen einen speciellen Charakter, der den allgemeinen, $2p$-fach periodischen Functionen nicht anhaftet.

Wenn daher im Vorstehenden von der Anwendung des Additionstheorems der Thetafunctionen und anderer Thetarelationen die Rede ist, so wird dabei stets das Bestehen und die Kenntniss der obigen Relationen (T) vorausgesetzt.

---

1) Riemann, Ges. W. S. 94.

2) Schottky, Journ. für Math. Bd. 102. S. 321 ff. (1886).

Die Theorie der allgemeinen, $2p$-fach periodischen Functionen, für welche die Moduln a_{hk} nur den Bedingungen $a_{hk} = a_{kh}$ genügen, und der zugehörigen Differentialgleichungen hat bekanntlich zuerst Herr Weierstrass[1]) in Angriff genommen. Die Theorie der allgemeinen Thetafunctionen ist Gegenstand ausgedehnter Untersuchungen der Herren Prym und Krazer[2]). Die erste, eingehendere Behandlung von besonderen Fällen in dieser Richtung hat neuerdings Herr Wirtinger[3]) gegeben.

1) Weierstrass, Journ. für Math. Bd. 89. S. 1 ff. (1879).

2) Prym, Unters. üb. d. Riemann'sche Thetaformel. Leipzig 1882; ferner die Abh. in Journ. für Math. Bd. 93. S. 124 ff. Acta math. III. S. 1—15 und S. 18—40. (1882). Prym u. Krazer, Neue Grundlage e. Theorie d. allgemeinen Thetafunctionen. Leipzig 1892 und Acta math. III. S. 41—77. (1882).

3) Wirtinger, Unters. üb. Thetafunctionen. Leipzig 1895.

Siebenter Abschnitt.

Allgemeine Darstellungen durch Thetafunctionen.

Die im vorigen Abschnitt gegebene Lösung des Jacobi'schen Umkehrproblems beruht auf der Darstellung von einfachen Thetaquotienten mit p Argumenten V_h durch algebraische und symmetrische Functionen der Coordinaten von $q+1$ Punkten x_k, welche die oberen Grenzpunkte in den Integralsummen V_h sind (Gll. 1 und 9 § 31). Der siebente Abschnitt beschäftigt sich mit der Verallgemeinerung dieser Darstellungen, nämlich mit der Aufstellung der allgemeinsten Beziehungen zwischen Thetafunctionen mit den p Argumenten V_h einerseits und algebraischen Functionen oder Abel'schen Integralausdrücken, die symmetrisch gebildet sind in den Coordinaten der $q+1$ Punkte x_k andrerseits. Wir verfolgen dabei den schon früher eingeschlagenen Weg, d. h. wir entwickeln diese Beziehungen zuerst für den Fall $q=0$ oder für die p Argumente u_h und den oberen Grenzpunkt x und gehen von ihnen zu den entsprechenden Gleichungen zwischen den Argumenten V_h und dem Punktsystem x_k über.

§ 34. Darstellung allgemeiner Thetaquotienten mit speciellen Argumenten[1]).

Wir setzen wie früher ($h=1, .., p$):

$$\int_{\alpha}^{x} du_h \equiv u_h \tag{1}$$

und beginnen mit der Aufgabe, eine Function mit den p Argumenten u_h herzustellen, die, als Function der Coordinaten des oberen Grenzpunktes x betrachtet, folgende drei Eigenschaften hat:

1) Riemann, Ges. W. S. 132 ff. Prym, Theorie der Functionen in einer zweiblättrigen Fläche. Zürich 1866, S. 26. H. Stahl, Journ. für Math. Bd. 89, S. 170 ff. (1880). Für $p=1$ gab die entsprechende Darstellung Hermite, Lettre à Jacobi (Jacobi's Werke II. S. 103) (1845).

a) sie soll in der Verzweigungsfläche T gleichviel 0^1 und ∞^1 Punkte haben,

b) sie soll an den Querschnitten a_h und b_h von T' constante Factoren annehmen,

c) sie soll ausserdem in T' allenthalben eindeutig und stetig sein.

Zur Lösung betrachte man, indem man wie früher abkürzend

$$\vartheta(u_1 - e_1, \ldots, u_p - e_p) = \vartheta((u - e))$$

setzt, den Ausdruck

$$(2) \qquad \frac{\vartheta((u - A'))\,\vartheta((u - A''))\,\ldots\,\vartheta((u - A^{\varrho}))}{\vartheta((u - C'))\,\vartheta((u - C''))\,\ldots\,\vartheta((u - C^{\varrho}))}\, e^{-2\sum\limits_{h=1}^{p} g_h u_h}$$

d. h. den Quotienten zweier Producte von gleichviel Thetafunctionen, mit den um Constanten vermehrten Argumenten u_h, diesen Quotienten noch multiplicirt mit einem Exponentialfactor, dessen Exponent eine lineare Function der p Grössen u_h mit constanten Coefficienten ist.

Die constanten Grössen A_h^i und C_h^i seien nur der Bedingung unterworfen, dass keine der Thetafunctionen in (2) identisch für jeden Punkt x verschwindet. Der Ausdruck (2) hat nach den Sätzen des fünften Abschnittes bereits die sämmtlichen Eigenschaften (a, b, c).

Denn er wird in T' in gleichviel Punkten 0^1 und ∞^1, nämlich

$$= 0^1 \text{ in } \varrho p \text{ Punkten } a_1^i, \ldots, a_p^i \text{ und}$$

$$= \infty^1 \text{ in } \varrho p \text{ Punkten } c_1^i, \ldots, c_p^i \; (i = 1, \ldots, \varrho),$$

die durch die Congruenzen bestimmt sind

$$(3) \qquad \begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{p} \int\limits_{\alpha_k^0}^{a_k^i} du_h \equiv A_h^i, \quad \sum\limits_{k=1}^{p} \int\limits_{\alpha_k^0}^{c_k^i} du_h \equiv C_h^i \\ (h = 1, \ldots, p;\; i = 1, \ldots, \varrho). \end{cases}$$

Er hat ferner an den Querschnitten a_h und b_h von T' constante Factoren, nämlich

$$(4) \qquad \text{an } a_h\colon e^{-g_h 2i\pi}, \qquad \text{an } b_h\colon e^{+g_h' 2i\pi},$$

wo die Grössen g_h' bestimmt sind durch die Gleichungen ($h=1,\ldots,p$):

$$(5) \qquad \sum_{i=1}^{\varrho} (A_h^i - C_h^i) = g_h' \pi i + \sum_{k=1}^{p} g_k a_{hk}.$$

Das Letztere ergibt sich daraus, dass, wenn x den Querschnitt b_h von der $+$ zur $-$ Seite überschreitet, nach (6a) § 27

$$\vartheta((u - A)) \text{ den Factor } e^{-2(\bar{u}_h - A_h)},$$

$$\vartheta((u - C)) \text{ den Factor } e^{-2(\bar{u}_h - C_h)}$$

annimmt. Im Uebrigen ist die Function (2) in T' eindeutig und stetig.

Durch die Werthe (3) der Grössen A und C gehen die Gleichungen (5) über in ($h = 1, .., p$):

$$\sum_{i=1}^{\varrho} \sum_{k=1}^{p} \int_{c_k^i}^{a_k^i} du_h \equiv g'_h \pi i + \sum_{k=1}^{p} g_k a_{hk}. \tag{6}$$

Von den ϱp Punkten a_k^i können einige mit Punkten c_k^i zusammenfallen. Dann ist die Zahl der 0^1 und ∞^1 Punkte der Function (2) und ebenso die Zahl der Glieder auf der linken Seite in (6) entsprechend kleiner als ϱp. Die vorstehende Betrachtung gibt den Satz:

(I) Der in den Argumenten u_h (1) transcendente Ausdruck (2) stellt eine Function von x dar, welche die unter (a, b, c) genannten Eigenschaften besitzt. Dabei sind die 0^1 und ∞^1 Punkte und die Factoren an den Querschnitten durch die Gleichungen (6) an einander gebunden.

Wir beweisen jetzt umgekehrt den Satz:

(II) Die allgemeinste Function $Q(x)$ der Coordinaten von x, welche die Bedingungen (a, b, c) erfüllt, lässt sich in den Argumenten u_h durch eine Function von der Form (2) darstellen.

Zunächst zeigt sich, dass die 0^1 und ∞^1 Punkte und die constanten Factoren an den Querschnitten von T', die eine solche Function $Q(x)$ hat, nicht unabhängig, sondern durch p Relationen verbunden sind, die man als das Abel'sche Theorem für die Function $Q(x)$ bezeichnen kann, da sie eine Verallgemeinerung des Abel'schen Theorems für rationale Functionen der Coordinaten von x bilden und sich auf dieselbe Weise wie dieses herleiten lassen (Gl. 10 § 19). In der That seien $\xi_1, .., \xi_\sigma$ die 0^1 Punkte und $\zeta_1, .., \zeta_\sigma$ die ∞^1 Punkte von $Q(x)$; ferner seien die constanten Factoren von $Q(x)$ an den Querschnitten a_h, b_h von T' auf die Form (4) gebracht, wodurch die Grössen g_h und g'_h bis auf ganze Zahlen bestimmt sind, die man beliebig wählen kann. Endlich seien die Punkte ξ_i und ζ_i durch kleine

Kreise aus T' ausgeschnitten und diese Kreise durch neue Querschnitte mit dem schon vorhandenen Querschnittsystem a_h und b_h der Fläche T' verbunden, wodurch aus T' eine einfach zusammenhängende Fläche T'' hervorgeht. Indem man nun das Integral $\int \log Q(x)\, du_h$ um die ganze Begrenzung von T'' herumführt, erhält man zwischen den 2σ Punkten ξ_i und ζ_i und den $2p$ Grössen g_h und g'_h die p Bedingungsgleichungen $(h = 1, \ldots, p)$:

$$\sum_{i=1}^{\sigma} \int_{\zeta_i}^{\xi_i} du_h = g'_h \pi i + \sum_{k=1}^{p} g_k a_{hk}. \tag{7}$$

Dabei ist angenommen, dass die Integrationswege auf der linken Seite in (7) passend gewählt sind; bei anderen Integrationswegen würde auf der rechten Seite noch ein zusammengehöriges System von Periodicitätsmoduln der Integrale u_h hinzutreten.

Die Gleichungen (7) vorausgesetzt, bilde man einen Ausdruck der Form (2) folgendermassen. Als Grösse g_h nehme man die vorhin für $Q(x)$ bestimmten Werthe g_h; die Grössen A_h^i und C_h^i ersetze man durch Integralsummen von der Form (3), indem man für die oberen Grenzpunkte a und c zunächst die gegebenen Punkte ξ_i und ζ_i verwendet, die noch fehlenden beliebig, jedoch im Zähler und Nenner gleich, annimmt, wobei nur darauf zu achten ist, dass die in einer Integralsumme vereinigten p Punkte nicht auf einer adjungirten Φ-Curve liegen (§ 28 Satz VIII). Die für $Q(x)$ bestehenden Gleichungen (7) gehen alsdann bei passender Wahl der Integrationswege in den gebildeten Integralsummen gerade in die Gleichungen (6) über. Hieraus folgt, dass der gebildete Ausdruck von der Form (2) bis auf einen von x unabhängigen Factor mit der gegebenen Function $Q(x)$ übereinstimmt. Denn der Quotient beider Functionen wird in der Fläche T' an keiner Stelle mehr ∞ und nimmt an den Querschnitten a_h und b_h die Factoren 1 an; er ist daher in T allenthalben eindeutig und stetig, mithin gleich einer Constanten (I a § 6).

Damit ist Satz II bewiesen. Die Zahl der zur Darstellung von $Q(x)$ im Zähler und Nenner verwendeten Thetafunctionen kann wegen der benutzten Hilfspunkte noch variiren.

Unter gewissen Bedingungen für die Grössensysteme A, C, g, g' die bis jetzt nur durch die p Relationen (5) verbunden waren, stellt der Ausdruck (2) eine algebraische Function (allerdings von specieller Art) der Coordinaten des Punktes x dar.

Die allgemeinste, algebraische Function der Coordinaten von x ist die Wurzel einer algebraischen Gleichung, deren Coefficienten

rationale Functionen der Coordinaten von x sind. Charakteristisch für eine solche Function ist, dass sie in jedem Punkte x der Fläche T nur eine endliche Zahl von Werthen annimmt. Nun hat die Function (2) bereits die Eigenschaft, dass sie bei einmaligem Ueberschreiten der Querschnitte die constanten Factoren (4) annimmt. Die Werthe, die sie durch stetige Fortsetzung über die Querschnitte hinüber in demselben Punkte von T' erlangt, unterscheiden sich also von einander durch die Potenzen und Producte der Factoren (4). Soll (2) eine algebraische Function sein, also in jedem Punkte x nur eine endliche Zahl von Werthen annehmen, so ist nothwendige und hinreichende Bedingung, dass die Grössen g und g' rationale Zahlen sind. Da sich die Factoren (4) nicht ändern, wenn g und g' um ganze Zahlen vermehrt werden, so umfasst man alle Fälle, indem man g und g' gleich positiven, echten Brüchen mit demselben Nenner m setzt, also ($h = 1, \ldots, p$):

$$g_h = \frac{\mu_\mu}{m}, \quad g'_h = \frac{\mu'_h}{m}, \tag{8}$$

wo m eine ganze, positive Zahl ist und μ_h, μ'_h ebenfalls ganze, positive Zahlen sind, die alle Werthe von 0 bis $m - 1$ durchlaufen können.

Die auf der rechten Seite in (5) und (6) auftretenden Grössen werden

$$\frac{1}{m}\left(\mu'_h \pi i + \sum_{k=1}^{p} \mu_k a_{hk}\right) = \frac{\mathsf{M}_h}{m}. \tag{9}$$

Das Zahlensystem (8) stellt nach (§ 26 Gl. 28 u. 29) eine m-theilige Charakteristik (μ) und das zugehörige Grössensystem (9) ein System von zusammengehörigen, m-theiligen Periodicitätsmoduln der Integrale u_h dar. An Stelle von (2) tritt der Ausdruck

$$\frac{\vartheta((u - A')) \ldots \vartheta((u - A^\varrho))}{\vartheta((u - C')) \ldots \vartheta((u - C^\varrho))}\, e^{-\frac{2}{m}\sum_{h=1}^{p} \mu_h u_h} \tag{10}$$

und (5) und (6) gehen über in die Gleichungen ($h = 1, \ldots, p$):

$$\sum_{i=1}^{\varrho} (A^i_h - C^i_h) = \frac{\mathsf{M}_h}{m} \tag{11}$$

oder

$$m \sum_i \sum_k \int_{c^i_k}^{a^i_k} du_h \equiv 0, \tag{12}$$

welche das Abel'sche Theorem der durch (10) dargestellten, algebraischen Function von x bilden. Die Factoren des Ausdrucks (10) an den Querschnitten sind nach (4) und (8)

$$(13) \qquad \text{an } a_h\colon e^{-\frac{2i\pi}{m}\mu_h}, \quad \text{an } b_h\colon e^{+\frac{2i\pi}{m}\mu_h'},$$

wo sich die μ_h' aus den Gleichungen (11) bestimmen. Die Factoren (13) sind sämmtlich m^{te} Wurzeln der Einheit. Daher hat die m^{te} Potenz von (10) an den Querschnitten von T' die Factoren 1, ist also eine rationale Function der Coordinaten von x und zwar von der besonderen Eigenschaft, dass ihre 0 und ∞ Punkte alle von der m^{ten} Ordnung sind. Der Ausdruck (10) ist die m^{te} Wurzel einer solchen Function. Dies gibt den Satz:

(III) Der allgemeinste Thetaquotient mit den Argumenten u_h, der eine algebraische Function der Coordinaten des Punktes x darstellt, ist der Ausdruck (10) mit den Bedingungen (11). Diese algebraische Function ist von specieller Art, nämlich die m^{te} Wurzel aus einer rationalen Function $\mathsf{P}(x)$ der Coordinaten von x, deren 0 und ∞ Punkte alle von der m^{ten} Ordnung sind.

Umgekehrt beweist man durch dieselbe Betrachtung, die zum Satze II führte, leicht den Satz:

(IV) Ist $\mathsf{P}(x)$ eine rationale Function der Coordinaten von x, deren 0 und ∞ Punkte alle von der m^{ten} Ordnung sind, so ist die Function $\sqrt[m]{\mathsf{P}(x)}$ darstellbar durch einen Thetaquotienten der Form (10).

Um die Function (10) wirklich in algebraischer Form darzustellen, wobei die gegebenen Constanten A_h^i und C_h^i nur den Bedingungen (11) unterworfen sind, denke man sich den allgemeinen Fall, wo von den durch die Grössen A und C gegebenen, aus den Gleichungen (3) eindeutig bestimmten ϱp 0^1 Punkten a_k^i und ϱp ∞^1 Punkten c_k^i einige zusammenfallen, so dass im Zähler und Nenner noch je g $(\gtreqless p)$ Punkte übrig bleiben, die durch a_i und c_i $(i = 1, .., g)$ bezeichnet seien und die nach (12) den Gleichungen genügen:

$$(14) \qquad m \sum_{i=1}^{g} \int_{c_i}^{a_i} du_h \equiv 0.$$

Die m^{te} Potenz von (10) ist eine rationale Function der Coordinaten von x, die in den g Punkten a_i je $= 0^m$, in den g Punkten c_i je $= \infty^m$ wird und nach § 12 folgendermassen zu bilden ist. Man bestimme

eine Curve von hinreichend hohem Grade k, die durch die r Doppelpunkte $\delta_1, \ldots, \delta_r$ von $F = 0$ geht, (welche Punkte als Schnittpunkte doppelt zählen) und ausserdem $F = 0$ in den g Punkten c_i je $m-1$-punktig berührt (d. h. je in m zusammenfallenden Punkten schneidet). Man bezeichne diese Curve durch $\omega_0(x, c) = 0$ und die noch übrig bleibenden s Schnittpunkte derselben mit $F = 0$ durch $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_s$. Dabei können unter den s Punkten ε nochmals die r Punkte δ sein. Die Zahlen n, k, m, g, r, s sind hierbei durch die Gleichung verbunden

$$nk = mg + 2r + s. \tag{15}$$

Legt man alsdann durch die r Punkte δ und die s Punkte ε eine zweite Curve $\omega(x, a) = 0$ von demselben Grade k, die $F = 0$ in den $g - p$ ersten Punkten a_i je $m-1$-punktig berührt, so lassen sich die noch freien Coefficienten gerade so bestimmen, dass die Curve noch in weiteren p Punkten je $m-1$-punktig berührt, wie eine Betrachtung analog der auf S. 238 für $m = 2$ angestellten zeigt. Wie dort ist auch hier die Bestimmung der Curve $\omega(x, a) = 0$ oder der p letzten Berührungspunkte nicht eindeutig, sondern endlich vieldeutig. Nach (14) entspricht nämlich dem Werthsystem $\frac{\mu_h}{m}, \frac{\mu_h'}{m}$ eindeutig eine solche Berührungscurve, die durch $\omega_\mu(x, a) = 0$ bezeichnet sei. Da sich diese Curve nicht ändert, wenn die Zahlen μ und μ' um ganze Vielfache von m wachsen, so erhält man, indem man jeder der Zahlen μ und μ' alle Werthe $0, 1, \ldots, m-1$ beilegt, ein System von m^{2p} solcher Berührungscurven $\omega_\mu(x, a)$, die sich dadurch unterscheiden, dass in ihnen jedesmal die p letzten Berührungspunkte andere sind.

Nunmehr ist die Function (10) algebraisch dargestellt durch

$$c_\mu \sqrt[m]{\omega_\mu(x, a) : \omega_0(x, c)}, \tag{16}$$

wo c_μ eine von x unabhängige Grösse ist.

Wir geben dem Resultat noch folgende Fassung. Bildet man einen zweiten Ausdruck von der Form (10) mit demselben Grössensystem C_h^i im Nenner, aber einem anderen System B_h^i im Zähler und mit einer anderen m-theiligen Charakteristik (ν), so erhält man durch Division beider Ausdrücke die Darstellung

$$\frac{\Theta_\mu((u, A))}{\Theta_\nu((u, B))} = c_{\mu\nu} \sqrt[m]{\frac{\omega_\mu(x, a)}{\omega_\nu(x, b)}}, \tag{17}$$

wo zur Abkürzung gesetzt ist

$$\Theta_\mu((u, A)) = e^{-\frac{2}{m}\sum_h \mu_h u_h} \prod_i \vartheta((u - A^i)). \tag{18}$$

Für den Ausdruck (17) sind die Factoren an den Querschnitten

$$(19)\qquad a_h:\ e^{-\frac{2i\pi}{m}(\mu_h-\nu_h)},\quad b_h:\ e^{+\frac{2i\pi}{m}(\mu'_h-\nu'_h)}.$$

Ferner sind die ϱp 0^1 Punkte a_k^i und die ϱp ∞^1 Punkte b_k^i $(i=1,..,\varrho)$ von (17) bestimmt durch die Congruenzen:

$$(20)\qquad \sum_k \int_{\alpha_k^0}^{a_k^i} du_h \equiv A_h^i,\quad \sum_k \int_{\alpha_k^0}^{b_k^i} du_h \equiv B_h^i$$

und die $2\varrho p$ Grössen A_h^i und B_h^i oder die $2\varrho p$ Punkte a_k^i und b_k^i sind mit den Charakteristiken (μ) und (ν) verbunden durch die Relationen

$$(21)\qquad \sum_i (A_h^i - B_h^i) \equiv \sum_i \sum_k \int_{b_k^i}^{a_k^i} du_h \equiv \frac{1}{m}(\mathsf{M}_h - \mathsf{N}_h).$$

In allen diesen Summen ist

$$h=1,..,p;\quad k=1,..,p;\quad i=1,..,\varrho.$$

§ 35. Darstellung allgemeiner Thetaquotienten mit allgemeinen Argumenten[1]).

Die bisherige Untersuchung bezog sich auf das specielle Problem (1) § 34 und führte in (17) § 34 auf die Darstellung eines Quotienten von Thetafunctionen mit den Argumenten u_h durch eine algebraische Function der Coordinaten des Punktes x. Mit Hilfe dieser Vorbetrachtung lässt sich nun sofort die entsprechende, allgemeine Aufgabe lösen, nämlich unter Voraussetzung, dass $(h=1,..,p)$:

$$(1)\qquad V_h \equiv \sum_{k=0}^{\varrho} \int_{\alpha_k}^{x_k} du_h,$$

und dass die constanten Grössensysteme $A_1^i,..,A_p^i$ und $B_1^i,..,B_p^i$ $(i=1,..,\varrho)$ den Bedingungen genügen

$$(2)\qquad \sum_i (A_h^i - B_h^i) \equiv \frac{1}{m}(\mathsf{M}_h - \mathsf{N}_h),$$

den Thetaquotienten mit den Argumenten V_h

$$(3)\qquad \frac{\Theta_\mu(\!(V, A)\!)}{\Theta_\nu(\!(V, B)\!)} = \frac{e^{-\frac{2}{m}\Sigma\mu_h V_h}}{e^{-\frac{2}{m}\Sigma\nu_h V_h}} \prod_{i=1}^{\varrho} \frac{\vartheta(\!(V-A^i)\!)}{\vartheta(\!(V-B^i)\!)}$$

1) S. Litteratur zu § 34.

durch eine algebraische und symmetrische Function der Coordinaten der Punktsysteme $x, x_1, .., x_q$ einerseits und $\alpha, \alpha_1, .., \alpha_q$ andrerseits darzustellen. Dies geschieht nach dem Verfahren des § 31.

Der specielle Ausdruck (17) § 34 hatte als Function von x an den Querschnitten von T' die Factoren (19) § 34. Die nämlichen Factoren besitzt der Ausdruck (3), wenn man ihn als Function von irgend einem der $q+1$ Punkte $x, x_1, .., x_q$ betrachtet. Ist daher S irgend eine algebraische, wie T verzweigte Function der Coordinaten von x allein, die an den Querschnitten ebenfalls die Factoren (19) § 34 annimmt und bezeichnet S_i den Werth dieser Function für $x = x_i$, so ist der darzustellende Ausdruck (3), dividirt durch das Product $SS_1 \, . \, . \, S_q$ eine rationale Function der Coordinaten eines jeden der Punkte $x, x_1, .., x_q$. Bezeichnet man diese rationale Function durch R, so ist der Ausdruck (3) dargestellt durch

$$R \, . \, SS_1 \, . \, . \, S_q. \tag{4}$$

Am einfachsten wählt man für S die Function (17) § 34, nämlich

$$S = \sqrt[m]{\omega_\mu(x, a) : \omega_\nu(x, b)}. \tag{5}$$

Dann ist, wie die Vergleichung von (4) mit (3) ergibt, die rationale Function R folgendermassen bestimmt. Als Function von x betrachtet, wird sie $= 0^1$ in den ϱp Punkten b_k^i (in denen $S = \infty^1$ wird) und $= \infty^1$ in den ϱp Punkten a_k^i (in denen $S = 0^1$ wird). Sie wird ferner $= 0^1$ in den ϱp 0^1 Punkten ξ_k^i und $= \infty^1$ in den ϱp ∞^1 Punkten η_k^i der Function (3), welche Punkte nach (I) § 29 bestimmt sind durch die Congruenzen ($h = 1, .., p$; $i = 1, .., \varrho$)

$$\sum_{k=1}^{p} \int_{\alpha_k^0}^{\xi_k^i} du_h + \sum_{l=1}^{q} \int_{\alpha_l}^{x_l} du_h \equiv A_h^i, \quad \sum_{k=1}^{p} \int_{\alpha_k^0}^{\eta_k^i} du_h + \sum_{l=1}^{q} \int_{\alpha_l}^{x_l} du_h \equiv B_h^i, \tag{6}$$

oder nach (20) § 34 durch die Congruenzen:

$$\sum_{k=1}^{p} \int_{a_k^i}^{\xi_k^i} du_h + \sum_{l=1}^{q} \int_{\alpha_l}^{x_l} du_h \equiv 0, \quad \sum_{k=1}^{p} \int_{b_k^i}^{\eta_k^i} du_h + \sum_{l=1}^{q} \int_{\alpha_l}^{x_l} du_h \equiv 0. \tag{7}$$

Für die Darstellung von R braucht man die Punkte ξ_k^i und η_k^i selber gar nicht zu kennen; sie lassen sich nach (7) ersetzen durch die Punkte a_k^i und b_k^i. Um R zunächst als Function von x zu bilden, lege man durch die r Doppelpunkte δ von $F = 0$, durch die p Punkte a_k^i ($k = 1, .., p$) und die q Punkte $\alpha_1 \, . \, . \, \alpha_q$ eine Curve $\Omega_a^i(x) = 0$,

die F noch in t Punkten $\zeta_1, \ldots, \zeta_t$ schneidet; alsdann durch die r Punkte δ, durch die t Punkte ζ und durch die q Punkte $x_1, \ldots, x_q$ eine Curve desselben Grades $\Omega_a^i(x, x_1, \ldots, x_q) = 0$, welche alsdann $F = 0$ nach (7) gerade noch in den p Punkten ξ_k^i $(k = 1, \ldots, p)$ schneiden muss. Daher wird der Quotient $\Omega_a^i(x, x_1, \ldots, x_q) : \Omega_a^i(x)$ als Function von x gleich 0^1 in den p Punkten ξ_k^i und den q Punkten $x_1, \ldots, x_q$ und $= \infty^1$ in den p Punkten a_k^i und den q Punkten $\alpha_1, \ldots, \alpha_q$. Entsprechend bestimme man zwei Curven $\Omega_b^i(x) = 0$ und $\Omega_b^i(x, x_1, \ldots, x_q) = 0$ von demselben Grad wie vorher, mit Benutzung der p Punkte b_k^i statt a_k^i und t anderen Hilfspunkten ζ', so dass der Quotient $\Omega_b^i(x, x_1, \ldots, x_q) : \Omega_b^i(x)$ als Function von x gleich 0^1 wird in den p Punkten η_k^i und den q Punkten $x_1 \ldots x_q$, gleich ∞^1 in den p Punkten b_k^i und den q Punkten $\alpha_1 \ldots \alpha_q$. Alsdann hat das Product

$$(8) \qquad \prod_{i=1}^{\varrho} \frac{\Omega_a^i(x, x_1, \ldots, x_q)}{\Omega_b^i(x, x_1, \ldots, x_q)} \frac{\Omega_b^i(x)}{\Omega_a^i(x)},$$

als Function von x betrachtet, dieselben 0^1 und ∞^1 Punkte, wie die rationale Function R, stimmt also mit R bis auf einen von x unabhängigen, dagegen von $x_1, \ldots, x_q$ noch abhängigen Factor überein.

Um die Function R, die in den $q+1$ Punkten $x, x_1, \ldots, x_q$ symmetrisch ist, vollständig zu erhalten, hat man offenbar den Ausdruck (8) nur durch Zusatz eines von x unabhängigen Factors ebenfalls in den Punkten $x, x_1, \ldots, x_q$ symmetrisch zu machen. Man erhält so $(i = 1, \ldots, \varrho;\ k = 0, 1, \ldots, q)$

$$(9) \qquad R = C_{\mu\nu} \prod_{i,k} \frac{\Omega_a^i(x, x_1, \ldots, x_q)}{\Omega_b^i(x, x_1, \ldots, x_q)} \frac{\Omega_b^i(x_k)}{\Omega_a^i(x_k)},$$

wo die Grösse $C_{\mu\nu}$ eine Constante, d. h. von $x, x_1, \ldots, x_q$ unabhängig ist. Trägt man die Werthe (5) und (9) in (4) ein, so hat man für den Thetaquotienten (3) folgende Darstellung $(i=1,\ldots,\varrho;\, k=0,1,\ldots,q)$:

$$(10) \qquad \frac{\Theta_\mu(\!(V, A)\!)}{\Theta_\nu(\!(V, B)\!)} = C_{\mu\nu} \prod_{i,k} \frac{\Omega_a^i(x, x_1, \ldots, x_q)}{\Omega_b^i(x, x_1, \ldots, x_q)} \frac{\Omega_b^i(x_k)}{\Omega_a^i(x_k)} \sqrt[m]{\frac{\omega_\mu(x_k, a)}{\omega_\nu(x_k, b)}}.$$

Die Constante $C_{\mu\nu}$ wird am einfachsten durch die Substitution $x = \alpha,\ x_1 = \alpha_1, \ldots, x_q = \alpha_q$ und $V_1 = V_2 = \cdots V_p = 0$ bestimmt. Die Gleichung (10) ist alsdann auch symmetrisch in den $q+1$ unteren Grenzpunkten $\alpha, \alpha_1, \ldots, \alpha_q$ in (1). Diese Betrachtung gibt den Satz:

(I) Der Thetaquotient (3), dessen Argumente die $q+1$-gliedrigen Integralsummen (1) mit beliebigen oberen und

unteren Grenzpunkten sind, vermehrt um constante Grössensysteme A und B, die nur den p Bedingungen (2) genügen, lässt sich darstellen durch rationale und symmetrische Functionen der $q+1$ oberen Grenzpunkte $x, x_1, .., x_q$ (und ebenso der $q+1$ unteren Grenzpunkte $\alpha, \alpha_1, .., \alpha_q$) in Verbindung mit der m^{ten} Wurzel aus einer ebensolchen Function, in der die Variabeln $x, x_1, .., x_q$ (und ebenso $\alpha, \alpha_1, .., \alpha_q$) getrennt auftreten.

Wir betrachten noch kurz die allgemeine Wurzelfunction $\sqrt[m]{\omega_\mu(x, a)}$, die in (16) § 34 definirt wurde. In der Curve $\omega_0(x, c) = 0$ waren die g Punkte c beliebig; in den Curven $\omega(x, a) = 0$ sind von den g Punkten a_i die $g-p$ ersten beliebig wählbar, die p letzten dagegen auf m^{2p} Arten bestimmt derart, dass jeder der m^{2p} m-theiligen Charakteristiken (μ) ein bestimmtes System von p letzten Punkten a_i zugeordnet ist. Lässt man die $g-p$ ersten Berührungspunkte a_i der Curve $\omega_\mu(x, a) = 0$ beliebig variiren, so gehören zu den festen Punkten δ und ε (s. § 34) noch $g-p$-fach unendlich viele Curven, die $F = 0$ in g Punkten je $m-1$-punktig berühren. Diese Curven ω theilen sich, indem man alle zu derselben Charakteristik (μ) gehörigen Curven zu einem System zusammenfasst, in m^{2p} Systeme ω_μ. Die zu Grunde gelegte Curve $\omega_0(x, c)$ gehört dann in das System der Charakteristik $(\mu) = (0)$, in der alle Zahlen μ, μ' den Werth 0 haben. Die m^{2p} Systeme von Berührungscurven ω_μ sind völlig getrennt, d. h. es ist nicht möglich, aus einem System μ durch blosse, stetige Aenderung der $g-p$ willkürlichen Berührungspunkte in ein anderes System ν zu gelangen, wie sich aus (12) § 34 ergibt. Die Charakteristik (0) nimmt insofern eine Sonderstellung ein, als zur Bestimmung des ganzen Systems der Berührungscurven ω_μ eine zur Charakteristik (0) gehörige Curve, nämlich $\omega_0(x, c)$, im voraus als gegeben angesehen wird.

Die zu den Berührungscurven $\omega_\mu(x, a) = 0$ von demselben Grad k und mit denselben festen Punkten δ und ε gehörigen Functionen $\sqrt[m]{\omega_\mu(x, a)}$ sollen Wurzelfunctionen von der Charakteristik μ, vom Exponenten m und von der Ordnung g heissen. Eine solche Wurzelfunction wird in jedem der g Berührungspunkte a_i gleich 0^1, in jedem der r Punkte δ gleich $0^{\frac{1}{m}}$ (für den einzelnen Zweig des Doppelpunkts) und ebenso in jedem der s Punkte ε gleich $0^{\frac{1}{m}}$. Für diese Wurzelfunctionen gelten zwei Sätze, die eine Verallgemeinerung der früheren Sätze (I und II § 30) bilden. Der erste Satz bezieht

sich auf die linearen Relationen zwischen den Wurzelfunctionen und lautet:

(II) Eine Wurzelfunction $\sqrt[m]{\omega_\mu(x, a)}$ von der Charakteristik μ, dem Exponenten m und der Ordnung g lässt sich durch ein Aggregat von höchstens $g-p+1$ linear unabhängigen Wurzelfunctionen derselben Art darstellen.

Sind nämlich $\omega_\mu(x, \alpha)$, $\omega_\mu(x, a)$, $\omega_\mu(x, a^0)$, $\omega_\mu(x, a')$, $\omega_\mu(x, a'')$, .. eine Reihe von Berührungsfunctionen von derselben Charakteristik μ, denselben Punkten δ und ε und mit den Systemen α, a, a^i $(i=0, 1, ..)$ von je g Berührungspunkten, so hat der Ausdruck

$$\sqrt[m]{\omega_\mu(x, a) : \omega_\mu(x, \alpha)}$$

als Quotient zweier Functionen der Form (16) § 34 die Eigenschaft, g ∞^1 und 0^1 Punkte und an den Querschnitten a_h und b_h von T' die Factoren 1 zu besitzen. Er ist also eine rationale Function der Coordinaten des Punktes x von der Ordnung g und lässt sich (nach Ib § 12) im Allgemeinen durch $g-p+1$ linear unabhängige Functionen derselben Art und mit denselben ∞^1 Punkten darstellen. Man hat daher, indem man den gemeinsamen Nenner $\sqrt[m]{\omega_\mu(x, \alpha)}$ dieser Functionen weglässt, die Gleichung

$$\sqrt[m]{\omega_\mu(x, a)} = \sum_{i=0}^{g-p} l_i \sqrt[m]{\omega_\mu(x, a^i)} \tag{11}$$

unter der Voraussetzung, dass die $g-p+1$ Wurzelfunctionen der rechten Seite linear unabhängig sind. (q. e. d.)

Die Function $\sqrt[m]{\omega_\mu(x, a)}$ ist hiernach bis auf einen constanten Factor bestimmt, sobald $g-p$ ihre 0^1 Punkte gegeben sind, da man durch Einführung derselben aus (11) $g-p$ lineare Gleichungen für die Verhältnisse der Coefficienten l_i erhält; hiermit sind auch die p letzten 0^1 Punkte der Function bestimmt.

Sind von den g Berührungspunkten a_k der Curve $\omega_\mu(x, a)$ die p letzten gleichzeitig 0^1 Punkte von q linear unabhängigen φ-Curven, so ist, wie man aus den Sätzen in § 12 leicht beweist, die Function $\sqrt[m]{\omega_\mu(x, a)}$ nicht durch $g-p$, sondern erst durch $g-p+q$ der Punkte a_k eindeutig bestimmt und umgekehrt, ist eine Wurzelfunction der betrachteten Art noch nicht durch $g-p$, sondern erst durch $g-p+q$ 0^1 Punkte bestimmt, so sind die p letzten 0^1 Punkte zu-

gleich 0^1 Punkte von q linear unabhängigen φ-Functionen. Dann tritt an Stelle von (11) die Gleichung

$$\sqrt[m]{\omega_\mu(x, a)} = \sum_{i=0}^{g-p+q} l_i \sqrt[m]{\omega_\mu(x, a^i)}. \tag{11a}$$

Auf gleiche Weise ergibt sich, dass jedes Aggregat von Wurzelfunctionen von demselben System μ, demselben Exponenten m und derselben Ordnung g wieder eine Wurzelfunction derselben Art ist. Denn dividirt man ein solches Aggregat durch eine solche Function, etwa $\sqrt[m]{\omega_\mu(x, \alpha)}$, so ist der Quotient ein Aggregat von rationalen Functionen, also selber rational. Da nun die m^{te} Potenz des Nenners, nämlich $\omega_\mu(x, \alpha)$, für sich rational und vom Grade k ist, so muss auch die m^{te} Potenz des Zählers rational sein und sich mit Hilfe von $F=0$ auf den Grad k und die Form $\omega_\mu(x, a)$ bringen lassen, d. h. der Zähler selber oder das Aggregat der Wurzelfunctionen ist von der Form $\sqrt[m]{\omega_\mu(x, a)}$. (q. e. d.)

Ein zweiter Satz bezieht sich auf die rationalen Functionen, die sich aus Wurzelfunctionen bilden lassen. Um denselben in allgemeinster Form herzuleiten, halte man bei der Bildung der Wurzelfunctionen $\sqrt[m]{\omega_\mu}$ nur die Exponenten m und die r Punkte δ und die s Punkte ε fest, lasse aber die Charakteristik μ beliebig und den Grad k und die Ordnung g der Bedingung (15) § 34, nämlich

$$nk = mg + 2r + s \tag{12}$$

gemäss variiren. Eine Wurzelfunction von der Charakteristik μ, dem Grad k und der Ordnung g sei allgemein bezeichnet durch $\sqrt[m]{\omega_\mu^g}$. Das Product von α Wurzelfunctionen

$$\prod_{i=1}^{\alpha} \sqrt[m]{\omega_{\mu_i}^{g_i}} \tag{13}$$

ist offenbar wieder eine Wurzelfunction ähnlicher Art, wie die Einzelfactoren, mit dem Unterschied, dass die Function (13) in den Punkten δ und ε nicht in der Ordnung $\frac{1}{m}$, sondern in der Ordnung $\frac{\alpha}{m}$ verschwindet. Die Charakteristik μ, die der Function (13) zugehört, ist bestimmt durch

$$\mu \equiv (\mu_1 \mu_2 \,..\, \mu_\alpha) \pmod{m}, \tag{14}$$

d. h. durch Addition der α Charakteristiken $\mu_1, .., \mu_\alpha$. Die Function (13) verschwindet ferner in der Gesammtheit der Nullpunkte ihrer Factoren. Es ist nun leicht anzugeben, unter welchen Bedingungen die Func-

tion (13) eine rationale Function der Coordinaten von x darstellt. Zuerst muss $\alpha = m\varrho$, d. h. ein ganzzahliges Vielfaches von m sein, damit (13) in den Punkten δ und ε in ganzzahliger Ordnung verschwindet. Dann muss die Charakteristik μ, d. h. $(\mu_1 \ldots \mu_{\varrho_m}) \equiv (0)$ sein (mod m), damit die Function (13) an den Querschnitten von T' die Factoren 1 habe. Endlich muss noch, wenn $i = 1, \ldots, m\varrho$ ist, $\sum_i g_i$ theilbar sein durch m oder es muss eine ganze Zahl g existiren so, dass $\sum_i g_i = mg$ ist. Denn aus dieser Bedingung ergibt sich, durch Summation der für die Einzelfactoren von (13) gebildeten Gleichungen (12), eine Relation, die beweist, dass auch $\sum_i k_i$ durch m theilbar ist, dass also eine Zahl k existirt von der Art, dass $\sum_i k_i = mk$. Für diese Zahlen g und k gilt dann ebenfalls die Gleichung (12). Hieraus aber folgt die Existenz eines Systems von Berührungscurven der Form ω^g, d. h. von beliebiger Charakteristik, vom Grade k und der Ordnung g. Dividirt man nun das Product (13), gebildet für $\alpha = m\varrho$, durch die Function $\omega_0{}^g$, so erhält man eine in den Coordinaten von x rationale Function, deren Nenner für sich rational und vom Grade k ist. Folglich muss auch der Zähler, d. i. die Function (13), für $\alpha = m\varrho$ eine rationale Function Q von x sein, die sich mit Hilfe von $F = 0$ ebenfalls auf den Grad k bringen lässt. Hiernach hat man analog (16) § 30 eine Gleichung von der Form:

$$\prod_{i=1}^{m\varrho} \omega_{\mu_i}^{g_i} = Q^m + Q_1 F, \tag{15}$$

oder abgekürzt geschrieben

$$\prod_{i=1}^{m\varrho} \sqrt[m]{\omega_{\mu_i}^{g_i}} \equiv Q \tag{16}$$

und den Satz:

(III) Das Product (13) ist eine ganze, rationale Function der Coordinaten des Punktes x unter der Voraussetzung, dass $\alpha = m\varrho$, $\sum_i g_i = mg$ (also auch $\sum_i k_i = mk$) und $(\mu_1 \ldots \mu_{\varrho_m}) \equiv 0 \pmod{m}$ ist.

Man kann die Gleichung (15), wie im früheren Fall, geometrisch deuten. Sieht man dabei von den Punkten δ und ε ab, so gilt für die $m-1$-punktigen Berührungspunkte der Curven $\omega_{\mu_i}^{g_i}$ der Satz:

(IIIa) Unter den Voraussetzungen des Satzes (III) berühren

die Curven $\omega_{\mu_i}^{g_i} = 0$ ausser $F = 0$ noch sämmtlich $m-1$-punktig eine bestimmte Curve $Q_1 = 0$ vom Grade $mk - n$, wo sie derselben begegnen. Die sämmtlichen Berührungspunkte der Curven $\omega_{\mu_i}^{g_i} = 0$ mit $F=0$ und mit $Q_1=0$ liegen auf einer bestimmten Curve $Q = 0$ vom Grade k.[1])

§ 36. Specielle Darstellungen. Eigenschaften der Abel'schen Functionen.

Die Gleichungen (17) § 34 und (10) § 35 sind die allgemeinsten ihrer Art. Man gewinnt aus ihnen wichtige, specielle Formeln, indem man für m und ϱ die niedersten Zahlenwerthe setzt. Der Fall $m=1$, $\varrho = 1$ ist offenbar auszuschliessen. Denn für $m = 1$ sind die ganzen Zahlen μ, μ' und ν, ν' in jenen Gleichungen sämmtlich gleich 0 zu setzen (da sie nur bis $m-1$ gehen sollen); ist ausserdem $\varrho = 1$, so ist nach (21) § 34 $A_h' \equiv B_h'$ $(h = 1, .., p)$ d. h. der Ausdruck (17) § 34 und ebenso (10) § 35 reducirt sich auf die Einheit. Wir betrachten daher im Folgenden als die einfachsten, speciellen Fälle $\varrho = 1$, $m > 1$ und $m = 1$, $\varrho > 1$.

Der erste Fall $\varrho = 1$, $m > 1$ führt auf die Darstellung einfacher Thetaquotienten durch algebraische Functionen[2]). Wir schicken eine Bemerkung voraus über die Nullpunkte der Thetafunction $\vartheta_\mu((u))$ mit der m-theiligen Charakteristik (μ). Die Definition dieser Function war (Gl. 30 § 26):

$$\vartheta_\mu((u)) = C \cdot \vartheta\left(\left(u - \frac{1}{m}\,\mathsf{M}\right)\right) e^{-\frac{2}{m}\sum_i \mu_i u_i}, \tag{1}$$

wo

$$\mathsf{M}_i = \mu_i \pi i + \sum_k a_{ik}\mu_k \quad (i, k = 1, .., p).$$

Sind wie früher α_i^0 $(i = 1, .., p)$ die p Nullpunkte der Function $\vartheta((u))$ und bezeichnet man die p 0^1 Punkte der Function (1) (wie bei zweitheiliger Charakteristik) mit α_i^μ $(i = 1, .., p)$, so sind diese Punkte α_i^μ nach (7) § 29 bestimmt durch die Congruenzen $(h = 1, .., p)$:

$$\sum_{i=1}^{p} \int_{\alpha_i^0}^{\alpha_i^\mu} du_h \equiv \frac{1}{m}\,\mathsf{M}_h, \quad \text{woraus } m \sum_{i=1}^{p} \int_{\alpha_i^0}^{\alpha_i^\mu} du_h \equiv 0. \tag{2}$$

---

1) Vgl. die Anmerkung S. 247.

2) H. Stahl, Journ. für Math. Bd. 111. S. 104 ff. (1892).

Hiernach ist die algebraische Bestimmung des Punktsystems α_i^μ, das der m-theiligen Charakteristik (μ) zugehört, folgende (vgl. § 29 S. 239). Man lege durch die r Doppelpunkte δ von $F=0$ eine Curve $\chi_0(x)=0$ von hinreichend hohem Grade k, die F in den p Punkten α_i^0 je $m-1$-punktig berührt. Die übrigen s Schnittpunkte derselben seien $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_s$. Dann lässt sich durch die r Punkte δ und die s Punkte ε ein System von Curven $\chi(x)=0$ von demselben Grade k legen, die $F=0$ in p Punkten je $m-1$-punktig berühren. Wegen der Eindeutigkeit des Umkehrproblems entspricht nach (2) jeder m-theiligen Charakteristik (μ) eine solche Curve $\chi_\mu(x)$ mit p bestimmten Berührungspunkten, nämlich den Punkten α_i^μ, die gleichzeitig die p 0^1 Punkte der zugehörigen Thetafunction $\vartheta_\mu((u))$ (1) sind. Das System der Berührungscurven $\chi_\mu(x)=0$ enthält daher ebenso viel Curven, als die Zahl der m-theiligen Charakteristiken (μ) beträgt, d. h. m^{2p} Curven, die Curve $\chi_0(x)=0$, der Charakteristik $(\mu)\equiv 0 \pmod m$ entsprechend, inbegriffen.

Mit Hilfe der Punkte α_i^μ $(i=1, \ldots, p)$ ergeben sich zugleich die 0^1 Punkte $x_1, \ldots, x_p$ der Function $\vartheta_\mu((u-e))$ oder auch nach (1) der Function $\vartheta\left(\left(u-e-\frac{1}{m}\mathsf{M}\right)\right)$. Diese Punkte sind nach (7) § 29 bestimmt durch die Congruenzen

$$\sum_{i=1}^{p}\int_{\alpha_i^0}^{x_i} du_h \equiv e_h + \frac{1}{m}\mathsf{M}_h,$$

oder wegen (2) durch $(h=1, \ldots, p)$:

$$\sum_{i=1}^{p}\int_{\alpha_i^\mu}^{x_i} du_h \equiv e_h, \tag{3}$$

so dass der Satz IV § 29 auch für m-theilige Charakteristiken gilt.

Wir setzen nun in (17) § 34 $\varrho=1$ und wählen zur Vereinfachung für die in (20) § 34 definirten Punksysteme a_k' und b_k' bez. die Systeme α_k^μ und α_k^ν, d. h. die 0^1 Punkte der Functionen $\vartheta_\mu((u))$ und $\vartheta_\nu((u))$, so dass die Grössen A_h' und B_h' in (20) § 34 übergehen in $(h=1, \ldots, p)$:

$$A_h' \equiv \sum_{k=1}^{p}\int_{\alpha_k^0}^{\alpha_k^\mu} du_h \equiv \frac{1}{m}\mathsf{M}_h, \quad B_h' \equiv \sum_{k=1}^{p}\int_{\alpha_k^0}^{\alpha_k^\nu} du_h \equiv \frac{1}{m}\mathsf{N}_h, \tag{4}$$

wodurch die Bedingungen (21) § 34 erfüllt sind. Dann geht der Quotient der linken Seite von (17) § 34 gerade in $\vartheta_\mu((u)) : \vartheta_\nu((u))$ über

und der Quotient der rechten Seite in $\sqrt[m]{\chi_\mu(x) : \chi_\nu(x)}$, wo $\chi_\mu(x)$ und $\chi_\nu(x)$ die vorhin definirten, den m-theiligen Charakteristiken μ und ν entsprechenden χ-Functionen sind. Man hat also die Gleichung

$$\frac{\vartheta_\mu(\!(u)\!)}{\vartheta_\nu(\!(u)\!)} = c_{\mu\nu}\sqrt[m]{\frac{\chi_\mu(x)}{\chi_\nu(x)}}, \tag{5}$$

die genau der Gleichung (5) § 30 für zweitheilige Charakteristiken entspricht.

Ersetzt man die Argumente u_h durch die Integralsummen ($h=1,..,p$):

$$V_h = \sum_{k=0}^{q}\int_{\alpha_k}^{x_k} du_h \tag{6}$$

mit beliebigen $q+1$ oberen und unteren Grenzpunkten $x, x_1, .., x_q$ und $\alpha, \alpha_1, .., \alpha_q$, so erhält man nach (10) § 35 die Gleichung

$$\frac{\vartheta_\mu(\!(V)\!)}{\vartheta_\nu(\!(V)\!)} = C_{\mu\nu}\frac{X_\mu(x, x_1, .., x_q)}{X_\nu(x, x_1, .., x_q)}\prod_{k=0}^{q}\frac{X_\nu(x_k)}{X_\mu(x_k)}\sqrt[m]{\frac{\chi_\mu(x_k)}{\chi_\nu(x_k)}}, \tag{7}$$

die eine Verallgemeinerung der Gleichung (9) § 31 für zweitheilige Charakteristiken bildet.

Die Functionen X_μ und X_ν in (7) sind als Functionen von x nach § 35 folgendermassen zu bilden. Man lege durch die r Doppelpunkte δ von $F=0$, durch die p in (4) bestimmten Punkte α_k^μ und die q Punkte $\alpha_1, .., \alpha_q$ eine Curve $X_\mu(x)=0$, die $F=0$ noch in t Punkten $\xi_1, .., \xi_t$ schneidet; alsdann durch die r Punkte δ, die t Punkte ξ und die q Punkte $x_1, .., x_q$ eine Curve desselben Grades $X_\mu(x, x_1, .., x_q)=0$. Entsprechend sind $X_\nu(x)$ und $X_\nu(x, x_1, .., x_q)$ zu bilden. Nach (7) hat man den Satz:

(I) Der Quotient zweier Thetafunctionen mit beliebigen, m-theiligen Charakteristiken μ und ν, deren Argumente Integralsummen 1. Gattung mit beliebigen, oberen und unteren Grenzpunkten x_k und α_k ($k=0, 1, .., q$) sind, lässt sich symmetrisch in den Coordinaten dieser zwei Punktsysteme darstellen durch rationale Functionen in Verbindung mit der m^{ten} Wurzel aus solchen Functionen.

Man kann die Gleichung (7) weiter specialisiren und dabei, wenn man die Zahl q und die bisher willkürlichen, unteren Grenzpunkte α_k der Integrale passend wählt, die rationalen Functionen in (7) durch Wurzelfunctionen ersetzen.

Es sei (wie § 31, S. 252) $q = p$ und $\alpha_1, .., \alpha_p = \alpha_1^0, .., \alpha_p^0$, d. h. = den 0^1 Punkten von $\vartheta_0((u))$, also ($h = 1, .. p$):

$$8)\qquad V_h \equiv \int_\alpha^x du_h + \sum_{i=1}^p \int_{\alpha_i^0}^{x_i} du_h.$$

Die rationale Function $X_\mu(x, x_1, .., x_p) : X_\mu(x)$ ist definirt durch ihre $2p$ ∞^1 Punkte α_k^0 und α_k^μ und durch die p ersten ihrer 0^1 Punkte, nämlich $x_1, .., x_p$. Man kann nun den Nenner $X_\mu(x)$ ersetzen durch $\sqrt[m]{\chi_0(x)\,\chi_\mu(x)}$. Dies ist eine Wurzelfunction der in § 35 besprochenen Art; sie ist von der Charakteristik μ, von der Ordnung $2p$ und verschwindet in erster Ordnung in den $2p$ Punkten α_k^0 und α_k^μ, in der Ordnung $\frac{2}{m}$ in den festen Punkten, nämlich den r Doppelpunkten δ und den s Punkten ε. Der Zähler $X_\mu(x, x_1, .., x_p)$ muss ebenfalls eine Wurzelfunction von der Charakteristik μ und der Ordnung $2p$ sein mit denselben festen Punkten. Eine solche Function lässt sich nach (II) § 35 durch $p + 1$ linear unabhängige Functionen derselben Art darstellen in der Form

$$(8\text{a})\qquad \sum_{i=0}^p l_i \sqrt[m]{P_\mu^i(x)},$$

wo

$$P_\mu^i(x) = \chi_{\mu_1^i}(x)\,\chi_{\mu_2^i}(x) \quad \text{und} \quad \mu_1^i + \mu_2^i \equiv \mu \pmod m.$$

Bestimmt man die Coefficienten l_i so, dass der Ausdruck (8a) für $x = x_1, .., x_p$ verschwindet, so hat man den Zähler $X_\mu(x, x_1, .., x_p)$. Hieraus folgt

$$X_\mu(x, x_1, .., x_p) : \prod_{k=0}^p X_\mu(x_k)$$

$$= \sum \pm \sqrt[m]{P_\mu^0(x)}\,\sqrt[m]{P_\mu'(x_1)} \dots \sqrt[m]{P_\mu^p(x_p)} : \prod_{k=0}^p \sqrt[m]{\chi_0(x_k)\,\chi_\mu(x_k)}$$

und weiter aus (7) für die Argumente (8) die Darstellung

$$(9)\qquad \frac{\vartheta_\mu((V))}{\vartheta_\nu((V))} = C_{\mu\nu} \frac{\sum \pm \sqrt[m]{P_\mu^0(x)}\,\sqrt[m]{P_\mu'(x_1)} \dots \sqrt[m]{P_\mu^p(x_p)}}{\sum \pm \sqrt[m]{P_\nu^0(x)}\,\sqrt[m]{P_\nu'(x_1)} \dots \sqrt[m]{P_\nu^p(x_p)}},$$

eine Verallgemeinerung von (16) § 31.

Der zweite Fall $m = 1$, $\varrho > 1$ führt auf die Darstellung von Thetaquotienten durch rationale Functionen und umgekehrt.

Für $m = 1$ werden die Zahlen μ, μ' und ν, ν' in (17) § 34 sämmtlich = 0. Die Bedingungen (21) § 34 lauten jetzt ($h = 1, .., p$):

$$\sum_{i=1}^{\varrho}(A_h^i - B_h^i \equiv 0 \tag{10}$$

und, wenn diese Bedingungen erfüllt sind, hat man nach (17) § 34 für die Argumente u die Gleichung

$$\prod_{i=1}^{\varrho} \frac{\vartheta\,(\!(u - A^i)\!)}{\vartheta\,(\!(u - B^i)\!)} = c\,\frac{\omega\,(x,\,a)}{\omega\,(x;\,b)}, \tag{11}$$

wo die Functionen $\omega\,(x,\,a)$ und $\omega\,(x,\,b)$ wie im allgemeinen Fall zu bilden sind, nur mit dem Unterschiede, dass an Stelle der $m-1$-punktigen Berührung jetzt einfaches Schneiden tritt. Unter denselben Bedingungen (10) folgt aus (10) § 35 für die Argumente V_h (1) § 35 die Gleichung ($i = 1, .., \varrho$; $k = 0, 1, .., q$):

$$\prod_{i=1}^{\varrho} \frac{\vartheta\,(\!(V - A^i)\!)}{\vartheta\,(\!(V - B^i)\!)} = C \prod_{ik} \frac{\Omega_a^i\,(x, x_1, .., x_q)}{\Omega_b^i\,(x, x_1, .., x_q)}\,\frac{\Omega_b^i\,(x_k)}{\Omega_a^i\,(x_k)}\,\frac{\omega\,(x_k,\,a)}{\omega\,(x_k,\,b)}, \tag{12}$$

in der die Functionen Ω wie in § 35 zu bilden sind. Dies gibt den Satz[1]):

(II) Der Quotient zweier Thetaproducte von gleichviel Factoren mit den Argumenten u_h, vermindert um Constanten A_h^i und B_h^i, die den Congruenzen (10) genügen, oder deren Summen in Zähler und Nenner einander congruent sind, stellt sich als rationale Function der Coordinaten des Punktes x dar; der entsprechend gebildete Thetaquotient mit den Argumenten V_h als rationale und symmetrische Function der Coordinaten der $q+1$ Punkte x_k und der $q+1$ Punkte α_k.

Um auch die umgekehrte Aufgabe zu lösen[2]), setze man zur Vereinfachung, wie S. 300, $q = p$ und $\alpha_1, .., \alpha_p = \alpha_1^0, .., \alpha_p^0$; nimmt man noch $x = \alpha$, so treten an Stelle von (1) § 35 als Gleichungen des Umkehrproblems ($h = 1, .., p$):

$$U_h \equiv \sum_{i=1}^{p} \int_{\alpha_i^0}^{x_i} du_h. \tag{13}$$

Es ist zu zeigen, wie sich

1) eine rationale Function der Coordinaten von x durch einen Thetaquotienten der Form (11) in den u_h,
2) eine rationale und symmetrische Function der Coordinaten der

1) Clebsch u. Gordan, Ab. F. § 63.
2) Clebsch u. Gordan, Ab. F. § 57—59.

p oberen Grenzpunkte $x_1, .., x_p$ von (13) durch einen Thetaquotienten der Form (12) in den U_h darstellen lässt.

Zur Lösung der ersten Aufgabe sei R_x eine gegebene, rationale Function der Coordinaten des Punktes x von der Ordnung σ und seien $a_1, .., a_\sigma$ die Punkte, in denen R_x den Werth R_a hat, $b_1, .., b_\sigma$ die Punkte, in denen $R_x = \infty^1$ wird. Zwischen diesen 2σ Punkten bestehen nach dem Abel'schen Theorem (10) § 19 die p Relationen ($h = 1, .., p$):

$$\sum_{k=1}^{\sigma} \int_{b_k}^{a_k} du_h \equiv 0. \tag{14}$$

Sind ferner $\xi_1, .., \xi_{p-1}$ beliebige $p-1$ Punkte, die nur der Bedingung unterliegen, dass die durch sie bestimmte, adjungirte φ-Curve $n - 3^{\text{ten}}$ Grades durch keinen der Punkte a_k oder b_k geht, und setzt man zur Abkürzung

$$\left(\int_\alpha^x du_1 - \sum_{i=1}^{p} \int_{\alpha_i^0}^{x_i} du_1, .., \int_\alpha^x du_p - \sum_{i=1}^{p} \int_{\alpha_i^0}^{x_i} du_p\right) = (x \,|\, x_1, .., x_p), \tag{15}$$

so hat man unmittelbar

$$R_x - R_a = c \prod_{k=1}^{\sigma} \frac{\vartheta(x|\xi_1, .., \xi_{p-1}, a_k)}{\vartheta(x|\xi_1, .., \xi_{p-1}, b_k)}, \tag{16}$$

wo c eine von x unabhängige Constante ist.

Denn der Ausdruck der rechten Seite in (16) wird als Function von x gleich 0^1 in den σ Punkten a_k und gleich ∞^1 in den σ Punkten b_k; er ist ferner, mit Ausnahme der letzteren Punkte in der Fläche T allenthalben eindeutig und stetig, da die Factoren an den Querschnitten von T' in Folge der Gleichungen (14) sämmtlich $=1$ werden; er kann sich daher von der Function der linken Seite nur um einen von x unabhängigen Factor unterscheiden nach (Ib) § 6. Die Gleichung (16) enthält die gesuchte Darstellung von R_x durch Thetafunctionen mit den Argumenten u_h und gibt den Satz:

(III) Die rationale Function R_x stellt sich dar als Quotient zweier Thetaproducte von gleichviel Factoren mit den Argumenten u_h, vermehrt um Constanten, deren Summen in Zähler und Nenner nach (14) einander congruent sind.

Die Darstellung (16) der rationalen Function R_x lässt sich noch mannigfach abändern; so z. B. in die folgende Form[1]). Ist v eine

1) Klein, Math. Ann. Bd. 36. S. 13 u. 43 (1889).

zweitheilige, ungrade Charakteristik, so ist $\vartheta_\nu\left(\!\!\left(\int\limits_\xi^x du\right)\!\!\right)$ nach (III) § 29 als Function von x gleich 0^1 in dem Punkte $x=\xi$ und den $p-1$ 0^1 Punkten der Wurzelfunction $\sqrt{\varphi_\nu(x)}$. Man hat daher, wie aus den periodischen Eigenschaften von $\vartheta_\nu((u))$ und den Gleichungen (14) unmittelbar folgt, wenn man zur Abkürzung

$$\vartheta_\nu\left(\!\!\left(\int\limits_\xi^x du\right)\!\!\right) = \vartheta_\nu(x,\,\xi) \tag{16a}$$

setzt, für R_x die Darstellung

$$R_x - R_a = C\prod_k \frac{\vartheta_\nu(x,\,a_k)}{\vartheta_\nu(x,\,b_k)}. \tag{16b}$$

Diese Form legt es nahe, indem man

$$\frac{\varphi_\nu(x)}{F'y} = v_\nu'(x) \tag{16c}$$

setzt, den aus einer Thetafunction und einer algebraischen Function gebildeten Ausdruck

$$E(x,\,\xi) = a_\nu\vartheta_\nu(x,\,\xi) : \sqrt{v_\nu'(x)\, v_\nu'(\xi)} \tag{16d}$$

einzuführen. Derselbe hat nach (4) § 33, wenn a_ν die in (8) § 33 definirte Constante bedeutet, für alle ungraden, zweitheiligen Charakteristiken denselben Werth. Er hat ferner die Eigenschaft, dass er als Function von x in T nirgends ∞ und abgesehen von den Verzweigungspunkten und den Punkten $(x=\infty,\ y=\infty)$ nur $=0^1$ wird in dem einen Punkte $x=\xi$. Durch Einführung von $E(x,\,\xi)$ geht (16b) über in

$$R_x - R_a = C\prod_k \frac{E(x,\,a_k)}{E(x,\,b_k)}. \tag{16e}$$

Wir kehren zurück zur Gleichung (16); von ihr aus gelangt man sofort zur Lösung der zweiten Aufgabe, die symmetrischen Functionen der p Werthe darzustellen, die eine gegebene, rationale Function der Coordinaten von x, etwa die obige Function R_x, für die Werthe $x=x_1,\,..,\,x_p$ annimmt. Der Ausdruck (16) werde umgeformt, indem man an Stelle der willkürlichen $p-1$ Punkte $\xi_1,\,..,\,\xi_{p-1}$, die mit

1) Der Ausdruck $E(x,\xi)$ ist von Herrn Schottky eingeführt (Journ. für Math. Bd. 101. S. 272. Gl. XXI. 1887); er ist identisch mit der daselbst zur Darstellung einer speciellen Gattung von Fuchs'schen Functionen benutzten Primfunction $E(x,\xi)$ und von Interesse für den Zusammenhang zwischen den Abel'schen und Fuchs'schen Functionen. Die Function $E(x,\,\xi)$ ist nahe verwandt (vgl. auch die zweite Definition von $E(x,\,\xi)$ in § 37. Gl. 30) mit der Primfunction, die Herr Weierstrass in seinen Vorlesungen zur Darstellung der rationalen Functionen und Abel'schen Integrale benutzt hat. (Vgl. Ges. W. II S. 244. Brief an Hrn. Schwarz v. 3. Oct. 1875.)

ihnen durch eine φ-Curve verknüpften $p-1$ Punkte einführt, die ebenso willkürlich sind und die mit $x_1, .., x_{p-1}$ bezeichnet seien. Dies geschieht durch die Gleichungen (10 § 29), nämlich ($h = 1, .., p$):

$$\sum_{i=1}^{p-1}\left(\int_{\alpha_i^0}^{\xi_i} du_h + \int_{\alpha_i^0}^{x_i} du_h\right) + 2\int_{\alpha_p^0}^{a} du_h \equiv 0,$$

nach denen, wie leicht zu sehen,

$$(x \,|\, \xi_1, .., \xi_{p-1}, a) \equiv -(a \,|\, x_1, .., x_{p-1}, x).$$

Berücksichtigt man, dass die Function ϑ gerade ist, und setzt zum Schluss für x einen beliebigen Punkt x_p, so folgt aus (16):

$$R_{x_p} - R_a = C_p \prod_{k=1}^{\sigma} \frac{\vartheta(a_k | x_1, .., x_p)}{\vartheta(b_k | x_1, .., x_p)},$$

wo C_p eine von x_p unabhängige Grösse ist. Fügt man auf der linken Seite einen ebenfalls von x_p unabhängigen Factor hinzu, so erhält man

$$(17) \qquad \prod_{i=1}^{p} (R_{x_i} - R_a) = C \prod_{k=1}^{\sigma} \frac{\vartheta(a_k | x_1, .., x_p)}{\vartheta(b_k | x_1, .., x_p)},$$

wo nunmehr C unabhängig ist von $x_1, .., x_p$, da sowohl der Ausdruck der linken wie der rechten Seite symmetrisch ist in $x_1, .., x_p$. Trägt man in (17) die Werthe U_h ein, so erhält man

$$(18) \qquad \prod_{i=1}^{p} (R_{x_i} - R_a) = C \prod_{k=1}^{\sigma} \frac{\vartheta\left(\!\!\left(U - \int_{\alpha}^{a_k} du\right)\!\!\right)}{\vartheta\left(\!\!\left(U - \int_{\alpha}^{b_k} du\right)\!\!\right)};$$

die Constante C bestimmt sich, indem man für $x_1, .., x_p$ beliebige Punkte $\alpha_1, .., \alpha_p$ setzt.

Die Gleichung (18) löst die gestellte Aufgabe. Denn die p Werthe R_{x_i} sind die Wurzeln der algebraischen Gleichung

$$(19) \quad (R_x - R_{x_1}) .. (R_x - R_{x_p}) = R_x^p + M_1 R_x^{p-1} + \cdots + M_p = 0;$$

die Grössen $M_1, .., M_p$ aber sind die fundamentalen, symmetrischen Functionen der Grössen R_{x_i}. Bildet man nun die Gleichung (18) für p verschiedene Werthe von R_a und die zugehörigen Punktsysteme a_k, so hat man p Gleichungen, aus denen sich in linearer Weise die p symmetrischen Functionen $M_1, .., M_p$ als Functionen der Argumente U_h (13) ergeben. Hiernach besteht der Satz:

(IV) Die symmetrischen Functionen $M_1, .., M_p$ der p Grössen $R_{x_1}, .., R_{x_p}$ stellen sich dar durch Thetaquotienten von der Form (18) mit den Argumenten U_h, vermehrt um Constanten, deren Summen in Zähler und Nenner einander congruent sind.

Die Gleichung (18) erhält man auch durch Vermittelung der Integrale 3. Gattung; wir deuten dies nur an.

Nimmt man das Normalintegral 3. Gattung w_{ba} (Satz I § 16) zwischen den beliebigen Grenzn α_i und x_i und summirt nach i von 1 bis p, so hat man (vgl. (5) § 37)

$$\sum_{i=1}^{p} \int_{\alpha_i}^{x_i} dw_{ba} = \log \frac{\vartheta(a\,|\,x_1, .., x_p)\,\vartheta(b\,|\,\alpha_1, .., \alpha_p)}{\vartheta(b\,|\,x_1, .., x_p)\,\vartheta(a\,|\,\alpha_1, .., \alpha_p)}. \qquad (20)$$

Sind nun wieder a_k und b_k $(k = 1, .., \sigma)$ die 0^1 und ∞^1 Punkte der Function $R_x - R_a$, so ist nach dem Abel'schen Theorem (12) § 19 $(i = 1, .., p)$:

$$\sum_{k=1}^{\sigma} \int_{b_k}^{a_k} dw_{\alpha_i x_i} = \log \frac{R_{x_i} - R_a}{R_{\alpha_i} - R_a}. \qquad (21)$$

Summirt man (21) nach i, setzt in (20) a_k, b_k statt a, b, summirt nach k und vertauscht schliesslich Parameter und Argument nach (19) § 18, so folgt durch Vergleichung der beiden Ausdrücke wieder die Gleichung (18).

Die Darstellungen (18) führen zu einer Reihe von Sätzen über Abel'sche Functionen, die kurz zusammengestellt werden sollen; sie bilden eine Verallgemeinerung von bekannten Sätzen über elliptische Functionen (vgl. die Einleitung zum II. Theil). Wir bezeichnen, wenn p Punkte $x_1, .., x_p$ mit p Grössen $U_1, .., U_p$ durch die Gleichungen (13) verbunden sind, eine rationale und symmetrische Function der Coordinaten der p Punkte x_i allgemein mit $S(x_1, .., x_p)$. Diese Function soll, wenn sie durch die Grössen U_h dargestellt ist, eine Abel'sche Function der Argumente U_h heissen und durch $\mathrm{Al}\,(U_1, .., U_p)$ bezeichnet sein[1]; wir schreiben dies

$$S(x_1, .., x_p) = \mathrm{Al}(U_1, .., U_p) \quad \text{oder} \quad S((x)) = \mathrm{Al}((U)). \qquad (22)$$

Es gelten dann die folgenden Sätze:

1) Im Anschluss an eine Bezeichnung von Herrn Weierstrass, Journ. für Math. Bd. 47. S. 291 (1853), oder Ges. W. Bd. I. S. 135.

(V) Die Abel'schen Functionen $\mathrm{Al}(U_1, .., U_p)$ sind eindeutig und im Allgemeinen (d. h. mit Ausnahme von Werthgebieten von weniger als $2p$ Dimensionen) stetig, und für kein endliches Werthsystem der Argumente U_h wesentlich singulär. Sie sind ferner $2p$-fach periodisch, d. h. sie besitzen $2p$ von einander unabhängige Periodensysteme, die mit den $2p$ Systemen von Periodicitätsmoduln der Normalintegrale u_h übereinstimmen.

Dies alles folgt unmittelbar aus den Eigenschaften der Thetafunctionen.

(VI) Die Ableitung einer Abel'schen Function nach einem der Argumente U_h ist wieder eine Abel'sche Function.

Denn es ist wegen (13)

$$\frac{\partial S}{\partial U_h} = \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial S}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial U_h} = S_1(x_1, .., x_p) = \mathrm{Al}_1(U_1, .., U_p), \tag{23}$$

wo S_1 ebenfalls eine rationale und symmetrische Function der x_i und Al_1 ebenfalls eine Abel'sche Function der U_h bezeichnet.

(VII) Zwischen je $p+1$ Abel'schen Functionen, insbesondere zwischen einer Abel'schen Function und ihren p ersten Ableitungen besteht eine algebraische Gleichung.

Man erhält diese Gleichung durch Bildung einer Reihe von Gleichungen der Form (22) und (23) und Elimination der Coordinaten der p Punkte $x_1, .., x_p$ mit Benutzung der p Gleichungen $F(x_i) = 0$.

(VIII) Jede Abel'sche Function lässt sich rational durch $p+1$ geeignete Abel'sche Functionen darstellen, insbesondere durch eine Abel'sche Function und deren p erste Ableitungen.

Man erhält diese Darstellung während des im Beweis von VII erwähnten Eliminationsprocesses.

Hieran schliessen sich weitere Sätze über die Addition, Multiplication und Division der Abel'schen Functionen. Setzt man, unter x_i, y_i, z_i $(i = 1, .., p)$ drei Punktsysteme verstanden:

$$\sum_i \int_{\alpha_i^0}^{x_i} du_h = U_h, \quad \sum_i \int_{\alpha_i^0}^{y_i} du_h = V_h, \quad \sum_i \int_{\alpha_i^0}^{z_i} du_h = W_h \tag{24}$$

mit der Bedingung, dass

$$W_h = U_h + V_h \quad (h = 1, .., p), \tag{24a}$$

so folgt nach der Umkehrung des Abel'schen Theorems (Satz VI § 20), dass die rationalen und symmetrischen Functionen der Coordinaten der p Punkte z_i rationale und symmetrische Functionen der Coordinaten sowohl der p Punkte x_i, wie der p Punkte y_i, oder, wenn man Satz VIII berücksichtigt, dass die Abel'schen Functionen der Argumente $W_h = U_h + V_h$ rationale und symmetrische Functionen von $p+1$ Abel'schen Functionen sowohl mit den Argumenten U_h, wie mit den Argumenten V_h sind. Sind daher $S_\varrho(\!(x)\!) = \mathrm{Al}_\varrho(\!(U)\!)$ $(\varrho = 0, 1, .., p)$ $p+1$ unabhängige Abel'sche Functionen und bezeichnet $R[A_0, A_1, .., A_p; B_0, B_1, .., B_p]$ eine rationale Function von $2p+2$ Grössen A und B, die sich nicht ändert, wenn man A_ϱ bez. mit B_ϱ vertauscht, so hat man eine Gleichung von der Form $(\varrho, \sigma = 0, 1, .., p)$:

$$S(\!(z)\!) = R[S_0(\!(x)\!), S_1(\!(x)\!), .., S_p(\!(x)\!); S_0(\!(y)\!), S_1(\!(y)\!), .., S_p(\!(y)\!)]$$

oder

$$\mathrm{Al}(\!(U+V)\!) = R[\mathrm{Al}_0(\!(U)\!), \mathrm{Al}_1(\!(U)\!), .., \mathrm{Al}_p(\!(U)\!); \mathrm{Al}_0(\!(V)\!), \mathrm{Al}_1(\!(V)\!), .., \mathrm{Al}_p(\!(V)\!)]. \quad (25)$$

Dies gibt den Satz:

(IX) Eine Abel'sche Function besitzt ein rationales Additionstheorem, d. h. die Function Al gebildet mit dem Argumentensystem $U_h + V_h$, drückt sich rational und symmetrisch aus durch $p+1$ Abel'sche Functionen mit den Argumentensystemen U_h und V_h.

Dasselbe folgt unmittelbar aus Satz VIII.

Aus der Gleichung für die Addition ergibt sich die Gleichung für die ganzzahlige Multiplication der Abel'schen Functionen. Ist m eine ganze, positive Zahl und setzt man $(i, h = 1, .., p)$:

$$\sum_i \int_{\alpha_i^0}^{z_i} du_h \equiv m \sum_i \int_{\alpha_i^0}^{x_i} du_h \quad \text{oder} \quad W_h \equiv m U_h, \quad (26)$$

so folgt aus (25) als Lösung der Aufgabe, eine Abel'sche Function mit den Argumenten mU_h durch Abel'sche Functionen mit den Argumenten U_h darzustellen $(\varrho = 0, 1, .., p)$:

$$\mathrm{Al}(\!(mU)\!) = R[\mathrm{Al}_0(\!(U)\!), \mathrm{Al}_1(\!(U)\!), .., \mathrm{Al}_p(\!(U)\!)]. \quad (27)$$

Die Umkehrung der Multiplication bildet die Division der Abel'schen Functionen, d. h. die Aufgabe, eine Abel'sche Function mit den Argumenten U_h durch Abel'sche Functionen mit den Argumenten mU_h darzustellen oder nach (26) eine rationale, symmetrische Function der p Punkte x_i als Function der p Punkte z_i darzustellen. Die Lösung dieser Aufgabe ist mehrdeutig. Denn ersetzt man in (26) das Congruenzzeichen durch ein Gleichheitszeichen, in-

dem man zugleich auf der linken Seite ein zusammengehöriges Periodensystem zufügt, so erhält man statt (26) ($i, h = 1, .., p$):

$$\sum_i \int_{\alpha_i^0}^{x_i} du_h = \frac{1}{m} \sum_i \int_{\alpha_i^0}^{z_i} du_h + \frac{1}{m} \mathsf{M}_h, \tag{28}$$

wo

$$\mathsf{M}_h = \mu_h' \pi i + \sum_k \mu_h a_{hk}$$

ist und die Zahlen μ, μ' alle Werthe $0, 1, .., m - 1$ durchlaufen können. Jeder m-theiligen Charakteristik (μ) in (28) entspricht eindeutig ein System von p Punkten x_i. Da es m^{2p} verschiedene m-theilige Charakteristiken gibt, so besitzt das Divisionsproblem (28) m^{2p} verschiedene Lösungen.

Weitere Fragen betreffen den Zusammenhang zwischen diesen m^{2p} Lösungen und die Beziehungen derselben zu den Lösungen des speciellen Divisionsproblems (Theilung der Perioden), das entsteht, wenn man in (28) die Punkte $z_1, .., z_p$ mit $\alpha_1^0, .., \alpha_p^0$ zusammenfallen lässt. Dies Problem ist schon früher, z. B. Gl. (4), aufgetreten in der Form

$$\sum_i \int_{\alpha_i^0}^{\alpha_i^\mu} du_h = \frac{1}{m} \mathsf{M}_h, \tag{29}$$

wo die p Punkte α_i^0 gegeben sind und die Coordinaten der p Punkte α_i^μ ($i = 1, .., p$) oder auch ihre rationalen und symmetrischen Functionen durch die p Punkte α_i^0 darzustellen sind.

Zwischen dem allgemeinen und dem speciellen Theilungsproblem besteht ein Zusammenhang, den wir nur andeuten[1]). Gehören in (28) zu einem Periodensystem M_h die Lösungen $x_1, .., x_p$, zu einem anderen Periodensystem M_h' die Lösungen $x_1', .., x_p'$ und gehören in (29) zu dem Periodensystem $\mathsf{M}_h - \mathsf{M}_h'$ die Lösungen $\alpha_1^{\mu\mu'}, .., \alpha_p^{\mu\mu'}$, so erhält man aus den zugehörigen Gleichungen durch Elimination der z_i

$$\sum_i \int_{x_i}^{x_i'} du_h + \sum_i \int_{\alpha_i^0}^{\alpha_i^{\mu\mu'}} du_h \equiv 0, \tag{30}$$

d. h. nach dem Abel'schen Theorem (IV § 20): Kennt man die sämmtlichen Lösungen des speciellen Theilungsproblems (29) und die Lösung $x_1, .., x_p$ des allgemeinen Theilungsproblems (28) für ein Perioden-

1) Clebsch u. Gordan, Ab. F. § 68 ff.

system M_h, so ergeben sich daraus auf algebraischem Wege die Lösungen $x_1', \ldots, x_p'$ des allgemeinen Theilungsproblems für jedes andere Periodensystem M_h'. Man kann diesen Zusammenhang besonders einfach aussprechen, wenn man die Lösung des speciellen Theilungsproblems von einer einzigen Gleichung abhängig macht, wie dies in § 32 für $m = 2$ durch die Gleichung $R(r) = 0$ vom Grade 2^{2p} in r geschah. In ähnlicher Weise hängt die Lösung des speciellen Theilungsproblems (29) von der Lösung einer einzigen Gleichung $\mathsf{P}(\varrho) = 0$ ab (der sogen. speciellen Theilungsgleichung), die vom Grade $m^{2p} - 1$ in ϱ ist (da hier das System α_i^0 gegeben ist) und die Lösung des allgemeinen Theilungsproblems (30) von einer einzigen Gleichung $\mathsf{T}(\tau) = 0$ (der sogen. allgemeinen Theilungsgleichung), die vom Grade m^{2p} in τ ist, und es gilt der Satz:

(X) Jede Wurzel τ' der Gleichung $\mathsf{T} = 0$ stellt sich dar in der Form $\tau' = \Theta(\tau, \varrho)$, wo Θ eine gewisse, rationale Function von τ und ϱ ist und τ irgend eine Wurzel von $\mathsf{T} = 0$, ϱ aber eine bestimmte Wurzel von $\mathsf{P} = 0$ ist. Man erhält alle Wurzeln τ' der Reihe nach, wenn man für ϱ der Reihe nach alle Wurzeln von $\mathsf{P} = 0$ setzt.

Hieraus folgt: Die allgemeine Theilungsgleichung $\mathsf{T} = 0$ ist eine Abel'sche Gleichung und algebraisch (durch Wurzelzichen) lösbar, wenn die specielle Theilungsgleichung $\mathsf{P} = 0$ gelöst ist. Die letztere Gleichung lässt sich zwar mit Hilfe der Relationen, die zwischen ihren Wurzeln ϱ bestehen (und die von ähnlicher Art sind wie für die Wurzeln der Gleichung $R = 0$ im Fall $m = 2$), auf einfachere Gleichungen zurückführen, aber nicht algebraisch lösen.

§ 37. Beziehungen zwischen Thetafunctionen und Abel'schen Integralen.

In § 35 wurden unter Voraussetzung der Gleichungen ($h = 1, \ldots, p$):

$$\sum_{k=0}^{q} \int_{\alpha_k}^{x_k} du_h \equiv V_h \tag{1}$$

Beziehungen zwischen Thetafunctionen und algebraischen Functionen betrachtet. Ebenso sollen jetzt Beziehungen zwischen Thetafunctionen mit den Argumenten V_h und Abel'schen Integralen, gebildet mit den Coordinaten der Punkte x_k, untersucht werden. Es wird sich zeigen, dass die Darstellung von $\log \vartheta_\mu(\!(V)\!)$ auf Integrale 3. Gattung führt, die der ersten Ableitungen von $\log \vartheta_\mu(\!(V)\!)$ nach den Argumenten V_h

auf Integrale 2. Gattung und die der zweiten und höheren Ableitungen von $\log \vartheta_\mu(\!(V)\!)$ nach den V_h auf rationale Functionen, alle diese Ausdrücke symmetrisch gebildet in den Coordinaten der Punkte x_k. Umgekehrt erhält man gleichzeitig die Darstellung von Integralen 3. Gattung, von Integralen 2. Gattung und von algebraischen Functionen durch Logarithmen von Thetafunctionen mit den Argumenten V_h und durch die ersten und höheren Ableitungen dieser Logarithmen nach den Argumenten V_h.

Wir gehen aus von dem Thetaquotienten[1]) $(i = 1, .., p)$:

$$(2) \qquad \vartheta_\mu\left(\!\!\left(\int_\alpha^x du - \sum_i \int_{\alpha_i^\mu}^{\xi_i} du\right)\!\!\right) : \vartheta_\mu\left(\!\!\left(\int_\alpha^x du - \sum_i \int_{\alpha_i^\mu}^{\eta_i} du\right)\!\!\right),$$

in welchem μ eine beliebige, m-theilige Charakteristik, ξ_i und η_i $(i = 1, .., p)$ sowie x beliebig gegebene Punkte seien und α_i^μ $(i = 1, .., p)$ die p 0^1 Punkte der Function $\vartheta_\mu(\!(u)\!)$ (1) § 36. Der Ausdruck (2) wird, als Function von x betrachtet, in der Verzweigungsfläche T gleich 0^1 in den p Punkten ξ_i und gleich ∞^1 in den p Punkten η_i (nach (3) § 36); er hat ferner an dem Querschnitt a_h von T' den Factor 1, an b_h nach (10) § 26 den Factor

$$(3) \qquad e^{2\sum_i \int_{\eta_i}^{\xi_i} du_h}.$$

Betrachtet man andrerseits den Ausdruck

$$(4) \qquad e^{\sum_i \int_y^x dw_{\eta_i \xi_i}},$$

in dem $w_{\eta_i \xi_i}$ ein Normalintegral 3. Gattung mit den Unstetigkeitspunkten η_i und ξ_i ist und y ein beliebiger Punkt, so wird derselbe, als Function von x betrachtet, in T ebenfalls gleich 0^1 in den p Punkten ξ_i, gleich ∞^1 in den p Punkten η_i (nach (I) § 16) und hat an den Querschnitten a_h von T' den Factor 1, an b_h den Factor (3) (nach (15) § 18). Der Quotient von (2) und (4) ist daher eine Function von x, die in der Verzweigungsfläche T allenthalben stetig ist; er ist also nach (Ib) § 6 eine von x unabhängige Constante. Bestimmt man diese durch die Substitution $x = y$ und geht vom Numerus zum Logarithmus über, so hat man die fundamentale Gleichung $(i = 1, .., p)$:

---

1) Riemann, Ges. W. S. 130.

$$\log \frac{\vartheta_\mu\Big(\Big(\int\limits_\alpha^x du - \sum\limits_i \int\limits_{\alpha_i^\mu}^{\xi_i} du\Big)\Big)\,\vartheta_\mu\Big(\Big(\int\limits_\alpha^y du - \sum\limits_i \int\limits_{\alpha_i^\mu}^{\eta_i} du\Big)\Big)}{\vartheta_\mu\Big(\Big(\int\limits_\alpha^x du - \sum\limits_i \int\limits_{\alpha_i^\mu}^{\eta_i} du\Big)\Big)\,\vartheta_\mu\Big(\Big(\int\limits_\alpha^y du - \sum\limits_i \int\limits_{\alpha_i^\mu}^{\xi_i} du\Big)\Big)} = \sum_i \int\limits_y^x dw_{\eta_i \xi_i} = \sum_i \int\limits_{\eta_i}^{\xi_i} dw_{yx}. \qquad (5)$$

Dabei sind in den Integralsummen der 3. Gattung bestimmte Integrationswege vorausgesetzt. Der letzte Integralausdruck in (5) geht aus dem vorletzten hervor durch den Vertauschungssatz von Parameter und Argument bei den Integralen 3. Gattung (Gl. 19 § 18).

Die Thetafunctionen in (5) enthalten p-gliedrige Integralsummen 1. Gattung, deren obere Grenzpunkte ξ_i und η_i beliebig sind, während die unteren Grenzpunkte α_i^μ von α abhängen. Mit Hilfe des Abel'schen Theorems gewinnt die Gleichung (5) eine allgemeinere und symmetrischere Form[1]). Versteht man nämlich unter $x_1, .., x_q$; $y_1, .., y_q$; $\alpha_1, .., \alpha_q$ drei Systeme von je q beliebigen Punkten und definirt die p Punkte ξ_i und η_i in (5) durch die Congruenzen ($h = 1, .., p$):

$$\sum_{i=1}^p \int\limits_{\alpha_i^\mu}^{\xi_i} du_h + \sum_{k=1}^q \int\limits_{\alpha_k}^{x_k} du_h \equiv 0, \quad \sum_{i=1}^p \int\limits_{\alpha_i^\mu}^{\eta_i} du_h + \sum_{k=1}^q \int\limits_{\alpha_k}^{y_k} du_h \equiv 0, \qquad (6)$$

so ist

$$\sum_{i=1}^p \int\limits_{\eta_i}^{\xi_i} du_h + \sum_{k=1}^q \int\limits_{y_k}^{x_k} du_h \equiv 0. \qquad (7)$$

Aus dem ersten System (6) folgt nach IV § 20 die Existenz einer rationalen Function der Coordinaten von x, die in den $q+p$ Punkten α_k und α_i^μ gleich ∞^1 und in den $q+p$ Punkten x_k und ξ_i gleich 0^1 wird. Der Nenner $X_\mu(x)$ dieser Function wird erhalten, indem man eine Curve $X_\mu(x) = 0$ bestimmt, die durch die r Doppelpunkte δ von $F = 0$, durch die p Punkte α_i^μ und die q Punkte α_k hindurchgeht. Diese Curve wird $F = 0$ noch in weiteren Punkten $\zeta_1, .., \zeta_t$ schneiden. Legt man nun durch die r Punkte δ, die t Punkte ζ und die q Punkte $x_1, .., x_q$ eine Curve desselben Grades $X_\mu(x, x_1, .., x_q) = 0$, so sind die p letzten Schnittpunkte derselben nach (6) gerade die p Punkte ξ_i. Die Functionen $X_\mu(x)$ und $X_\mu(x, x_1, .., x_q)$ sind genau dieselben, die auf S. 299 gebildet wurden. Entsprechend erhält man zu dem zweiten System (6) eine Function, deren Nenner wieder durch die Curve $X_\mu(x) = 0$ und deren Zähler durch eine Curve

1) H. Stahl, Journ. für Math. Bd. 111. S. 102 ff. (1892).

$X_\mu(x, y_1, .., y_q) = 0$ bestimmt ist, die durch die q Punkte $y_1, .., y_q$ gelegt ist und alsdann $F = 0$ gerade noch in den p Punkten η_i schneidet. Der Quotient $X_\mu(x_1, .., x_q) : X_\mu(x, y_1, .., y_q)$ ist die nach (7) existirende, rationale Function, welche die $q + p$ Punkte x_k und ξ_i zu 0^1, die $q + p$ Punkte y_k und η_i zu ∞^1 Punkten hat. Diese Function gibt nach dem Abel'schen Theorem für das Integral 3. Gattung w_{yx} (V § 19) die Gleichung:

$$(8)\quad \sum_{i=1}^{p} \int_{\eta_i}^{\xi_i} dw_{yx} + \sum_{k=1}^{q} \int_{y_k}^{x_k} dw_{yx} = \log \frac{X_\mu(x, x_1, .., x_q)\, X_\mu(y, y_1, .., y_q)}{X_\mu(x, y_1, .., y_q)\, X_\mu(y, x_1, .., x_q)}.$$

Ersetzt man nun in (5) die Punkte ξ_i und η_i nach (6) und (8) durch die Punkte x_k und y_k und schreibt zur Abkürzung

$$(9)\quad \begin{cases} \left(\int_\alpha^{x_k} du_1, .., \int_\alpha^{x_k} du_p\right) = [x_k] \\ \left(\sum_{k=0}^{q} \int_{\alpha_k}^{x_k} du_1, .., \sum_{k=0}^{q} \int_{\alpha_k}^{x_k} du_p\right) = [x, x_1, .., x_q], \end{cases}$$

so erhält man

$$(10)\quad \begin{cases} \log \dfrac{\vartheta_\mu[x, x_1, .., x_q]\, \vartheta_\mu[y, y_1, .., y_q]}{\vartheta_\mu[x, y_1, .., y_q]\, \vartheta_\mu[y, x_1, .., x_q]} \\ = \sum_{k=1}^{q} \int_{\alpha_k}^{x_k} dw_{xy} + \log \dfrac{X_\mu(x, x_1, .., x_q)\, X_\mu(y, y_1, .., y_q)}{X_\mu(x, y_1, .., y_q)\, X_\mu(y, x_1, .., x_q)}, \end{cases}$$

oder, wenn man die willkürlichen Punkte $y, y_1, .., y_q$ gleich $\alpha, \alpha_1, .., \alpha_q$ setzt, den von x unabhängigen Theil absondert, den Satz von der Vertauschung von Parameter und Argument bei Integralen 3. Gattung (VI § 18) anwendet und berücksichtigt, dass $X_\mu(x, \alpha_1, .., \alpha_q) = X_\mu(x)$ ist,

$$\begin{cases} \log \vartheta_\mu[x, x_1, .., x_q] - \log \vartheta_\mu[x] \\ = \sum_{k=1}^{q} \int_{\alpha}^{x} dw_{x_k \alpha_k} + \log X_\mu(x, x_1, .., x_q) - \log X_\mu(x) + C_\mu, \end{cases}$$

wo C_μ eine von x unabhängige Grösse ist. Durch Hinzufügung von Gliedern, die ebenfalls von x unabhängig sind, erhält man

$$(11)\quad \begin{cases} \log \dfrac{\vartheta_\mu[x, x_1, ..., x_q]}{\vartheta_\mu[x]\, \vartheta_\mu[x_1] .. \vartheta_\mu[x_q]} = \sum_{i=0}^{q} \sum_{k=0}^{q}{}' \int_{\alpha_k}^{x_k} dw_{x_i \alpha_i} \\ \qquad + \log \dfrac{X_\mu(x, x_1, ..., x_q)}{X_\mu(x) X_\mu(x_1) .. X_\mu(x_q)} + A_\mu, \end{cases}$$

wo in der Doppelsumme der rechten Seite die Glieder, für welche $i = k$ ist, ausgeschlossen sind und jede Combination i, k nur einmal zu nehmen ist, was durch das Komma an dem Summenzeichen angedeutet sei. Die Grösse A_μ ist unabhängig von $x, x_1, .., x_q$, da die Ausdrücke auf beiden Seiten in (11) für diese Punkte symmetrisch gebildet sind; sie bestimmt sich am einfachsten durch die Substitution $x, x_1, .., x_q = \alpha, \alpha_1, .., \alpha_q$; man erhält

$$A_\mu = \log \frac{X_\mu(\alpha_1) \, .. \, X_\mu(\alpha_q)}{\vartheta_\mu[\alpha_1] \, .. \, \vartheta_\mu[\alpha_q]}, \tag{12}$$

da die Integralsumme auf der rechten Seite in (11) durch die Substitution verschwindet.

Es bleibt noch $\vartheta_\mu[x_k]$ zu bestimmen. Hierzu setze man in (5) x_k für x, ferner $y = \alpha$, $\xi_i = \alpha_i^\mu$ und für $\eta_1, .., \eta_p$ p Punkte $b_1^k, .., b_p^k$, definirt durch die Congruenzen ($h = 1, .., p$):

$$2 \sum_{i=1}^{p} \int_{\alpha_i^0}^{b_i^k} du_h \equiv \int_{\alpha}^{x_k} du_h. \tag{13}$$

Dann erhält man, wie leicht zu sehen,

$$\log \vartheta_\mu[x_k] - \log \vartheta_\mu((0)) \equiv \sum_{i=1}^{p} \int_{\alpha_i^\mu}^{b_i^k} dw_{x_k \alpha} - \frac{2}{m} \sum_{h=1}^{p} \int_{\alpha}^{x_k} \mu_h du_h. \tag{14}$$

Die p Punkte b_i^k lassen sich aus (13) auf 2^{2p} Arten bestimmen; es ist gleichgültig, welches dieser Systeme man wählt. Von der Bestimmung von $\vartheta_\mu((0))$ durch invariante Klassenmoduln war schon in § 33 die Rede. Trägt man die Werthe (14) und (12) in (11) ein, so hat man die Darstellung von

$$\log \vartheta_\mu[x, x_1, .., x_q] = \log \vartheta_\mu(V_1, .., V_p) \tag{15}$$

durch Integrale 3. Gattung und algebraische Functionen; sie enthält den Satz:

(I) Der Logarithmus einer Thetafunction mit beliebiger, m-theiliger Charakteristik, deren Argumente Integralsummen erster Gattung mit einer beliebigen Zahl $q + 1$ von Gliedern und mit beliebigen oberen und unteren Grenzpunkten x_k und α_k ($k = 0, 1, .., q$) sind, lässt sich symmetrisch in den Coordinaten dieser zwei Punktsysteme darstellen durch Logarithmen von rationalen Functionen und durch Integrale dritter Gattung, deren Grenz- und

Unstetigkeits-Punkte ausser x_k und α_k selber nur noch Punkte enthalten, welche von x_k und α_k algebraisch abhängen.

Sind (μ) und (ν) zwei verschiedene, m-theilige Charakteristiken, so folgt aus (11) mit Rücksicht auf (5) § 36 wieder die Gleichung (7) § 36 und der Satz I § 36.

Wir kommen weiter zur Darstellung der Ableitungen von $\log \vartheta_\mu((V))$ nach den Argumenten V_h.[1]) Hierzu setzen wir $q = p$, also $(h = 1, .., p)$:

$$(16)\qquad V_h \equiv \sum_{k=0}^{p} \int_{\alpha_k}^{x_k} du_h.$$

Zunächst erhält man aus (14) durch Differentiation nach x_k, wenn t_{x_k} ein Normalintegral 2. Gattung mit dem Unstetigkeitspunkt x_k ist (§ 16) $(i, h = 1, .., p)$:

$$(17)\qquad \frac{\partial \log \vartheta_\mu[x_k]}{\partial x_k} = \sum_i \left(\frac{\partial w_{x_k \alpha}}{\partial x}\right)_{b_i^k} \frac{\partial b_i^k}{\partial x_k} + \sum_i \int_{\alpha_i^u}^{b_i^k} dt_{x_k} - \frac{2}{m} \sum_h \mu_h \left(\frac{\partial u_h}{\partial x}\right)_{x_k},$$

wobei $\frac{\partial b_i^k}{\partial x_k}$ nach (13) bestimmt ist aus

$$\sum_i \left(\frac{\partial u_h}{\partial x}\right)_{b_i^k} \frac{\partial b_i^k}{\partial x_k} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_h}{\partial x}\right)_{x_k}.$$

Ferner ergibt sich aus (11)

$$(18)\qquad \frac{\partial \log}{\partial x_k} \frac{\vartheta_\mu[x, x_1, .., x_p]}{\vartheta_\mu[x_k]} = \sum_{i=1}^{p}{}' \int_{\alpha_i}^{x_i} dt_{x_k} + \frac{\partial \log}{\partial x_k} \frac{X_\mu(x, x_1, .., x_p)}{X_\mu(x_k)},$$

wo das Komma am Summenzeichen andeutet, dass der Werth $i = k$ auszuschliessen ist.

Trägt man den Werth (17) in (18) ein, so folgt ein Ausdruck für $(k = 0, 1, .., p)$:

$$(19)\qquad \frac{\partial \log \vartheta_\mu[x, x_1, .., x_p]}{\partial x_k} = \frac{\partial \log \vartheta_\mu(V_1, .., V_p)}{\partial x_k} = P_k,$$

oder für

$$(20)\qquad d \log \vartheta_\mu((V)) = P dx + P_1 dx_1 + \cdots + P_p dx_p,^{2})$$

---

1) Riemann, Ges. W. S. 132 und die Ausführungen von Thomae, Journ. für Math. Bd. 66. S. 94 ff. (1865) und Bd. 71. S. 212 ff. (1869).

2) Weierstrass, für hyperelliptische Functionen, Journ. für Math. Bd. 47. S. 300. Gl. 35 (1853).

wo die P_k aus Integralen 2. Gattung und algebraischen Functionen in den Punkten x_k und α_k $(k = 0, 1, .., p)$ gebildet sind. Schreibt man die Gleichungen (19) in der Form $(k = 0, 1, .., p)$:

$$\sum_{h=1}^{p} \frac{\partial \log \vartheta_\mu(\!(V)\!)}{\partial V_h} \left(\frac{\partial u_h}{\partial x}\right)_{x=x_k} = P_k \tag{21}$$

und setzt abkürzend $\left(\frac{\partial u_h}{\partial x}\right)_{x_k} = \frac{\partial u_h}{\partial x_k}$, so folgt

$$\begin{vmatrix} P & \frac{\partial u_1}{\partial x} \cdots \frac{\partial u_p}{\partial x} \\ P_1 & \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial u_p}{\partial x_1} \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ P_p & \frac{\partial u_p}{\partial x_p} \cdots \frac{\partial u_p}{\partial x_p} \end{vmatrix} = 0. \tag{22}$$

Lässt man in (21) die erste Gleichung $(k = 0)$ weg und setzt

$$D = \sum \pm \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial u_p}{\partial x_p}, \tag{23}$$

so folgt $(h = 1, .., p)$:

$$\frac{\partial \log \vartheta_\mu(\!(V)\!)}{\partial V_h} = \sum_{l=1}^{p} \frac{\partial \log D}{\partial \left(\frac{\partial u_h}{\partial x_l}\right)} P_l. \tag{24}$$

Diese Gleichung enthält den Satz:

(II) Die ersten Ableitungen von $\log \vartheta_\mu(\!(V)\!)$ nach den Argumenten V_h (16) stellen sich dar durch Integrale zweiter Gattung und algebraische Functionen, symmetrisch gebildet in den Coordinaten der oberen und unteren Grenzpunkte x_k und α_k $(k = 0, 1, .., p)$ der Integralsummen V_h.

Auf gleichem Wege ergeben sich aus (24) die höheren Ableitungen von $\log \vartheta_\mu(\!(V)\!)$ nach den V_h. Auf der rechten Seite in (24) kommt die Variable x nur in den Grössen P_l $(l = 1, .., p)$ vor und zwar ist nach (18) in P_l der von x abhängige Theil

$$\int_\alpha^x dt_{x_l} + \frac{\partial \log X_\mu(x, x_1, .., x_p)}{\partial x_l}.$$

Daher erhält man durch Differentiation von P_l nach x

$$\frac{\partial P_l}{\partial x} = P_{l0} = \frac{\partial t_l}{\partial x} + \frac{\partial^2 \log X_\mu(x, x_1, .., x_p)}{\partial x_l \partial x}$$

und dieser Ausdruck ist eine rationale Function von $x, x_1, .., x_p$. Aus (24) folgt nun

$$(25)\qquad \sum_{k=1}^{p} \frac{\partial^2 \log \vartheta_\mu(\!(V)\!)}{\partial V_h \partial V_k} \frac{\partial u_k}{\partial x} = \sum_{l=1}^{p} \frac{\partial \log D}{\partial \left(\frac{\partial u_h}{\partial x_l}\right)} P_{l0},$$

wo die rechte Seite wieder eine rationale Function in $x, x_1, .., x_p$ ist. Bildet man die entsprechende Gleichung statt für x für $x_1, .., x_p$, so hat man ein ähnliches System wie (21), aus dem sich durch Auflösung die Werthe der zweiten Ableitungen von $\log \vartheta_\mu(\!(V)\!)$ nach den V_h ergeben. Hiernach gilt der Satz (vgl. (22) § 36):

(III) Die zweiten Ableitungen von $\log \vartheta_\mu(\!(V)\!)$ nach den Argumenten V_h (16) stellen sich dar als rationale und symmetrische Functionen der Coordinaten der $p+1$ Punkte $x, x_1, .., x_p$. Sie sind also $2p$-fach periodische oder Abel'sche Functionen der Argumente V_h.

Durch Wiederholung des Differentiationsprocesses erhält man ebenso die dritten und höheren Ableitungen von $\log \vartheta_\mu(\!(V)\!)$ nach den V_h als rationale und symmetrische Functionen der Punkte $x, x_1, .., x_p$ oder als Abel'sche Functionen der Argumente V_h.

Die entwickelten Gleichungen enthalten nun auch umgekehrt die Darstellung von Abel'schen Integralen[1]) und rationalen Functionen durch Logarithmen von Thetafunctionen mit beliebiger, m-theiliger Charakteristik und deren Ableitungen. So hat man in (10) die Darstellung einer Summe von q Integralen 3. Gattung mit denselben Unstetigkeitspunkten, aber beliebigen, oberen und unteren Grenzpunkten und, wenn man nach x differenzirt, die Darstellung einer Summe von q Integralen 2. Gattung mit demselben Unstetigkeitspunkt und beliebigen Grenzpunkten. Hierin ist auch die Darstellung eines einzelnen Integrales 3. oder 2. Gattung durch Thetafunctionen enthalten, wenn man $q = 1$ setzt, nämlich:

$$(26)\qquad \int_{y_1}^{x_1} dw_{xy} = \log \frac{\vartheta_\mu[x, x_1]\, \vartheta_\mu[y, y_1]}{\vartheta_\mu[x, y_1]\, \vartheta_\mu[y, x_1]} - \log \frac{X_\mu(x, x_1)\, X_\mu(y, y_1)}{X_\mu(x, y_1)\, X_\mu(y, x_1)},$$

$$(27)\qquad \int_{y_1}^{x_1} dt_x = \frac{\partial \log}{\partial x} \frac{\vartheta_\mu[x, x_1]}{\vartheta_\mu[x, y_1]} - \frac{\partial \log}{\partial x} \frac{X_\mu(x, x_1)}{X_\mu(x, y_1)}.$$

Aus der letzten Gleichung erhält man durch Differentiation nach x_1 die Darstellung einer rationalen Function

1) Riemann, Ges. W. S. 132.

$$\left(\frac{dt_x}{\partial x}\right)_{x=x_1} = \frac{\partial^2 \log}{\partial x\, \partial x_1}\,\vartheta_\mu[x,\, x_1] - \frac{\partial^2 \log}{\partial x\, \partial x_1}\,X_\mu(x,\, x_1). \tag{28}$$

Aus (26) ergibt sich auch der Vertauschungssatz der Integrale 3. Gattung (19) § 18, da man y_1 mit x und x_1 mit y vertauschen kann, ohne dass sich die rechte Seite der Gleichung ändert. Ebenso folgt aus (28) der Vertauschungssatz für die Differentiale 2. Gattung (17) § 18.

Da sich nach (II) § 17 jede rationale Function von x als Summe von Integralen 2. Gattung darstellen lässt, so kann man nach (27) eine solche Function auch durch die ersten logarithmischen Ableitungen von Thetafunctionen darstellen.

Man kann die Darstellung (26) des Integrals 3. Gattung durch Thetafunctionen noch mannigfach abändern; man braucht z. B. nur die Riemann'sche Gleichung (5) zu specialisiren. Setzt man in derselben statt der allgemeinen, m-theiligen Charakteristik μ eine zweitheilige, ungrade Charakteristik ν und demgemäss $\alpha_p^\nu = \alpha$ (§ 29. S. 239); setzt man ferner $\xi_i = \eta_i = \alpha_i^\nu$ $(i = 1, \ldots, p-1)$, schreibt schliesslich ξ, η für ξ_p, η_p und benutzt wieder die Abkürzung (16a) § 36, so folgt:

$$\int_\eta^\xi dw_{yx} = \int_y^x dw_{\eta\xi} = \log\frac{\vartheta_\nu(x,\, \xi)\,\vartheta_\nu(y,\, \eta)}{\vartheta_\nu(x,\, \eta)\,\vartheta_\nu(y,\, \xi)} = \log\frac{E(x,\, \xi)\,E(y,\, \eta)}{E(x,\, \eta)\,E(y,\, \xi)}, \tag{29}$$

wo $E(x,\, \xi)$ die in (16d) § 36 eingeführte Primfunction ist.

Die Gleichung (29) führt zu einer zweiten Definition der Function E. Setzt man nämlich in (29) $x = \xi + d\xi$, $y = \eta + d\eta$ und wendet die Formeln (5—8) § 33, sowie die Bezeichnung (16c) § 36 an, so erhält man, wenn zur Abkürzung

$$\int_y^x dw_{\eta\xi} = w_{\eta\xi}^{yx}$$

gesetzt und $\lim d\xi = 0$, $\lim d\eta = 0$ genommen wird:

$$-\,e^{w_{\eta\quad\xi}^{\eta+d\eta\;\xi+d\xi}} = \frac{\vartheta_\nu(\xi + d\xi,\, \xi)\,\vartheta_\nu(\eta + d\eta,\, \eta)}{[\vartheta_\nu(\xi,\, \eta)]^2} = \frac{v_\nu'(\xi)\, v_\nu'(\eta)}{a_\nu^2\,[\vartheta_\nu(\xi,\eta)]^2}\, d\xi\, d\eta$$

und hieraus statt (16d) § 36:

$$[E(\xi,\, \eta)]^2 = -\,e^{-w_{\eta\quad\xi}^{\eta+d\eta\;\xi+d\xi}}\, d\xi\, d\eta. \tag{30}$$

Hier ist also $E(\xi,\, \eta)$ aus dem Integral 3. Gattung durch einen Grenzübergang definirt[1]).

1) Diesen Grenzübergang gibt Herr Schottky (Journ. für Math. Bd. 101.

An die Darstellung der Abel'schen Integrale durch Thetafunctionen schliessen sich endlich die Gleichungen für die Addition der Abel'schen Integrale[1]) an, analog gebildet den Gleichungen für die Addition der Abel'schen Functionen (25) § 36. Setzt man wie dort ($i, h = 1, .., p$):

$$(31) \qquad \sum_i \int_{\alpha_i^0}^{x_i} du_h \equiv U_h, \quad \sum_i \int_{\alpha_i^0}^{y_i} du_h \equiv V_h, \quad \sum_i \int_{\alpha_i^0}^{z_i} du_h \equiv W_h,$$

$$(32) \qquad W_h = U_h + V_h$$

und bildet aus einem Normalintegral 3. Gattung $w_{x_0 y_0}$ und ebenso aus einem Normalintegral 2. Gattung t_{x_0} Summen je mit denselben oberen Grenzen wie in (31), so lassen sich diese Summen nach (5) als Functionen der Grössen U_h, V_h, W_h auffassen. Wir bezeichnen diese Functionen in der folgenden Weise:

$$(33) \qquad \sum_i \int_{\alpha_i^0}^{x_i} dw_{x_0 y_0} = P_{x_0 y_0}((U)), \quad \sum_i \int_{\alpha_i^0}^{x_i} dt_{x_0} = Z_{x_0}((U)).$$

Schreibt man die Gleichungen (31, 32) ($i, h = 1, .., p$):

$$\sum_i \left(\int_{x_i}^{z_i} du_h + \int_{y_i}^{\alpha_i^0} du_h \right) \equiv 0,$$

so folgt aus der Umkehrung des Abel'schen Theorems (IV) § 20, dass eine rationale Function R_x von der Ordnung $2p$ existirt, die in den Punkten x_i und y_i gleich 0^1, in z_i und α_i^0 gleich ∞^1 wird. Das Abel'sche Theorem für die Integrale 3. und 2. Gattung gibt alsdann die Gleichungen

$$\sum_i \left(\int_{x_i}^{z_i} dw_{x_0 y_0} + \int_{y_i}^{\alpha_i^0} dw_{x_0 y_0} \right) = \log R_{x_0} - \log R_{y_0},$$

$$\sum_i \left(\int_{x_i}^{z_i} dt_{x_0} + \int_{y_i}^{\alpha_i^0} dt_{x_0} \right) = \left(\frac{d \log R_x}{dx} \right)_{x = x_0}.$$

Führt man aber links statt x_i, y_i, z_i die Werthe U_h, V_h, W_h ein, so folgt

S. 242. 1886) für einen speciellen, Herr Klein (Math. Ann. Bd. 36. S. 11. 1889) für den allgemeinen Fall. Die durch (30) definirte Function steht in naher Beziehung zu der von Herrn Weierstrass in seinen Vorlesungen benutzten Primfunction $E(\xi, \eta)$. (Vgl. Ges. W. II. S. 244. 1875).

1) Weber, Journ. für Math. Bd. 70. S. 209 (1869).

$$P_{x_0 y_0}((U+V)) - P_{x_0 y_0}((U)) - P_{x_0 y_0}((V)) = \log R_{x_0} - \log R_{y_0}, \quad (34)$$

$$Z_{x_0}((U+V)) - Z_{x_0}((U)) - Z_{x_0}((V)) = \left(\frac{d \log R_x}{dx}\right)_{x_0} \quad (35)$$

und der Satz:

(IV) Die Functionen $P_{x_0 y_0}$ und Z_{x_0}, gebildet in den Argumenten $U_h + V_h$, drücken sich aus durch dieselben Functionen, gebildet in den Einzelargumenten U_h und V_h in Verbindung mit algebraischen Functionen oder Logarithmen von algebraischen Functionen.

Die Gleichungen (34) und (35) heissen das Additionstheorem der Normalintegrale 3. und 2. Gattung. Aus ihnen und dem Additionstheorem der Abel'schen Functionen ergeben sich entsprechende Additionstheoreme für die allgemeinsten Abel'schen Integrale.

Achter Abschnitt.

Die lineare Transformation der Thetafunctionen.

Die Untersuchungen der Abschnitte I—III hatten eine bestimmte, algebraische Gleichung $F(x, y) = 0$ zur Grundlage und es wurde im Abschnitt IV der Einfluss untersucht, den die eindeutige Transformation, welche die Gleichung $F(x, y) = 0$ in eine äquivalente Gleichung $F_1(x_1, y_1) = 0$ überführt, auf die Darstellung der rationalen Functionen und der Abel'schen Integrale hat, wobei diejenigen Bildungen von Wichtigkeit sind, welche dieser algebraischen Transformation gegenüber invariant sind. In ähnlicher Weise hat die Lösung des Umkehrproblems in den Abschnitten V—VII ein bestimmtes, kanonisches Querschnittsystem (a, b) der Verzweigungsfläche T' zur Voraussetzung und es ist in dem letzten Abschnitt VIII der Einfluss zu untersuchen, den die Ueberführung eines kanonischen Querschnittsystems (a, b) in ein anderes (a', b') derselben Fläche T' auf die Darstellungen des Umkehrproblems hat, wobei wieder diejenigen Bildungen von Wichtigkeit sind, welche dieser transcendenten Transformation gegenüber invariant sind.

Einem bestimmten, kanonischen Querschnittsystem (a, b) entspricht nach (XI) § 15 ein bestimmtes System von p Normalintegralen 1. Gattung u_h und ein bestimmtes System von Periodicitätsmoduln a_{hk} an den Querschnitten b_k oder auch nach § 27 und 31 ein System von Thetafunctionen $\vartheta_\mu((u, a))$ mit zweitheiliger Charakteristik μ und mit bestimmten Argumenten u_h und Moduln a_{hk}. Dem Uebergang von einem kanonischen Querschnittsystem (a, b) zu einem beliebigen andern (a', b') der Fläche T' entspricht nun eine sogen. lineare Transformation der Thetafunctionen. Dieselbe besteht darin, dass jede Thetafunction $\vartheta_\mu((u, a))$ mit den Argumenten u_h, den Moduln a_{hk} und der Charakteristik μ, abgesehen von einem Exponentialfactor, übergeht in eine bestimmte Thetafunction $\vartheta_\nu((v, b))$ mit anderen Argumenten v_h, anderen Moduln b_{hk} und anderer Charakteristik ν. Es ist die Aufgabe, diese Beziehungen zwischen den ursprünglichen und

den transformirten Thetafunctionen und ihren Elementen aufzustellen und die dabei auftretenden, auf die Charakteristiken bezüglichen, invarianten Bildungen zu ermitteln.

Wir betrachten zuerst in den §§ 38 und 39 die der Verlegung des Querschnittsystems entsprechende Transformation der Perioden und Periodencharakteristiken, dann in den §§ 40 und 41 die ihr entsprechende Transformation der Thetafunctionen und Thetacharakteristiken.

§ 38. Transformation der Perioden[1]).

Wir bezeichnen ein System von p linear unabhängigen Integralen 1. Gattung mit $w_1, .., w_p$; zwei verschiedene, kanonische Querschnittsysteme der Verzweigungsfläche T mit (a_i, b_i) und (a_i', b_i') $(i=1, .., p)$; ferner die Periodicitätsmoduln oder, wie wir kurz sagen werden, die „Perioden“ der Integrale ω_k an den Querschnitten a_i, b_i mit A_{ik}, B_{ik}, an a_i', b_i' mit A_{ik}', B_{ik}' und stellen diese Bezeichnungen zusammen in dem Schema:

	a_1 .. a_p	b_1 .. b_p	a_1' .. a_p'	b_1' .. b_p'
w_1	A_{11} .. A_{p1}	B_{11} .. B_{p1}	A_{11}' .. A_{p1}'	B_{11}' .. B_{p1}'
:	. . . .	. . . .	. . . .	. . . .
w_p	A_{1p} .. A_{pp}	B_{1p} .. B_{pp}	A_{1p}' .. A_{pp}'	B_{1p}' .. B_{pp}'

. (1)

Die Perioden A_{ik}' und B_{ik}' sind Werthe des Integrals w_k, genommen auf gewissen, geschlossenen Wegen in der Fläche T. So ist A_{ik}' der Werth von w_k, genommen auf einem Wege, der von der $-$ zur $+$ Seite des Querschnittes a_i' führt, ohne einen der Querschnitte a', b' zu überschreiten. Entsprechendes gilt von B_{ik}' und dem Querschnitt b_i'. Die Werthe A_{ik}' und B_{ik}' setzen sich nach § 15 S. 111 linear und mit ganzzahligen Coefficienten aus den Perioden von w_k an den Querschnitten a_i und b_i zusammen. Man hat daher zwischen den Perioden A_{ik}, B_{ik} und A_{ik}', B_{ik}' der Integrale w_k für das alte und das neue Querschnittsystem die Gleichungen $(i = 1, .., p)$:

$$A_{ik}' = \sum_{\mu=1}^{p} (\alpha_{i\mu} A_{\mu k} + \beta_{i\mu} B_{\mu k}), \quad B_{ik}' = \sum_{\mu=1}^{p} (\gamma_{i\mu} A_{\mu k} + \delta_{i\mu} B_{\mu k}), \quad (2)$$

die man auch durch das Schema ersetzen kann:

1) Hermite, Comptes rendus. Bd. 40. S. 249 ff. (1855) für $p=2$. Thomae, Diss. Göttingen 1864. S. 11 ff. Clebsch-Gordan, Ab. F. S. 301 ff. (1866). Kronecker, Journ. für Math. Bd. 68. S. 273 ff. (1866).

$$
(3) \qquad \begin{array}{c|ccc|ccc|}
 & A_{1k} & .. & A_{pk} & B_{1k} & .. & B_{pk} \\
\hline
A'_{1k} & \alpha_{11} & .. & \alpha_{1p} & \beta_{11} & .. & \beta_{1p} \\
\vdots & . & . & . & . & . & . \\
A'_{pk} & \alpha_{p1} & .. & \alpha_{pp} & \beta_{p1} & .. & \beta_{pp} \\
\hline
B'_{1k} & \gamma_{11} & .. & \gamma_{1p} & \delta_{11} & .. & \delta_{1p} \\
\vdots & . & . & . & . & . & . \\
B'_{pk} & \gamma_{p1} & .. & \gamma_{pp} & \delta_{p1} & .. & \delta_{pp}
\end{array} .
$$

Die $4p^2$ ganzen Zahlen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ heissen die Transformationscoefficienten; ihre Determinante Δ sei in leicht verständlicher Abkürzung geschrieben:

$$
(4) \qquad \Delta = \begin{vmatrix} \alpha_{i\mu} & \beta_{i\mu} \\ \gamma_{i\mu} & \delta_{i\mu} \end{vmatrix} .
$$

Die Coefficienten α, β, γ, δ sind nicht willkürlich, sondern durch gewisse Bedingungen beschränkt. Zunächst muss die Transformationsdeterminante $\Delta = \pm 1$ sein, da die Auflösung von (2) Gleichungen derselben Form, d. h. A_{ik}, B_{ik}, als lineare Ausdrücke mit ganzzahligen Coefficienten in A'_{ik}, B'_{ik} ergeben muss; es zeigt sich sogleich, dass $\Delta = +1$ ist.

Nach (X) § 15 bestehen zwischen den Perioden zweier Integrale 1. Gattung w_k und w_l die linearen Relationen ($i = 1, \cdot\cdot, p$):

$$
(5) \qquad \sum_i (A_{ik} B_{il} - B_{ik} A_{il}) = 0, \quad \sum_i (A'_{ik} B'_{il} - B'_{ik} A'_{il}) = 0 .
$$

Trägt man die Werthe (2) in die letzte Gleichung (5) ein, so folgt ($i, \mu, \nu = 1, .., p$):

$$
\sum_i \sum_\mu \sum_\nu [A_{\mu k} A_{\nu l} (\alpha_{i\mu}\gamma_{i\nu} - \alpha_{i\nu}\gamma_{i\mu}) + B_{\mu k} B_{\nu l} (\beta_{i\mu}\delta_{i\nu} - \beta_{i\nu}\delta_{i\mu})
$$
$$
+ (A_{\mu k} B_{\nu l} - B_{\nu k} A_{\mu l}) (\alpha_{i\mu}\delta_{i\nu} - \beta_{i\nu}\gamma_{i\mu})] = 0 .
$$

Die Vergleichung mit der ersten Gleichung (5) gibt folgende Relationen zwischen den Transformationscoefficienten:

$$
(6) \qquad \begin{gathered}
\sum_i (\alpha_{i\mu}\gamma_{i\nu} - \alpha_{i\nu}\gamma_{i\mu}) = 0, \quad \sum_i (\beta_{i\mu}\delta_{i\nu} - \beta_{i\nu}\delta_{i\mu}) = 0, \\
\sum_i (\alpha_{i\mu}\delta_{i\nu} - \beta_{i\nu}\gamma_{i\mu}) = \begin{array}{l} +1, \text{ wenn } \mu = \nu, \\ 0, \text{ wenn } \mu \gtrless \nu. \end{array}
\end{gathered}
$$

Allerdings folgt zunächst nur, dass für $\mu = \nu$: $\sum_i (\alpha_{i\mu}\delta_{i\nu} - \beta_{i\nu}\gamma_{i\mu})$ gleich einer ganzen Zahl m ist. Bildet man aber unter dieser Voraussetzung das Quadrat der Transformationsdeterminante Δ (4) in der Form

$$\Delta^2 = \begin{vmatrix} \alpha_{i\mu} & \beta_{i\mu} \\ \gamma_{i\mu} & \delta_{i\mu} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \gamma_{i\mu} & \delta_{i\mu} \\ -\alpha_{i\mu} & -\beta_{i\mu} \end{vmatrix},$$

so folgt, wenn man Verticalreihen mit Verticalreihen multiplicirt und die Gleichungen (6) berücksichtigt, $\Delta^2 = m^{2p}$ oder, da $\Delta = \pm 1$ sein muss, $m = \pm 1$. Zur Entscheidung über das Vorzeichen von m benutze man den Satz II § 15, nämlich: Zerlegt man die Perioden des Integrals w_k in ihre reellen und imaginären Theile und setzt $A_{ik} = \bar{A}_{ik} + i\bar{\bar{A}}_{ik}$ u. s. w., so müssen die Summen

$$\sum_i (\bar{A}_{ik}\bar{\bar{B}}_{ik} - \bar{B}_{ik}\bar{\bar{A}}_{ik}) \quad \text{und} \quad \sum_i (\bar{A}'_{ik}\bar{\bar{B}}'_{ik} - \bar{B}'_{ik}\bar{\bar{A}}'_{ik}) \tag{7}$$

gleichzeitig positiv sein. Trennt man aber in (2) Reelles und Imaginäres und trägt die Werthe in den zweiten Ausdruck (7) ein, so erhält man unmittelbar mit Rücksicht auf (6)

$$\sum_i (\bar{A}'_{ik}\bar{\bar{B}}'_{ik} - \bar{B}'_{ik}\bar{\bar{A}}'_{ik}) = m \sum_i (\bar{A}_{ik}\bar{\bar{B}}_{ik} - \bar{B}_{ik}\bar{\bar{A}}_{ik}),$$

wonach in der That $m = +1$ sein muss[1]). Zugleich folgt, dass die Determinante, gebildet aus den $4p^2$ reellen und imaginären Bestandtheilen $\bar{A}_{ik}$, $\bar{\bar{A}}_{ik}$, $\bar{B}_{ik}$, $\bar{\bar{B}}_{ik}$ gleich ist der Determinante, gebildet aus $\bar{A}'_{ik}$, $\bar{\bar{A}}'_{ik}$, $\bar{B}'_{ik}$, $\bar{\bar{B}}'_{ik}$.

Nennt man ein Zahlensystem $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$, das den Gleichungen (6) genügt, ein kanonisches Zahlensystem, die Determinante Δ dieser Zahlen eine kanonische Determinante und die zugehörige, lineare Transformation (2) der Perioden eine kanonische Transformation, so hat man den Satz:

(I) Jedem Uebergang von einem kanonischen Querschnittsystem in ein anderes entspricht eine kanonische Transformation der Perioden.

Es ergeben sich noch zwei weitere Eigenschaften der kanonischen Determinante, nämlich:

(Ia) Vertauscht man in einer kanonischen Determinante die Verticalreihen mit den Horizontalreihen, so erhält man wieder eine kanonische Determinante.

Wegen (6) hat man nämlich als Auflösung des Systemes (2) offenbar die Gleichungen $(\mu = 1, .., p)$:

1) Die Gleichheit der beiden Ausdrücke (7) folgt auch daraus, dass beide den Inhalt der Fläche S darstellen, die man erhält, wenn man die Fläche T' mittels des Integrals w_k conform abbildet (s. Bemerkung S. 115), und dabei das eine mal die Fläche T' von den Querschnitten (a_i, b_i), das andere mal von (a'_i, b'_i) begrenzt denkt.

(8) $A_{ik} = \sum_{\mu} (\delta_{\mu i} A'_{\mu k} - \beta_{\mu i} B'_{\mu k}), \quad B_{ik} = \sum_{\mu} (-\gamma_{\mu i} A'_{\mu k} + \alpha_{\mu i} B'_{\mu k})$.

Die Vergleichung mit (2) zeigt, dass man in den vorstehenden, wie in den folgenden Gleichungen stets die Grössen

(9) $A_{\mu k}, \quad B_{\mu k}, \quad A'_{ik}, \quad B'_{ik}, \quad \alpha_{i\mu}, \quad \beta_{i\mu}, \quad \gamma_{i\mu}, \quad \delta_{i\mu}$

gleichzeitig vertauschen kann bez. mit

(9a) $A'_{\mu k}, \quad B'_{\mu k}, \quad A_{ik}, \quad B_{ik}, \quad \delta_{\mu i}, \quad -\beta_{\mu i}, \quad -\gamma_{\mu i}, \quad \alpha_{\mu i}$.

Durch diese Vertauschung ergibt sich aus (6) ein äquivalentes System von Gleichungen, nämlich

$$(10) \qquad \sum_i (\gamma_{\mu i}\delta_{\nu i} - \delta_{\mu i}\gamma_{\nu i}) = 0, \quad \sum_i (\alpha_{\mu i}\beta_{\nu i} - \alpha_{\nu i}\beta_{\mu i}) = 0,$$

$$\sum_i (\alpha_{\nu i}\delta_{\mu i} - \beta_{\nu i}\gamma_{\mu i}) = \begin{cases} +1, & \text{wenn } \mu = \nu, \\ 0, & \text{wenn } \mu \gtrless \nu. \end{cases}$$

Die Vergleichung von (6) mit (10) beweist unmittelbar den Satz (Ia). Ferner gilt der Satz:

(Ib) Bildet man aus den adjungirten Gliedern einer kanonischen Determinante wieder eine Determinante, so ist diese ebenfalls kanonisch.

Denn löst man die Gleichungen (2) direct auf und vergleicht die Auflösung mit (8), so folgt, wenn die Unterdeterminanten von Δ (4) bezüglich der Elemente $\alpha_{i\mu}, \beta_{i\mu}, \gamma_{i\mu}, \delta_{i\mu}$ mit $\underline{\alpha_{i\mu}}, \underline{\beta_{i\mu}}, \underline{\gamma_{i\mu}}, \underline{\delta_{i\mu}}$ bezeichnet werden,

(10a) $\underline{\alpha_{i\mu}} = \delta_{i\mu}, \quad \underline{\beta_{i\mu}} = -\gamma_{i\mu}, \quad \underline{\gamma_{i\mu}} = -\beta_{i\mu}, \quad \underline{\delta_{i\mu}} = \alpha_{i\mu}$.

Daher hat man für die Unterdeterminanten $\underline{\alpha_{i\mu}}, \underline{\beta_{i\mu}}, \underline{\gamma_{i\mu}}, \underline{\delta_{i\mu}}$ dieselben Gleichungen (6) oder (10), wie für die Elemente $\alpha_{i\mu}, \beta_{i\mu}, \gamma_{i\mu}, \delta_{i\mu}$, womit der Satz bewiesen ist.

Zugleich folgt aus (10a), dass die Gleichungen (6) oder (10) nichts anderes sind als die bekannten Relationen zwischen den Elementen einer Determinante und den entsprechenden Elementen der zugehörigen, adjungirten Determinante.

Es soll nun die kanonische Transformation der Perioden näher untersucht und im Anschluss daran die Umkehrung des Satzes I gegeben werden.

Wir betrachten zuerst die Zusammensetzung zweier kanonischer Transformationen. Führt man zwei Uebergänge von einem kanonischen Querschnittsystem in ein anderes nach einander aus, so lassen sich dieselben offenbar in eine solche Veränderung zusammenfassen. Entsprechend lassen sich die zwei zugehörigen, kanonischen Transforma-

tionen in eine solche Transformation zusammenziehen. Dabei ergibt sich ein einfaches Gesetz für die Bildung der zusammengesetzten Transformation. Es sei

$$A'_{\nu k}=\sum_{\mu}(\alpha_{\nu\mu}A_{\mu k}+\beta_{\nu\mu}B_{\mu k}),\quad B'_{\nu k}=\sum_{\mu}(\gamma_{\nu\mu}A_{\mu k}+\delta_{\nu\mu}B_{\mu k}), \tag{11a}$$

$$A''_{ik}=\sum_{\nu}(\alpha'_{i\nu}A'_{\nu k}+\beta'_{i\nu}B'_{\nu k}),\quad B''_{ik}=\sum_{\nu}(\gamma'_{i\nu}A'_{\nu k}+\delta'_{i\nu}B'_{\nu k}) \tag{11b}$$

und es folge durch Zusammensetzung

$$A''_{ik}=\sum_{\mu}(\alpha''_{i\mu}A_{\mu k}+\beta''_{i\mu}B_{\mu k}),\quad B''_{ik}=\sum_{\mu}(\gamma''_{i\mu}A_{\mu k}+\delta''_{i\mu}B_{\mu k}). \tag{11c}$$

Trägt man die Werthe (11a) in (11b) ein und vergleicht mit (11c), so erhält man die Relationen

$$\begin{aligned}\alpha''_{i\mu}&=\sum_{\nu}(\alpha_{\nu\mu}\alpha'_{i\nu}+\gamma_{\nu\mu}\beta'_{i\nu}),\quad &\gamma''_{i\mu}&=\sum_{\nu}(\alpha_{\nu\mu}\gamma'_{i\nu}+\gamma_{\nu\mu}\delta'_{i\nu}),\\ \beta''_{i\mu}&=\sum_{\nu}(\beta_{\nu\mu}\alpha'_{i\nu}+\delta_{\nu\mu}\beta'_{i\nu}),\quad &\delta''_{i\mu}&=\sum_{\nu}(\beta_{\nu\mu}\gamma'_{i\nu}+\delta_{\nu\mu}\delta'_{i\nu}).\end{aligned} \tag{12}$$

Hieraus folgt der Satz:

(II) Die Zusammensetzung zweier kanonischen Transformationen von den Determinanten $\varDelta$ und $\varDelta'$ gibt wieder eine kanonische Transformation von der Determinante $\varDelta''$. Die Elemente der letzteren werden erhalten, indem man die Verticalreihen der Determinante $\varDelta$ mit den Horizontalreihen von $\varDelta'$ multiplicirt.

Man kann diesen Process der Zusammensetzung kurz durch die Gleichung $\varDelta''=\varDelta\varDelta'$ andeuten. Dabei ist $\varDelta\varDelta'$ von $\varDelta'\varDelta$ im Allgemeinen verschieden. Zu jeder Transformation $\varDelta$ gibt es eine zweite $\varDelta^{-1}$ derart, dass $\varDelta\varDelta^{-1}=\varDelta^{-1}\varDelta=1$. Die Transformation $\varDelta^{-1}$ heisst die inverse Transformation von $\varDelta$; ihre Elemente sind bestimmt durch

$$\alpha'_{i\mu}=\delta_{\mu i},\quad \beta'_{i\mu}=-\beta_{\mu i},\quad \gamma'_{i\mu}=-\gamma_{\mu i},\quad \delta'_{i\mu}=\alpha_{\mu i}. \tag{13}$$

Denn trägt man diese Werthe der α', β', γ', δ' in (12) ein, so erhält man nach (6) $\alpha''_{ii}=\delta''_{ii}=1$ $(i=1,\ldots,p)$, während alle übrigen α'', β'', γ'', δ'' gleich 0 sind. (q. e. d.)

Es gilt ferner, wenn man eine Transformation kurz durch ihre Determinante charakterisirt, der Satz:

(III) Jede allgemeine, kanonische Transformation $\varDelta$ der Perioden lässt sich aus gewissen, elementaren Transformationen $S_1,\ldots,S_m$ zusammensetzen.

Diese elementaren Transformationen S sollen dadurch definirt sein, dass sowohl in den S wie in den inversen Transformationen S^{-1} die Trans-

formationscoefficienten nur aus den Elementen 0 und ± 1 bestehen. Es ist nachzuweisen, dass

$$\varDelta = S_1 S_2 \ldots S_m \quad \text{oder} \quad \varDelta S_m^{-1} S_{m-1}^{-1} \ldots S_2^{-1} S_1^{-1} = 1,$$

so dass die Aufgabe darauf hinauskommt, die gegebene Transformation $\varDelta$ durch Zusammensetzung mit elementaren Transformationen der angegebenen Art auf die Identität 1 zurückzuführen. Hierzu genügt es, mit einigen, wenigen Typen von elementaren Transformationen zu operiren und diese Operationen selbst auf die Transformationsdeterminanten zu beschränken. Wir betrachten folgende Typen von Determinanten mit den Elementen α, β, γ, δ.

T_1: Es ist $\alpha_{ii} = \delta_{ii} = 1$ $(i = 1, \ldots, p)$ und $\beta_{mm} = \pm 1$ für einen bestimmten Zeiger m; alle übrigen Elemente sind 0.

T_2: Es ist $\alpha_{ii} = \delta_{ii} = 1$ $(i = 1, \ldots, p)$ und $\gamma_{mm} = \pm 1$ für ein bestimmtes m; alle übrigen Elemente sind 0.

T_3: Es ist $\alpha_{ii} = \delta_{ii} = 1$ $(i = 1, \ldots, p)$ und $\alpha_{mn} = \pm 1$; $\delta_{nm} = \mp 1$ für ein bestimmtes Zeigerpaar m, n; alle übrigen Elemente sind 0.

T_4: Es ist $\alpha_{ii} = \delta_{ii} = 1$ $(i = 1, \ldots, p)$ mit Ausnahme von $\alpha_{mm} = \delta_{mm} = -1$ für ein bestimmtes m; alle übrigen Elemente sind 0.

Die elementaren Transformationen T_1, T_2, T_3, T_4 sind kanonisch; zugleich sind die inversen Transformationen wieder von einem dieser vier Typen. Betrachtet man nun die Wirkung, welche auf eine gegebene Transformationsdeterminante $\varDelta$ mit den Elementen α_{ik}, β_{ik}, γ_{ik}, δ_{ik} ausgeübt wird, wenn man sie mit einer zu T_1, T_2, T_3, T_4 gehörigen Determinante multiplicirt (wobei jedesmal die Horizontalreihen der gegebenen Determinante $\varDelta$ mit den Verticalreihen der elementaren Determinante multiplicirt werden), so ergibt sich Folgendes:

T_1: Man kann in $\varDelta$ die m^{te} Verticalreihe zur $p + m^{\text{ten}}$ addiren oder von ihr subtrahiren.

T_2: Man kann in $\varDelta$ die $p + m^{\text{te}}$ Verticalreihe zur m^{ten} addiren oder von ihr subtrahiren.

T_3: Man kann in $\varDelta$ die m^{te} Verticalreihe zur n^{ten} addiren (subtrahiren) und gleichzeitig die $p + n^{\text{te}}$ von der $p + m^{\text{ten}}$ subtrahiren (addiren).

T_4: Man kann in einer Determinante, die nur noch die Diagonalglieder α_{ii} und δ_{ii} enthält, gleichzeitig die Vorzeichen eines Paares α_{mm} und δ_{mm} umkehren.

Durch wiederholte Anwendung dieser Processe kann man die gegebene Determinante $\varDelta$ in die Identität 1 verwandeln. Man kann nämlich in der ersten Horizontalreihe von $\varDelta$ durch abwechselnde Anwendungen T_1 und T_2 (mittels des ersten bis p^{ten} Gliedes) alle Glieder

vom $p+1^{\text{ten}}$ bis zum $2p^{\text{ten}}$, ferner durch T_3 (mittels des ersten Gliedes) noch alle Glieder vom zweiten bis zum p^{ten} zerstören. Dann bleibt in der ersten Horizontalreihe nur das erste Glied, das als Factor von $\Delta = 1$ selber ± 1 sein muss. Alsdann kann man in der $p+1^{\text{ten}}$ Horizontalreihe von Δ durch T_1 mittels des $p+2^{\text{ten}}$ bis p^{ten} Gliedes alle Elemente vom zweiten bis p^{ten}, ferner durch T_2 mittels des $p+1^{\text{ten}}$ Gliedes die Glieder vom $p+2^{\text{ten}}$ bis zum $2p^{\text{ten}}$, endlich durch T_1 mittels des $p+1^{\text{ten}}$ das erste Glied zerstören. Dann bleibt in der $p+1^{\text{ten}}$ Horizontalreihe von Δ nur das $p+1^{\text{te}}$ Glied, das wieder $= \pm 1$ sein muss.

Nunmehr sind in der 1ten und der $p+1^{\text{ten}}$ Horizontalreihe alle Elemente ausser den Diagonalgliedern $= 0$. Dann aber lehren die Gleichungen (6) oder (10), dass dasselbe für die 1te und die $p+1^{\text{te}}$ Verticalreihe gelten muss. Denn setzt man die Elemente

$$\alpha_{12}, \ldots, \alpha_{1p}, \beta_{11}, \ldots, \beta_{1p} \quad \text{und} \quad \gamma_{11}, \ldots, \gamma_{1p}, \delta_{12}, \ldots, \delta_{1p}$$

gleich 0, so werden auch die Elemente

$$\alpha_{21}, \ldots, \alpha_{p1}, \gamma_{11}, \ldots, \gamma_{p1} \quad \text{und} \quad \beta_{11}, \ldots, \beta_{p1}, \delta_{21}, \ldots, \delta_{p1}$$

gleich 0. Die reducirte Determinante enthält daher in der 1ten und $p+1^{\text{ten}}$ Horizontal- und Vertical-Reihe nur noch die Diagonalglieder. Mit den übrigen Reihen der Determinante kann man demnach operiren, als ob diese beiden Reihen gar nicht vorhanden wären. Man verwandelt durch dieselben Operationen die 2ten und $p+2^{\text{ten}}$ Horizontal- und Vertical-Reihen in solche, die nur die Diagonalglieder enthalten und fährt so fort, bis nur noch Diagonalglieder von der Form ± 1 vorhanden sind. Aus den Gleichungen (6) oder (10) folgt alsdann, dass α_{ii} und δ_{ii} entweder beide $= +1$ oder beide $= -1$ sein müssen. Sind Glieder der letzteren Art vorhanden, so ist noch die Transformation T_4 anzuwenden, um die Determinante auf die Identität zurückzuführen. Hiermit ist Satz III bewiesen.

Hieran schliesst sich endlich die Umkehrung von Satz I, nämlich:

(IV) Jeder kanonischen Transformation der Perioden entspricht der Uebergang von einem kanonischen Querschnittsystem zu einem anderen.

Zum Beweise[1]) zeigt man, dass jeder elementaren, kanonischen Transformation der Perioden eine Verlegung des Querschnittsystems entspricht, die ebenfalls elementar heissen soll, und dass sich aus solchen elementaren Verlegungen die allgemeinste Ueberführung eines kanonischen Querschnittsystems in ein anderes zusammensetzen lässt.

---

1) Thomae, Journ. für Math. Bd. 75. S. 229 ff. (1872).

Die den elementaren Transformationen T_1, T_2, T_3, T_4 entsprechenden Transformationsgleichungen (2) der Perioden lauten, wenn $(i, k = 1, .., p)$:

T_1: $A'_{ik} = A_{ik}$; $B'_{ik} = B_{ik}$; nur für $i = m$: $A'_{mk} = A_{mk} \pm B_{mk}$.

T_2: $A'_{ik} = A_{ik}$; $B'_{ik} = B_{ik}$; nur für $i = m$: $B'_{mk} = B_{mk} \pm A_{mk}$.

T_3: $A'_{ik} = A_{ik}$; $B'_{ik} = B_{ik}$ nur $A'_{mk} = A_{mk} \pm A_{nk}$; $B'_{nk} = B_{nk} \mp B_{mk}$.

T_4: $A'_{ik} = A_{ik}$; $B'_{ik} = B_{ik}$ nur $A'_{mk} = - A_{mk}$; $B'_{mk} = - B_{mk}$.

Aus diesen Transformationen lassen sich, wie oben gezeigt wurde, alle anderen zusammensetzen; wir benutzen dies, um noch zwei neue Typen von elementaren Transformationen einzuführen.

T_5: $\alpha_{ii} = \delta_{ii} = 1\,(i = 1, .., p)$ nur $\alpha_{mm} = \delta_{mm} = 0$; $\beta_{mm} = \pm 1$; $\gamma_{mm} = \mp 1$ für ein bestimmtes m, alle anderen Elemente $= 0$; also

$$A'_{ik} = A_{ik};\ B'_{ik} = B_{ik};\ \text{nur}\ A'_{mk} = \pm B_{mk};\ B'_{mk} = \mp A_{mk}.$$

T_6: $\alpha_{ii} = \delta_{ii} = 1\,(i = 1, .., p)$; $\alpha_{mn} = \alpha_{nm} = \delta_{mn} = \delta_{nm} = +1$ oder $= -1$ für ein bestimmtes Paar m, n; alle anderen Elemente $= 0$; also

$$A'_{ik} = A_{ik};\ B'_{ik} = B_{ik}\ \text{nur}\ A'_{mk} = A_{nk};\ A'_{nk} = A_{mk};\ B'_{mk} = B_{nk};\ B'_{nk} = B_{mk}.$$

Nun ist geometrisch leicht zu sehen, dass jeder der Transformationen T_1 bis T_6 eine bestimmte Querschnittverlegung entspricht. Man hat nur festzuhalten, dass A_{ik} und B_{ik} die Perioden von w_k an

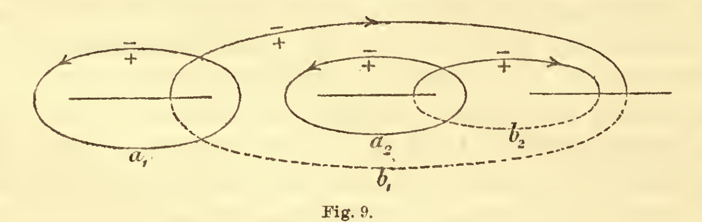


Fig. 9.

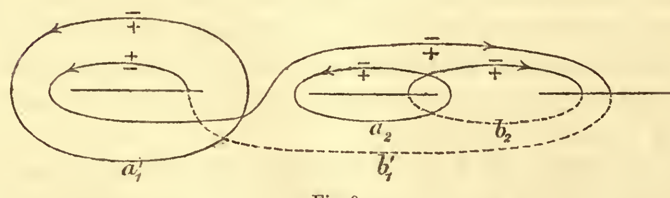


Fig. 9_1.

den Querschnitten a_i und b_i sind, d. h. A_{ik} der Werth von w_k, genommen längs b_i von der — zur + Seite von a_i, und B_{ik} der Werth von w_k, genommen längs a_i von der — zur + Seite von b_i. In Fig. 9 ist die Normalform der Verzweigungsfläche T (§ 3) zu Grunde gelegt

und es sind die obigen Zahlen in T_1 bis T_6 $m=1$, $n=2$ gesetzt; ferner sind die Richtungen, in welchen bei der Bestimmung der Periodicitätsmoduln die Querschnitte durchlaufen werden, durch Pfeile angezeigt. Man sieht nun leicht aus Fig. 9_1, dass der Transformation T_1 eine

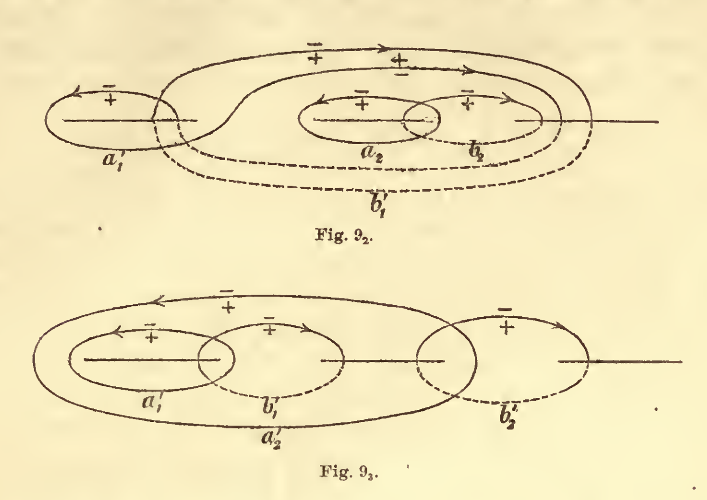


Fig. 9_2.

Fig. 9_3.

Erweiterung von b_m um a_m, aus Fig. 9_2, dass T_2 eine Erweiterung von a_m um b_m entspricht. Ferner aus Fig. 9_3, dass der Transformation T_3 eine Erweiterung von a_m um a_n und gleichzeitig von b_m um $-b_n$ entspricht. Ebenso entspricht T_4 ein Wechsel der Zeichen $\pm$ an den Querschnitten a_m und b_m, T_5 eine Vertauschung von a_m mit b_m und T_6 eine Vertauschung von a_m mit a_n und gleichzeitig von b_m mit b_n.

Die genannten Querschnittsänderungen bestehen zum Theil aus Erweiterungen (wie T_1, T_2, T_3), zum Theil aus Vertauschungen der Querschnitte. Aus diesen Aenderungen aber setzt sich jede weitere Querschnittsänderung zusammen. Es entspricht daher auch der allgemeinsten, kanonischen Transformation der Perioden eine bestimmte Verlegung des kanonischen Querschnittsystems. (q. e. d.)

§ 39. Transformation der Periodencharakteristiken.

In § 38 wurde die Transformation der Perioden untersucht, die einer Verlegung des kanonischen Querschnittsystems (a_i, b_i) der Fläche T entspricht. Wir übertragen jetzt diese Untersuchung auf die Transformation der Periodencharakteristiken.

Es seien wie früher $w_1, \ldots, w_p$ p linear unabhängige Integrale 1. Gattung und die Perioden derselben für zwei verschiedene, kanonische Querschnittsysteme (a_i, b_i) und $a_i', b_i')$ gegeben durch das Schema (1)

§ 38. Führt man die Integrale $w_1, \ldots, w_p$ über denselben geschlossenen Weg C in der Fläche T, so erhält man allgemeine, zusammengehörige Perioden $P_1, \ldots, P_p$ von $w_1, \ldots, w_p$, die sich linear und ganzzahlig aus den Perioden der w_k an den $2p$ Querschnitten von T zusammensetzen. Legt man dabei einmal das erste kanonische Querschnittsystem (a_i, b_i) zu Grunde, dann das zweite (a_i', b_i'), so erhält man, wenn $(k, \mu, i = 1, \ldots, p)$:

$$(1) \qquad P_k = \sum_\mu (\xi_\mu A_{\mu k} + \xi_\mu' B_{\mu k}) = \sum_i (x_i A_{ik}' + x_i' B_{ik}').$$

Die $2p$ ganzen Zahlen $(\xi_1, \ldots, \xi_p, \xi_1', \ldots, \xi_p')$ oder kurz (ξ) heissen die Charakteristik der Perioden $P_1, \ldots, P_p$ für die Querschnitte (a_i, b_i); ebenso die $2p$ ganzen Zahlen $(x_1, \ldots, x_p; x_1', \ldots, x_p')$ oder (x) diejenige für die Querschnitte (a_i', b_i'). Trägt man in (1) die Werthe von A_{ik}' und B_{ik}' aus (2) § 38 ein und vergleicht die Coefficienten von $A_{\mu k}$ und $B_{\mu k}$ in (1), so erhält man für die Transformation der Periodencharakteristiken (x) und (ξ) bei Verlegung des Querschnittsystems die linearen und homogenen Gleichungen

$$(2) \qquad \xi_\mu = \sum_i (\alpha_{i\mu} x_i + \gamma_{i\mu} x_i'), \quad \xi_\mu' = \sum_i (\beta_{i\mu} x_i + \delta_{i\mu} x_i').$$

Wählt man statt C einen anderen Weg C_1, so treten an Stelle von (x) und (ξ) andere Zahlensysteme (y) und (η) und an Stelle von (2) die Gleichungen

$$(3) \qquad \eta_\mu = \sum_i (\alpha_{i\mu} y_i + \gamma_{i\mu} y_i'), \quad \eta_\mu' = \sum_i (\beta_{i\mu} y_i + \delta_{i\mu} y_i').$$

Unter den Periodencharakteristiken nimmt die Charakteristik $(x) \equiv (0)$, in der sämmtliche Elemente x_i, x_i' den Werth 0 haben, eine Ausnahmestellung ein, insofern sie nach (2) bei jeder Verlegung des Querschnittsystems in sich selber übergeht. Nach (2) geht ferner die Summe einer beliebigen Zahl von Charakteristiken (x) in die Summe der transformirten Charakteristiken (ξ) über; ist die Summe einer Zahl von Charakteristiken (x) Null, so ist auch die Summe der entsprechenden Charakteristiken (ξ) Null. Bei der folgenden Untersuchung der Periodencharakteristiken treten Congruenzen auf, die, wenn nichts anderes bemerkt ist, stets mod 2 zu nehmen sind. Wir denken uns daher auch die Periodencharakteristiken mod 2 reducirt, so dass ihre Elemente nur aus den Zahlen 0 und 1 bestehen. Wir nennen ferner (wie bei den Thetacharakteristiken (III) § 26) eine Periodencharakteristik (x) gerade oder ungrade, je nachdem

$$\sum_i x_i x_i' \equiv 0 \quad \text{oder} \quad \equiv 1 \pmod 2.$$

Nach (VI) § 26 ist die Zahl c_p der sämmtlichen, (mod 2) reducirten Periodencharakteristiken, sowie die Zahl g_p der geraden und die Zahl u_p der ungraden unter ihnen gegeben durch

$$c_p = 2^{2p}, \quad g_p = 2^{p-1}(2^p + 1), \quad u_p = 2^{p-1}(2^p - 1). \tag{4}$$

Wir bezeichnen endlich mehrere Charakteristiken als unabhängig, wenn nicht die Summe irgend einer Anzahl derselben congruent 0 ist, und setzen ($i = 1, .., p$):

$$|x| \equiv \sum_i x_i x_i', \quad |x, y| \equiv \sum_i (x_i y_i' \pm y_i x_i'), \tag{5}$$

so dass

$$|x, x| \equiv 0, \quad |x, 0| \equiv 0, \quad |x, \xi| \equiv |\xi, x|; \tag{5a}$$

$$|xyz\cdot\cdot| \equiv |x| + |y| + |z| + \cdot\cdot + |x, y| + |x, z| + |y, z| + \cdot\cdot; \tag{6}$$

$$|xyz\cdot\cdot, \xi\eta\zeta\cdot\cdot| \equiv |x, \xi| + |x, \eta| + \cdot\cdot + |y, \xi| + |y, \eta| + \cdots \tag{7}$$

Aus den Gleichungen (2) und (3) erhält man zunächst eine Beziehung zwischen zwei Periodencharakteristiken, die von den Coefficienten ($\alpha, \beta, \gamma, \delta$) der kanonischen Transformation ganz unabhängig ist und zu einer invarianten Form führt. Es besteht nämlich die Gleichung:

$$\sum_i (\xi_i \eta_i' \pm \eta_i \xi_i') \equiv \sum_i (x_i y_i' \pm y_i x_i') \quad \text{oder} \quad |\xi, \eta| \equiv |x, y|, \tag{8}$$

wie sich leicht ergibt, wenn man die Werthe (2) und (3) in die linke Seite von (8) einträgt und die Gleichungen (10) § 38 benutzt. Daher der Satz[1]):

(I) Sind (x) und (y) zwei beliebige Periodencharakteristiken, so ist der Ausdruck

$$|x, y| \equiv \sum_i (x_i y_i' \pm y_i x_i') \tag{9}$$

invariant gegenüber einer jeden Verlegung des kanonischen Querschnittsystems oder einer jeden kanonischen Transformation der Perioden.

Dieser Satz gibt Anlass zur Untersuchung eines Systems von Periodencharakteristiken von der Beschaffenheit, dass für je zwei derselben der invariante Ausdruck (9) entweder den Werth 0 oder den Werth 1 (mod. 2) hat; wir betrachten nur Systeme der letzteren Art[2]). Sind $B_1, B_2, .., B_\mu$ μ Charakteristiken, die den Bedingungen genügen:

$$|B_i, B_k| \equiv 1 \quad (i \gtrless k), \tag{10}$$

so gelten folgende Sätze:

1) Kronecker, Journ. für Math. Bd. 68. S. 274 (1866).
2) H. Stahl, Journ. für Math. Bd. 88. S. 273ff. (1879).

1) Die μ Charakteristiken $B_1, .., B_\mu$ sind alle verschieden (mod 2).

Denn wären zwei von ihnen gleich, so wäre für sie die Gleichung (10) nicht erfüllt.

2) Ist $\mu = 2\lambda$ ($\leqq 2p$), so sind die Charakteristiken $B_1, .., B_\mu$ unabhängig und es besteht zwischen ihrer Summe und jeder von ihnen wieder die Beziehung (10).

Denn es ist, wenn $\varrho \leqq \lambda$,

$$|B_1 .. B_{2\varrho-1}, B_{2\varrho}| = |B_1, B_{2\varrho}| + \cdots + |B_{2\varrho-1}, B_{2\varrho}| \equiv 1$$

und

$$|B_1 .. B_{2\varrho}, B_{2\varrho}| = |B_1, B_{2\varrho}| + \cdots + |B_{2\varrho}, B_{2\varrho}| \equiv 1,$$

d. h. es ist weder $B_1 .. B_{2\varrho-1}$ noch $B_1 .. B_{2\varrho}$ gleich 0 für ein beliebiges ϱ; ferner ist, wenn $(i = 1, .., 2\lambda)$:

$$|B_1 \cdots B_{2\lambda}, B_i| = |B_1, B_i| + \cdots + |B_i, B_i| + \cdots + |B_{2\lambda}, B_i| \equiv 1,$$

d. h. die Summe der Charakteristiken steht mit jeder einzelnen in der Beziehung (10).

3) Ist $\mu = 2\lambda + 1$ ($\leqq 2p + 1$), so sind die Charakteristiken $B_1, .., B_\mu$ entweder unabhängig oder ihre Summe ist 0, während je $\mu - 1$ unabhängig sind.

Denn es ist, wenn $\varrho \leqq \lambda$,

$$|B_1 .. B_{2\varrho-1}, B_{2\varrho}| \equiv 1, \ |B_1 .. B_{2\varrho}, B_{2\varrho}| \equiv 1, \ |B_1 .. B_{2\lambda+1}, B_i| \equiv 0,$$

d. h. die Charakteristiken $B_1 .. B_{2\varrho-1}$ und $B_1 .. B_{2\varrho}$ sind von 0 verschieden, während $B_1 .. B_{2\lambda+1}$ gleich 0 sein kann.

Nach diesen Vorbereitungen betrachten wir $2p$ Charakteristiken $B_1, .., B_{2p}$ von der Art, dass zwischen je zweien derselben die Gleichung (10) besteht, und bezeichnen ihre Summe (mod 2) mit B_{2p+1}, so dass

$$B_1 .. B_{2p+1} \equiv 0. \tag{11}$$

Dass es solche Systeme gibt, zeigt sich weiter unten. Die Charakteristiken $B_1, .., B_{2p}$ sind von einander unabhängig und ihre Summe B_{2p+1} steht mit jeder von ihnen in der Beziehung (10) (Nr. 2). Daher kann man die Charakteristiken $B_1, .., B_{2p+1}$ beliebig unter einander vertauschen. Hieran schliesst sich die Erklärung:

(II) Ein System von $2p + 1$ Charakteristiken $B_1, .., B_{2p+1}$ von der Beschaffenheit, dass zwischen je zweien derselben die Beziehung (10) besteht, soll im Verein mit der Charakteristik 0 ein specielles Fundamentalsystem von Charakteristiken heissen[1]).

1) Für $p=1$ bilden die vier Charakteristiken 00, 01, 10, 11 ein solches Fundamentalsystem.

Die Fundamentalsysteme sind von Wichtigkeit, weil sich aus den Charakteristiken eines solchen Systems sämmtliche 2^{2p} Charakteristiken zusammensetzen lassen in einer Weise, dass sich der gerade oder ungrade Charakter einer jeden Charakteristik sofort erkennen lässt. Solche Darstellungen heissen kanonische. Zu ihnen führt folgende Betrachtung. Eine Charakteristik C, die aus μ ungraden und ν geraden unter den $2p+1$ Charakteristiken $B_1, .., B_{2p+1}$ gebildet und durch $C = \sum^{\mu} u + \sum^{\nu} g$ bezeichnet sei, ist nach (6) gerade oder ungrade, je nachdem

$$\mu + \frac{(\mu+\nu)(\mu+\nu-1)}{2} \quad \text{oder auch} \quad \frac{(\mu-\nu)(\mu-\nu+1)}{2}$$

eine gerade oder ungrade Zahl ist. Der gerade oder ungrade Charakter von C ist also nur von der Differenz $\mu - \nu$ abhängig und es ist C (wenn σ eine ganze Zahl)

$$\left.\begin{array}{l} \text{gerade, wenn } \mu - \nu = 4\sigma \text{ oder } = 4\sigma + 3, \\ \text{ungrade, wenn } \mu - \nu = 4\sigma + 1 \text{ oder } = 4\sigma + 2. \end{array}\right\} \quad (12)$$

Sind t von den $2p+1$ Charakteristiken B_i ungrade und bezeichnet man die Summe derselben oder, was nach (11) das nämliche, die Summe der $2p+1-t$ geraden Charakteristiken mit $\mathfrak{L}$, so dass

$$\mathfrak{L} = \sum^{t} u = \sum^{2p+1-t} g \quad (13)$$

und bildet man aus $\mathfrak{L}$ und den Charakteristiken $B_1, .., B_{2p+1}$ folgende Reihe von Charakteristiken

$$\mathfrak{L} + \sum^{1} B, \quad \mathfrak{L} + \sum^{2} B, \; .., \quad \mathfrak{L} + \sum^{p-1} B, \quad \mathfrak{L} + \sum^{p} B, \quad (14)$$

wo $\sum^{i} B$ die Summe von i beliebigen unter den Charakteristiken $B_1, .., B_{2p+1}$ bedeutet, so ist der Charakter dieser Formen leicht zu bestimmen. Das allgemeine Glied $\mathfrak{L} + \sum^{i} B$ der Reihe (14) hat verschiedene Form, je nachdem $\sum^{i} B$ Charakteristiken enthält, die bereits in $\mathfrak{L}$ vorkommen und sich aufheben oder solche, die in $\mathfrak{L}$ nicht vorkommen, sondern hinzutreten. Alle diese Formen aber besitzen denselben Charakter. Denn sie sind, wenn man $\sum^{t} u$ für $\mathfrak{L}$ schreibt, sämmtlich enthalten in der Form $\sum^{t-k} u + \sum^{i-k} g$ $(k = 0, 1, 2, ..)$,

sie sind also von gleichem Charakter, da hier die Differenz $\mu - \nu = t - i$, d. h. unabhängig von k ist. Ferner sind die Formen $\mathfrak{L} + \sum^{i} B$ und $\mathfrak{L} + \sum^{i-2} B$ von entgegengesetztem Charakter nach (12), da für die ersteren $\mu - \nu = t - i$, für die letzteren $\mu - \nu = t - i + 2$ ist. Die Formen $\mathfrak{L} + \sum^{i} B$ und $\mathfrak{L} + \sum^{i-4} B$ sind wieder von gleichem Charakter. Berücksichtigt man noch, dass $\mathfrak{L} + \sum^{p} B$ und $\mathfrak{L} + \sum^{p+1} B$ nach (11) von gleichem Charakter sind, so zieht man den Schluss: Die Formen (14) zerfallen in zwei Gruppen von entgegengesetztem Charakter, nämlich wenn $\varrho = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ ist:

$$\mathfrak{L} + \sum^{p+4\varrho} B, \quad \mathfrak{L} + \sum^{p+4\varrho+1} B, \tag{15}$$

$$\mathfrak{L} + \sum^{p+4\varrho+2} B, \quad \mathfrak{L} + \sum^{p+4\varrho+3} B. \tag{16}$$

Es bleibt also nur noch der Charakter einer dieser Formen zu bestimmen. Nun findet man für die Anzahlen der in den Formen (14), (15), (16) enthaltenen, verschiedenen Charakteristiken, da die Zahl der in $\mathfrak{L} + \sum^{i} B$ enthaltenen Charakteristiken der Binomialcoefficient $(2p+1)_i$ ist, bez. die Werthe 2^{2p}, $2^{p-1}(2^p+1)$, $2^{p-1}(2^p-1)$. Die Vergleichung mit (4) lehrt, dass die Formen (15) sämmtlich gerade, die Formen (16) sämmtlich ungrade Charakteristiken darstellen. Aus (12) und (15) folgt weiter, dass $t - p = 4\sigma$ oder $= 4\sigma + 3$ und $t - p - 1 = 4\sigma$ oder $4\sigma + 3$ ist. Daher muss

$$t \equiv p \pmod 4 \tag{17}$$

sein. Dies gibt den Satz[1]):

(III) Bilden $2p + 1$ Charakteristiken $B_1, \ldots, B_{2p+1}$ in Verbindung mit der Charakteristik 0 ein specielles Funda-

---

1) Das erste Beispiel einer kanonischen Darstellung aller Charakteristiken durch $2p + 1$ derselben hat Riemann gegeben (vgl. (25)). Herr Prym hat gezeigt, dass sich diese Darstellungen aus der Theorie der hyperelliptischen Integrale und der zugehörigen Thetafunctionen ableiten lassen (Prym, Zur Theorie der Functionen in einer zweiblättrigen Fläche. Zürich 1866. S. 5 ff. und Prym, Unters. üb. d. Riemann'sche Thetaformel. Leipzig 1882. S. VII). Der Satz III oder die rein combinatorische Herleitung der kanonischen Darstellungen aus den Bedingungen (10) wurde gegeben von H. Stahl l. c.).

mentalsystem, d. h. ein System von der Beschaffenheit, dass $|B_i, B_k| \equiv 1 \pmod 2$ $(i \gtrless k)$, so besteht zwischen den Charakteristiken B die einzige Gleichung $B_1 \, . \, . \, B_{2p+1} \equiv 0$. Ferner stellen sich die sämmtlichen 2^{2p} Charakteristiken in kanonischer Form dar, nämlich die geraden durch die Formen (15), die ungraden durch die Formen (16). Dabei ist $\mathfrak{L}$ die Summe der unter den B enthaltenen ungraden Charakteristiken und $t \equiv p \pmod 4$ die Anzahl dieser Charakteristiken.

Man kann dies auch so aussprechen. Eine beliebige Charakteristik ε stellt sich dar in der Form

$$\varepsilon = \mathfrak{L} + \alpha_1 B_1 + \cdot \cdot + \alpha_{2p+1} B_{2p+1}, \tag{18}$$

wobei unter α_i die Zahl 0 oder 1 verstanden ist, je nachdem in der Darstellung $\varepsilon = \mathfrak{L} + \sum^r B$ unter dem Summenzeichen die Charakteristik B_i auftritt oder nicht und eine solche Charakteristik ist

$$\left.\begin{array}{l} \text{gerade, wenn } p + 4\varrho \quad \text{oder} \quad p + 4\varrho + 1, \\ \text{ungrade, wenn } p + 4\varrho + 2 \quad \text{oder,} \ p + 4\varrho + 3 \end{array}\right\} \tag{19}$$

der $2p + 1$ Grössen α_i den Werth 1, die übrigen den Werth 0 haben.

Die Darstellung einer beliebigen Charakteristik ε in der Form $\mathfrak{L} + \sum^r B$ oder der Form (18) ist auf zwei Arten möglich, von denen sich die eine aus der anderen ergibt durch Addition von (11). Eine dritte solche Darstellung kann nicht bestehen, da sich sonst durch ihre Verbindung mit einer der beiden ersten ausser (11) noch eine lineare Relation zwischen den Charakteristiken B ergeben würde, was nach (III) unmöglich.

Wir stellen jetzt die Frage[1]): wie lässt sich ein specielles Fundamentalsystem $0, B_1, . ., B_{2p+1}$ ermitteln? Zur Lösung dient folgender Hilfssatz:

(a) Sind $a_{\alpha i}$ ganze $\pm$ Zahlen und $x_1, . ., x_\varrho$ ϱ Variabeln, sind ferner

$$u_\alpha = a_{\alpha 1} x_1 + \cdot \cdot + a_{\alpha \varrho} x_\varrho \quad (\alpha = 1, 2, . ., \sigma) \tag{20}$$

σ lineare Formen, die (mod 2) unabhängig sind, so haben die σ Congruenzen $u_\alpha \equiv c_\alpha \pmod 2$, wo $c_1, . ., c_\sigma$ beliebige

1) Frobenius, Journ. für Math. Bd. 89. S. 190 u. S. 208 ff. (1880).

ganze Zahlen sind, $2^{\varrho-\sigma}$ verschiedene, (mod 2) ganzzahlige Lösungen.

Beweis. Bezeichnet man die Zahl der Lösungen mit φ, so kann man setzen

$$2^\sigma \varphi = \sum (1 + (-1)^{u_1+c_1}) \ldots (1 + (-1)^{u_\sigma + c_\sigma}), \qquad (21)$$

falls man jedem der Summationsbuchstaben $x_1, .., x_\varrho$ in den u die Werthe 0 und 1 beilegt. Denn, genügt ein Werthsystem der x nicht den sämmtlichen Congruenzen $u_\alpha \equiv c_\alpha$, so ist das entsprechende Glied der Summe $= 0$, genügt es ihnen aber, $= 2^\sigma$. Führt man nun auf der rechten Seite die Multiplication aus, so ist das erste Glied $\sum 1 = 2^\varrho$; irgend ein anderes aber

$$\sum (-1)^{u_1+c_1+\cdots u_\lambda + c_\lambda} = (-1)^{c_1+\cdots+c_\lambda} \sum (-1)^{a_1 x_1} \cdots \sum (-1)^{a_\varrho x_\varrho},$$

wenn man $u_1 + \cdots + u_\lambda = a_1 x_1 + \cdots + a_\varrho x_\varrho$ setzt. Da $u_1, .., u_\sigma$ (mod 2) unabhängig sind, so können die $a_1, .., a_\varrho$ nicht sämmtlich gerade sein. Ist aber a_1 ungrade, so ist $\sum (-1)^{a_1 x_1} = 0$, weil der eine Summand $+1$, der andere -1 ist. Die rechte Seite der letzten Gleichung ist also 0 und folglich die rechte Seite in (21) $= 2^\varrho$. (q. e. d.)

Die Ermittelung eines speciellen Fundamentalsystems 0, $B_1, .., B_{2p+1}$ kann nun schrittweise geschehen, indem man mit der ersten Charakteristik beginnt.

B_1 ist verschieden von 0, sonst beliebig, also auf $2^{2p} - 1$ Arten wählbar.

B_2 ist dann irgend eine Lösung der Congruenz $|B_1, X| \equiv 1$. Solcher Lösungen gibt es nach dem Hilfssatze (a) 2^{2p-1}.

B_3 ist Lösung der beiden Congruenzen $|B_i, X| \equiv 1$ $(i = 1, 2)$. Solcher Lösungen gibt es $2^{2p-2} - 1$ (wenn $p > 1$), da nach (III) zwischen B_1 und B_2 keine Relation besteht, also die zwei Congruenzen unabhängig sind und da ausserdem die Summe $B_1 B_2$ als Lösung auszuschliessen ist.

B_4 ist Lösung der drei Congruenzen $|B_i, X| \equiv 1$ $(i = 1, 2, 3)$. Solcher Lösungen gibt es nach (a) 2^{2p-3}.

B_5 ist Lösung der vier Congruenzen $|B_i, X| \equiv 1$ $(i = 1, .., 4)$. Solcher Lösungen gibt es $2^{2p-4} - 1$ (wenn $p > 2$), da die Summe $B_1 B_2 B_3 B_4$ als Lösung auszuschliessen ist, u. s. f.

Auf diesem Wege erhält man sämmtliche, specielle Fundamentalsysteme. Zugleich ergibt sich, da das angegebene Verfahren auch alle Permutationen der Charakteristiken eines jeden Fundamentalsystems liefert,

also durch die Zahl der Permutationen von $2p+1$ Elementen, d. h. durch $(2p+1)!$ zu dividiren ist, als Zahl der speciellen Fundamentalsysteme:

$$\frac{(2^{2p}-1)\,2^{2p-1}(2^{2p-2}-1)..2^3(2^2-1)\,2}{1\,.\,2\,..\,2p+1}=\frac{(2^{2p}-1)(2^{2p-2}-1)..(2^2-1)}{1\,.\,2\,..\,2p+1}2^{pp}. \quad (22)$$

Aus der Bildung des Systemes folgt zugleich: Wenn μ Charakteristiken die Eigenschaft haben, dass zwischen je zweien die Relation (10) besteht und dass ihre Summe, falls μ ungrade ist, nicht verschwindet, so können sie zu einem speciellen Fundamentalsystem ergänzt werden. So kann man $2p+1-\lambda$ durch die Relationen (10) verbundene Charakteristiken B_i, deren Summe, wenn λ gerade ist, nicht verschwindet, zu einem speciellen Fundamentalsystem ergänzen auf

$$P_\lambda=\frac{1\,.\,2\,(2^2-1)\,2^3\,(2^4-1)\,..\,(2^{\lambda-1}-\delta)}{1\,.\,2\,..\,\lambda} \quad (23)$$

verschiedene Arten, wo $\delta=0$ oder $=1$, je nachdem λ gerade oder ungrade ist.

Ein specielles Fundamentalsystem ist hiernach vollständig bestimmt durch $2p-2$ seiner Charakteristiken ($\lambda=3$, $\delta=1$, $P_\lambda=1$); es kann auf 2 Arten vervollständigt werden, wenn $2p-3$ Charakteristiken ($\lambda=4$, $\delta=0$, $P_\lambda=2$), auf 6 Arten, wenn $2p-4$ Charakteristiken gegeben sind u. s. f.

Man kann auch auf einfache Weise aus einem Fundamentalsystem alle übrigen ableiten. Zunächst ist klar:

> Sind B_1, B_2, B_3, B_4 vier Charakteristiken eines speciellen Fundamentalsystems und S ihre Summe und ersetzt man diese vier Charakteristiken durch SB_1, SB_2, SB_3, SB_4 oder durch $B_2B_3B_4$, $B_1B_3B_4$, $B_1B_2B_4$, $B_1B_2B_3$, während man die übrigen ungeändert lässt, so hat man wieder ein specielles Fundamentalsystem.

Es ist aber auch leicht zu sehen, dass man durch wiederholte Anwendung dieser Operation aus einem Fundamentalsystem alle anderen ableiten kann. Denn ist $B_1, .., B_{2p+1}$ ein specielles Fundamentalsystem, so kann mit Hilfe von $\sum^{2p+1} B=0$ (11) jede Charakteristik auf zwei Arten in die Form $\sum^{\mu} B$ gebracht werden, wo $\mu=0, 1, .., 2p+1$ ist. In der einen Darstellung kommt B_1 vor, in der anderen nicht. Mithin kann jede Lösung der Congruenzen

(24) $\quad |B_1, X| \equiv 1, \quad |B_2, X| \equiv 1, \ldots, |B_\lambda, X| \equiv 1$

in der Form $X = \sum^{\mu} B = B_\alpha B_\beta \ldots$ angenommen werden, wo keiner der Indices α, β, .. gleich 1 ist.

Da unter dieser Voraussetzung

$$|B_1, B_\alpha B_\beta \ldots| \equiv |B_1, B_\alpha| + |B_1, B_\beta| + \cdots \equiv \mu$$

ist, so muss μ ungrade sein. Da ferner

$$|B_2, B_\alpha B_\beta \ldots| \equiv |B_2, B_\alpha| + |B_2, B_\beta| + \cdots \equiv \mu - 1 \quad \text{oder} \quad \equiv \mu$$

ist, je nachdem einer der Indices α, β, .. gleich 2 ist oder nicht, so folgt, dass keiner der Indices α, β, .. gleich 2, 3, .., λ sein darf. Mithin sind die sämmtlichen Lösungen der Congruenzen (24) dargestellt durch alle Summen je einer ungraden Anzahl der Charakteristiken $B_{\lambda+1}$, .., B_{2p+1}. Für $B_{\lambda+1}$ kann man also jede Summe einer ungraden Zahl dieser letzteren Charakteristiken wählen, ähnlich für $B_{\lambda+2}$ u. s. f., woraus die obige Behauptung folgt.

Will man auf diesem Wege ein gegebenes Fundamentalsystem in ein bestimmtes anderes verwandeln, so geht man schrittweise vor; dabei braucht man nur mit den Charakteristiken zu operiren, die nicht beiden Systemen gemein sind.

Wir untersuchen schliesslich das Verhalten eines speciellen Fundamentalsystems von $2p + 2$ Charakteristiken 0, B_1, .., B_{2p+1} gegenüber einer beliebigen Verlegung des kanonischen Querschnittsystems der Fläche T. Aus Satz I und II folgt unmittelbar:

(IV) Jedem Uebergang von einem kanonischen Querschnittsystem in ein anderes entspricht der Uebergang von einem speciellen Fundamentalsystem in ein anderes solches System.

Umgekehrt gilt der Satz:

(V) Jedem Uebergang von einem speciellen Fundamentalsystem in ein anderes entspricht der Uebergang von einem kanonischen Querschnittsystem in ein anderes solches System[1]).

Der Beweis hat nur zu zeigen, dass man jedes Fundamentalsystem 0, B_1, .., B_{2p+1} durch wiederholte Anwendung der in § 38 aufgestellten, elementaren Transformationen in ein bestimmtes Fun-

---

1) Diesen Satz hat Herr Frobenius (l. c. S. 187) für allgemeine Fundamentalsysteme (s. § 41) ohne Beweis angegeben.

damentalsystem $0, X, X_1, .., X_p, Y_1, .., Y_p$ verwandeln kann, etwa in folgendes System, das aus p ungraden und $p+2$ geraden Charakteristiken besteht:

$$\left.\begin{array}{ll}
(X_1)=(1000..00;\ 0000..00), & (Y_1)=(0000..00;\ 1000..00),\\
(X_2)=(1100..00;\ 1000..00), & (Y_2)=(1000..00;\ 1100..00),\\
(X_3)=(1110..00;\ 1100..00), & (Y_3)=(1100..00;\ 1110..00),\\
\cdots\cdots & \cdots\cdots\\
(X_p)=(1111..11;\ 1111..10), & (Y_p)=(1111..10;\ 1111..11),\\
(X)\ =(1111..11;\ 1111..11), & (0)\ \ =(0000..00;\ 0000..00).
\end{array}\right\} \quad (25)$$

Wendet man die Transformationen T_1, T_2, T_3 des § 38 auf die Formeln (2) an, so erhält man

$$\left.\begin{array}{l}
T_1\colon\ \xi_\mu=x_\mu;\ \xi'_\mu=x'_\mu\ (\mu=1,..,p)\ \text{ausser}\ \xi'_m=x'_m\pm x_m;\\
T_2\colon\ \xi_\mu=x_\mu;\ \xi'_\mu=x'_\mu\ (\mu=1,..,p)\ \text{ausser}\ \xi_m=x_m\pm x'_m;\\
T_3\colon\ \xi_\mu=x_\mu;\ \xi'_\mu=x'_\mu\ (\mu=1,..,p)\ \text{ausser}\ \xi_n=x_n\pm x_m;\ \xi'_m=x'_m\mp x'_n.
\end{array}\right\} (26)$$

Ist nun $(x)=(x_1\ ..\ x_p;\ x_1'..\ x_p')$ eine beliebige, erste, von (0) verschiedene Charakteristik des gegebenen Fundamentalsystems B, so lässt sich dieselbe durch wiederholte Anwendung der Operationen (26) der Reihe nach auf die folgenden Formen bringen

$$\begin{array}{l}
(100\ ..\ 0;\ x_1'x_2'..\ x_p'),\\
(100\ ..\ 0;\ 1\ \ x_2'..\ x_p'),\\
(100\ ..\ 0;\ 1\ \ 0\ ..\ 0),\\
(100\ ..\ 0;\ 0\ \ 0\ ..\ 0).
\end{array}$$

Die letzte Form ist die Charakteristik (X_1) in (25). Ist ferner (y) eine beliebige, zweite, von 0 verschiedene Charakteristik des Fundamentalsystemes B, so muss dieselbe wegen (10) von der Form sein $(y_1y_2\ ..\ y_p;\ 1y_2'..\ y_p')$. Sie lässt sich, ohne dass die erste Charakteristik (X_1) sich ändert, durch die Operationen (26) der Reihe nach verwandeln in

$$\begin{array}{l}
(y_1y_2\ ..\ y_p;\ 1\ 0\ ..\ 0)\\
(0\ 0\ ..\ 0;\ \ 1\ 0\ ..\ 0).
\end{array}$$

Die letzte Form ist die Charakteristik (Y_1) in (25). Nach (10) ist nun für zwei weitere, beliebige, von 0 verschiedene Charakteristiken (z) und (t) des Systems B $z_1=z_1'=t_1=t_1'=1$ und folglich

$$\sum_{i=1}^{p}(z_it_i'+t_iz_i')\equiv\sum_{i=2}^{p}(z_it_i'+t_iz_i'),$$

d. h. für sie reducirt sich die p-gliedrige Bedingung (10) auf eine eben solche, $p-1$-gliedrige Bedingung. Man kann daher in den noch übrigen Charakteristiken B das erste und $p+1^{\text{te}}$ Element weglassen und mit den $2p-2$ bleibenden Elementen ebenso verfahren, wir bei den zwei ersten Charakteristiken mit den $2p$ Elementen. Man erhält so der Reihe nach statt des Systems $0, B_1 \ldots B_{2p+1}$ die Charakteristiken $0, X_1, Y_1, X_2, Y_2, \ldots, X_p, Y_p$ und als letzte die Charakteristik $X = (11 \ldots 1;\ 11 \ldots 1)$. (q. e. d.)

§ 40. Die lineare Transformation der Thetafunction[1]).

Wir kommen zur Untersuchung der Transformation, welche die Thetafunction und ihre Elemente, nämlich ihre Argumente, ihre Moduln und ihre Charakteristik, bei einer Verlegung des kanonischen Querschnittsystems der Fläche T erfahren. Diese Untersuchung stützt sich auf die Ergebnisse der beiden letzten §§. Wir geben den Gleichungen des § 38 eine andere Form, indem wir an Stelle der p linear unabhängigen Integrale $w_1, \ldots, w_p$, die den beiden Lagen der Querschnittsysteme a, b und a', b' entsprechenden zwei Systeme von p Normalintegralen, nämlich $u_1, \ldots, u_p$ mit den Perioden a_{ik} und $v_1, \ldots, v_p$ mit den Perioden b_{ik} einführen und die Beziehungen zwischen den Integralen u und v und zwischen den Moduln a_{ik} und b_{ik} aufsuchen, unter der Voraussetzung, dass die Coefficienten der kanonischen Transformation $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$, den Bedingungen (6) oder (10) § 38 gemäss, irgendwie gegeben sind. Für die Grössen a_{ik} und b_{ik} gelten die früher bewiesenen Sätze (XIII und XV § 15), nämlich dass, wenn $(i, k = 1, \ldots, p)$ ist: $a_{ik} = a_{ki}$; $b_{ik} = b_{ki}$ und dass $\sum_{ik} \bar{a}_{ik} x_i x_k$ und $\sum_{ik} \bar{b}_{ik} y_i y_k$ für reelle Werthe der x und y negativ sind. Dabei bedeuten $\bar{a}_{ik}$ und $\bar{b}_{ik}$ die reellen Theile von a_{ik} und b_{ik}.

Die den Perioden der Integrale w entsprechenden Perioden der Integrale u an den Querschnitten a, b und Perioden der Integrale v an den Querschnitten a', b' sind nach (11) § 15 gegeben durch das Schema

(1)

	w_k	$u_1 \ldots u_\nu \ldots u_p$		w_k	$v_1 \ldots v_\nu \ldots v_p$
a_ν	$A_{\nu k}$	$0 \ldots \pi i \ldots 0$	a'_ν	$A'_{\nu k}$	$0 \ldots \pi i \ldots 0$
b_ν	$B_{\nu k}$	$a_{\nu 1} \ldots a_{\nu\nu} \ldots a_{\nu p}$	b'_ν	$B'_{\nu k}$	$b_{\nu 1} \ldots b_{\nu\nu} \ldots b_{\nu p}$.

1) Thomae, Diss. Göttingen 1864 und Journ. für Matth. Bd. 75. S. 232 ff. (1872). Clebsch-Gordan, Ab. F. S. 311 ff. (1866) in anderer Herleitung. Weber, Annali di matem. Ser. II. T. IX. S. 126 ff. (1878).

Daher hat man die Gleichungen (vgl. (13) und (15) § 15), wenn $(k, l, \mu = 1, .., p)$:

$$\pi i w_k = \sum_l A_{lk} u_l = \sum_l A'_{lk} v_l, \tag{2}$$

$$\pi i B_{\mu k} = \sum_l A_{lk} a_{\mu l}, \quad \pi i B'_{\mu k} = \sum_l A'_{lk} b_{\mu l}. \tag{3}$$

Man kann in diesen Gleichungen entweder die Grössen v_i und b_{ik} oder die Grössen u_i und a_{ik} als die gegebenen, die anderen jedesmal als die gesuchten ansehen; man erhält so zwei Systeme von Gleichungen, die neben einander betrachtet werden sollen. Man löse zuerst die Gleichungen (2) nach den u auf; es sei $(\mu, \nu = 1, .., p)$:

$$u_\mu = \sum_\nu M_{\nu\mu} v_\nu. \tag{4}$$

Setzt man in (2) $v_1, .., v_\nu, .., v_p = 0, .., \pi i, .., 0$, so erhält man als entsprechenden Werth von w_k nach dem Schema (1) und nach (2) § 38:

$$A'_{\nu k} = \sum_\mu (\alpha_{\nu\mu} A_{\mu k} + \beta_{\nu\mu} B_{\mu k}). \tag{5}$$

Der entsprechende Werth von u_μ ist

$$\pi i M_{\nu\mu} = \alpha_{\nu\mu} \pi i + \sum_i \beta_{\nu i} a_{\mu i}. \tag{6}$$

Denn der Werth der linken Seite dieser Gleichung folgt unmittelbar aus (4); der Werth der rechten Seite wird leicht verificirt; setzt man nämlich den Werth (5) von w_k und den Werth der rechten Seite von (6) für u_μ in (2) ein, so stimmen beide Seiten von (2) wegen der ersten Gleichung (3) überein.

Setzt man dagegen in (2) $v_1, .., v_p = b_{\nu 1}, .., b_{\nu p}$, so geht nach dem Schema (1) und nach (2) § 38 w_k über in

$$B'_{\nu k} = \sum_\mu (\gamma_{\nu\mu} A_{\mu k} + \delta_{\nu\mu} B_{\mu k}) \tag{7}$$

und folglich u_μ über in

$$\sum_i M_{i\mu} b_{i\nu} = \gamma_{\nu\mu} \pi i + \sum_i \delta_{\nu i} a_{\mu i} = P_{\nu\mu}. \tag{8}$$

Der Werth der linken Seite ergibt sich wieder unmittelbar aus (4); der der rechten Seite, indem man den Werth (7) von w_k und den Werth der rechten Seite von (8) für u_μ in (2) einträgt und die erste Gleichung (3) berücksichtigt.

Die Gleichungen (4, 6, 8) lösen die Aufgabe, die Grössen u_i und a_{ik} zu bestimmen, wenn die Grössen v_i und b_{ik} gegeben sind. Denn aus (6) und (8) erhält man, wenn $\nu = 1, .., p$ gesetzt wird, die Werthe von $a_{\mu 1}, .., a_{\mu p}$ und die Werthe der $M_{\nu\mu}$; alsdann aus (4) die der u_μ. Die Determinante der Grössen $M_{\nu\mu}$ kann nach den Sätzen des § 15 nicht verschwinden.

Man erhält ein zweites, ganz analoges System von Gleichungen, indem man die Gleichungen (2) nach den v auflöst; es sei

$$v_\mu = \sum_\nu N_{\mu\nu} u_\nu. \tag{9}$$

Setzt man $u_1, .., u_\nu, .., u_p = 0, .., \pi i, .., 0$, so geht nach dem Schema (1) und nach (8) § 38 w_k über in

$$A_{\nu k} = \sum_\mu (\delta_{\mu\nu} A'_{\mu k} - \beta_{\mu\nu} B'_{\mu k})$$

und folglich v_μ über in

$$\pi i N_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}\pi i - \sum_i \beta_{i\nu} b_{\mu i}. \tag{10}$$

Setzt man dagegen $u_1, .., u_p = a_{\nu 1}, .., a_{\nu p}$, so geht w_k über in

$$B_{\nu k} = \sum_\mu (-\gamma_{\mu\nu} A'_{\mu k} + \alpha_{\mu\nu} B'_{\mu k})$$

und folglich v_μ über in

$$\sum_i N_{\mu i} a_{\nu i} = -\gamma_{\mu\nu}\pi i + \sum_i \alpha_{i\nu} b_{i\mu} = Q_{\mu\nu}. \tag{11}$$

Die Vergleichung der beiden Formelsysteme (4, 6, 8) und (9, 10, 11) zeigt, dass man in den Entwicklungen durchgehends die Grössen

$$u_i,\ a_{ik},\ \alpha_{i\mu},\ \beta_{i\mu},\ \gamma_{i\mu},\ \delta_{i\mu},\ M_{\nu\mu},\ P_{\nu\mu} \tag{12a}$$

vertauschen kann bez. mit den Grössen

$$v_i,\ b_{ik},\ \delta_{\mu i},\ -\beta_{\mu i},\ -\gamma_{\mu i},\ \alpha_{\mu i},\ N_{\mu\nu},\ Q_{\mu\nu}. \tag{12b}$$

Trägt man die Werthe der v aus (9) in (4) und umgekehrt die der u aus (4) in (9) ein, so erhält man zwischen den M und N die Beziehungen

$$\begin{cases} \sum_\nu M_{\nu\mu} N_{\nu\mu} = 1, & \sum_\nu M_{\nu\mu} N_{\nu i} = 0, \\ \sum_\nu M_{\mu\nu} N_{\mu\nu} = 1, & \sum_\nu M_{i\nu} N_{\mu\nu} = 0, \end{cases} \quad (i \gtrless \mu). \tag{13}$$

Setzt man

$$M = \sum \pm M_{11} \ldots M_{pp}, \quad N = \sum \pm N_{11} \ldots N_{pp}, \tag{14}$$

so folgt

$$MN = 1. \tag{15}$$

Diese Entwicklungen sollen nunmehr zur Transformation der Thetafunction verwandt werden. Auf Grund der Gleichungen (4, 6, 8) suchen wir Beziehungen auf zwischen Thetafunctionen mit den Argumenten v_h und Moduln b_{hk} und Thetafunctionen mit den Argumenten u_h und Moduln a_{hk}. Hierzu gehen wir aus von der Thetafunction erster Ordnung mit den Argumenten u_h, den Moduln a_{hk} und der zweitheiligen Charakteristik (x), nämlich (vgl. (37) § 26):

$$\left.\begin{aligned} &\vartheta_x((u;\, a)) = \vartheta_x(u_1, \ldots, u_p;\, a) \\ &= (-1)^{\sum x x'} \sum_{n_1 \cdots n_p} e^{\sum\limits_{i,k} a_{ik}\left(n_i + \frac{x_i}{2}\right)\left(n_k + \frac{x_k}{2}\right) + 2\sum\limits_i \left(n_i + \frac{x_i}{2}\right)\left(u_i + \frac{1}{2} x_i' \pi i\right)}. \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

In diese Function tragen wir die Werthe (4) ein, wodurch sie in eine Function der Argumente v_i übergeht, und untersuchen das Verhalten dieser Function bei Vermehrung der Argumente um die zu den v_i gehörigen Periodensysteme.

Wächst v_ν um πi, also u_μ um den Werth (6), so geht $\vartheta_x((u;\, a))$ nach (12) § 26 über in

$$\vartheta_x((u;\, a)) \cdot (-1)^{\sum\limits_i (\alpha_{\nu i} x_i + \beta_{\nu i} x_i')} e^{-2\sum\limits_i \beta_{\nu i} u_i - \sum\limits_{i,k} a_{ik} \beta_{\nu i} \beta_{\nu k}}. \tag{17}$$

Wächst $v_1, \ldots, v_p$ um $b_{\nu 1}, \ldots, b_{\nu p}$, also u_μ um den Werth (8), so geht $\vartheta_x((u;\, a))$ über in

$$\vartheta_x((u;\, a)) \cdot (-1)^{\sum\limits_i (\gamma_{\nu i} x_i + \delta_{\nu i} x_i')} e^{-2\sum\limits_i \delta_{\nu i} u_i - \sum\limits_{i,k} a_{ik} \delta_{\nu i} \delta_{\nu k}}. \tag{18}$$

Aus (17) schliesst man, dass die Function $\vartheta_x((u;\, a))$ durch Multiplication mit einem Factor, dessen Logarithmus eine homogene Function zweiten Grades in $u_1, \ldots, u_p$ ist, in eine Function verwandelt werden kann, die für jede der Variabeln $v_1, \ldots, v_p$ die Periode πi besitzt. Wir betrachten daher, indem wir

$$f((u)) = f(u_1, \ldots, u_p) = \sum_{i,k} c_{ik} u_i u_k \tag{19}$$

setzen, statt $\vartheta_x((u;\, a))$ die folgende Function:

$$\vartheta_x(u_1, \ldots, u_p;\, a)\, e^{f(u_1, \ldots, u_p)} = F(v_1, \ldots, v_p). \tag{20}$$

Es wird sich zeigen, dass sich die Coefficienten c_{ik} in (19) so bestimmen lassen, dass (20) eine Thetafunction erster Ordnung mit den Argumenten v_i, den Moduln b_{ik} und einer gewissen, zweitheiligen Charakteristik (ξ) ist, dass sie also den beiden Functionalgleichungen genügt. (Vgl. (38) § 26):

$$(21)\quad \begin{cases} F(v_1, .., v_\nu + \pi i, .., v_p) = (-1)^{\xi_\nu}\, F(v_1, .., v_\nu, .., v_p) \\ F(v_1 + b_{\nu 1}, .., v_p + b_{\nu p}) = (-1)^{\xi'_\nu}\, F(v_1, \ldots\ldots, v_p)\, e^{-2v_\nu - b_{\nu\nu}}. \end{cases}$$

Wir suchen zunächst der ersten Gleichung (21) zu genügen; dabei bestimmen sich die Grössen c_{ik} und die Zahlen ξ_ν. Lässt man v_ν um πi wachsen, so wächst u_μ um $\pi i M_{\nu\mu}$ (6) und es geht $f((u))$ über in

$$(22)\quad f(u_1, .., u_p) + 2\pi i \sum_{i,k} c_{ik} u_i M_{\nu k} - \pi^2 \sum_{i,k} c_{ik} M_{\nu i} M_{\nu k}.$$

Soll nun $F(v_1, .., v_p)$ der ersten Gleichung (21) genügen, so hat man, wie die Vergleichung mit (17) ergibt, zu setzen:

$$\sum_i \beta_{\nu i} u_i = \pi i \sum_{i,k} c_{ik} u_i M_{\nu k},$$

oder

$$(23)\quad \beta_{\nu i} = \pi i \sum_k c_{ik} M_{\nu k} \qquad (\nu, i = 1, .., p).$$

Hieraus folgt durch Auflösung nach c_{ik} und wegen (6)

$$(24)\quad c_{ik} = \frac{1}{\pi i} \sum_\nu \beta_{\nu i} \frac{\partial \log M}{\partial M_{\nu k}} = \frac{\partial \log M}{\partial a_{ik}},$$

wo M die Determinante (14) bedeutet. Hiermit sind die Coefficienten c_{ik} in (19) eindeutig bestimmt; für sie gelten die Gleichungen

$$(25)\quad c_{ik} = c_{ki},$$

wie aus (24) unmittelbar folgt.

Man kann nun auch das letzte Glied in (22) bilden. Aus (23) in Verbindung mit (6) folgt:

$$(26)\ -\pi^2 \sum_{i,k} c_{ik} M_{\nu i} M_{\nu k} = \pi i \sum_i M_{\nu i} \beta_{\nu i} = \pi i \sum_i \alpha_{\nu i} \beta_{\nu i} + \sum_{i,k} a_{ik} \beta_{\nu i} \beta_{\nu k}.$$

Aus (17) und (22) ergibt sich nunmehr, dass die Function $F(v_1, .., v_p)$ der ersten Gleichung (21) genügt, wenn man setzt:

$$(27)\quad \xi_\nu \equiv \sum_i (\alpha_{\nu i} x_i + \beta_{\nu i} x_i' + \alpha_{\nu i} \beta_{\nu i}) \pmod 2.$$

Wir suchen ferner die Bedingungen auf, unter denen die Function (20) auch der zweiten Gleichung (21) genügt; dabei ergeben sich

die Zahlen ξ'_ν. Lässt man $v_1, .., v_p$ um $b_{\nu 1}, .., b_{\nu p}$ wachsen, so wächst u_μ um $P_{\nu\mu}$ (8); folglich geht $f((u))$ über in

$$f(u_1, .., u_p) + 2\sum_{i,k} c_{ik} u_i P_{\nu k} + \sum_{i,k} c_{ik} P_{\nu i} P_{\nu k}. \tag{28}$$

Um die beiden letzten Glieder von (28) auszuwerthen, entnehme man den Gleichungen (6) und (8) die Werthe von $\alpha_{\nu\mu}$ und $\gamma_{\nu\mu}$ und trage sie in die Gleichungen (10) § 38 nämlich

$$\sum_i (\alpha_{\nu i}\delta_{\mu i} - \beta_{\nu i}\gamma_{\mu i}) = \begin{matrix} +1, \text{ wenn } \mu = \nu, \\ 0, \text{ wenn } \mu \gtrless \nu \end{matrix}$$

ein; man erhält

$$\sum_i \delta_{\nu i} M_{\mu i} - \frac{1}{\pi i}\sum_i \beta_{\mu i} P_{\nu i} = \begin{matrix} 1, \text{ wenn } \mu = \nu, \\ 0, \text{ wenn } \mu \gtrless \nu. \end{matrix}$$

Ersetzt man hier $\beta_{\mu i}$ durch seinen Werth aus (23), so folgt

$$\sum_i M_{\mu i}(\delta_{\nu i} - \sum_k c_{ik} P_{\nu k}) = \begin{matrix} 1, \text{ wenn } \mu = \nu, \\ 0, \text{ wenn } \mu \gtrless \nu. \end{matrix} \tag{29}$$

Multiplicirt man die linke Seite von (29) mit v_μ und summirt nach μ, so folgt wegen (4)

$$\sum_{i,k} c_{ik} u_i P_{\nu k} = - v_\nu + \sum_i \delta_{\nu i} u_i.$$

Multiplicirt man dagegen die linke Seite von (29) mit $b_{\mu\nu}$ und summirt nach μ, so folgt wegen (8)

$$\sum_{i,k} c_{ik} P_{\nu i} P_{\nu k} = - b_{\nu\nu} + \pi i \sum_i \gamma_{\nu i}\delta_{\nu i} + \sum_{i,k} a_{ik}\delta_{\nu i}\delta_{\nu k}. \tag{30}$$

Wächst also $v_1, .., v_p$ um $b_{\nu 1}, .., b_{\nu p}$, so geht $f((u))$ nach (28, 29, 30) über in

$$f(u_1, .., u_p) - 2v_\nu - b_{\nu\nu} + 2\sum_i \delta_{\nu i} u_i + \pi i \sum_i \gamma_{\nu i}\delta_{\nu i} + \sum_{i,k} a_{ik}\delta_{\nu i}\delta_{\nu k}.$$

Dies in Verbindung mit (18) zeigt, dass die Function $F(v_1, .., v_p)$ (20) auch der zweiten Gleichung (21) genügt, wenn man setzt:

$$\xi'_\nu \equiv \sum_i (\gamma_{\nu i} x_i + \delta_{\nu i} x'_i + \gamma_{\nu i}\delta_{\nu i}) \pmod 2. \tag{31}$$

Man kann also in der That den Bedingungen (21) genügen; die Grössen c_{ik} bestimmen sich aus (24), die Charakteristik (ξ) aus (27) und (31). Die Auflösung der letzten Gleichungen nach x_i und x'_i lautet

(32) $x_i \equiv \sum_\mu (\delta_{\mu i}\xi_\mu - \beta_{\mu i}\xi'_\mu \mp \beta_{\mu i}\delta_{\mu i}),\ x'_i \equiv \sum_\mu (-\gamma_{\mu i}\xi_\mu + \alpha_{\mu i}\xi'_\mu \mp \alpha_{\mu i}\gamma_{\mu i}),$

d. h. die aufgelösten Gleichungen unterscheiden sich von den ursprünglichen nur dadurch, dass an Stelle der Transformationscoefficienten die inversen Coefficienten getreten sind.

Die Transformationsformel für die Thetafunction lautet nunmehr nach (20) und (24)

(33) $$\vartheta_\xi((v;\ b)) = A\,\vartheta_x((u;\ a))\,e^{f((u))},$$

wo

(34) $$f((u)) = \sum_{i,k} \frac{\partial \log M}{\partial a_{ik}} u_i u_k.$$

Es ist klar, dass man in den vorstehenden Entwicklungen durchgehends die Grössen

$$u,\ a,\ \alpha_{i\mu},\quad \beta_{i\mu},\quad \gamma_{i\mu},\ \delta_{i\mu},\ M,\ P,\ x$$

vertauschen kann bez. mit

$$v,\ b,\ \delta_{\mu i},\ -\beta_{\mu i},\ -\gamma_{\mu i},\ \alpha_{\mu i},\ N,\ Q,\ y.$$

Man erhält so gleichzeitig mit (33) und (34) die Formeln

(35) $$\vartheta_x((u;\ a)) = B\,\vartheta_\xi((v;\ b))\,e^{\varphi((v))},$$

wo

(36) $$\varphi((v)) = \sum_{i,k} \frac{\partial \log N}{\partial b_{ik}} v_i v_k.$$

Die Constanten A und B, sowie die Functionen $f((u))$ und $\varphi((v))$ in (33) und (35) stehen in enger Beziehung zu einander. Eliminirt man aus beiden Gleichungen die Functionen ϑ und setzt dann $u_1, .., u_p$, also nach (4) auch $v_1, .., v_p$ gleich $0, .., 0$, so folgt

(37) $$AB = 1 \quad \text{und} \quad f((u)) + \varphi((v)) \equiv 0 \pmod{2\pi i}.$$

Es bleibt noch die Constante A in (33) zu bestimmen; dieselbe ist abhängig von den Moduln a_{ik} (oder b_{ik}), den Transformationscoefficienten $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ und der Charakteristik x (oder ξ). Wir verweisen wegen dieser Rechnung auf die Litteratur[1]).

Die gewonnenen Resultate fassen wir zusammen in den Satz:

Bei einer Verlegung des kanonischen Querschnittsystems oder bei einer kanonischen Transformation der

1) Thomae, l. c. Clebsch-Gordan, l. c. S. 318 ff. Weber, Journ. für Math. Bd. 74. S. 574 (1871).

Perioden, dargestellt durch die Gleichungen (2) § 38 mit den Bedingungen (6) oder (10) § 38, verändern sich auch

1) die Argumente der Thetafunction u_k in v_k gemäss den Gleichungen (4) oder (9);
2) die Moduln der Thetafunction a_{ik} in b_{ik} gemäss den Gleichungen (8) oder (11);
3) die Charakteristik der Thetafunction x in ξ gemäss den Gleichungen (27) und (31) oder (32);
4) die Thetafunction selber $\vartheta_x((u;\, a))$ in $\vartheta_\xi((v;\, b))$ gemäss den Gleichungen (33) oder (35).

Diese Transformation heisst die lineare Transformation der Thetafunctionen. Da die Transformationscoefficienten $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ auf unendlich viele Arten gewählt werden können, so heisst die Theorie der linearen Transformation auch die Theorie der unendlich vielen Formen der Thetafunction. Da ferner lineare Transformationen, deren Coefficienten $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ nach dem Modul 2 congruent sind, zu denselben Charakteristiken der transformirten Thetafunctionen führen, so betrachtet man nur solche lineare Transformationen als wesentlich verschieden, deren Coefficienten (mod 2) verschieden sind; die Zahl dieser letzteren ist endlich.

§. 41. Transformation der Thetacharakteristiken.

In § 40 wurde die einer Verlegung des kanonischen Querschnittsystems (a, b) entsprechende, lineare Transformation der Thetafunction untersucht. Bei derselben ändern sich die Argumente, die Moduln und die Charakteristik der Thetafunction. Wir betrachten jetzt eingehender die Transformation der Thetacharakteristiken, die von der der Periodencharakteristiken (§ 39) wesentlich abweicht. Die Transformation zwischen zwei Thetacharakteristiken x und ξ war gegeben durch die linearen, nicht homogenen Gleichungen[1] (27) und (31) § 40, nämlich, wenn $(i,\, \nu = 1, \ldots, p)$:

$$\begin{aligned} \xi_\nu &\equiv \sum_i (\alpha_{\nu i} x_i + \beta_{\nu i} x_i' + \alpha_{\nu i}\beta_{\nu i}), \\ \xi_\nu' &\equiv \sum_i (\gamma_{\nu i} x_i + \delta_{\nu i} x_i' + \gamma_{\nu i}\delta_{\nu i}) \pmod 2, \end{aligned} \tag{1}$$

wobei vorausgesetzt ist, dass die Coefficienten $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ den Gleichungen (6) oder (10) § 38 genügen.

---

1) Für $p = 2$: Hermite, Comptes rendus. T. 40, S. 367 (1855).

Wie aus Periodencharakteristiken, so lassen sich auch aus Thetacharakteristiken gewisse Formen bilden, die der linearen Transformation oder der Querschnittverlegung gegenüber invariant sind. Ein erster Satz ist folgender:

(I) Ist (x) eine beliebige Thetacharakteristik, so ist der Ausdruck

$$|x| \equiv \sum_i x_i x_i' \tag{2}$$

invariant für jede Verlegung des Querschnittsystems oder jede lineare Transformation der Thetafunctionen.

Dass $|\xi| \equiv |x|$ ergibt sich aus (1) mit Hilfe der Relationen (6) oder (10) § 38. Dasselbe folgt auch so: Setzt man in der Transformationsgleichung für die Thetafunction (33) § 40 $-u_i$ für u_i, also nach (4) § 40 auch $-v_i$ für v_i $(i = 1, \ldots, p)$, so nimmt, da die Constante A von den u_i unabhängig und $f((u))$ homogen vom zweiten Grade in den u_i ist, die linke Seite den Factor $(-1)^{|\xi|}$, die rechte Seite den Factor $(-1)^{|x|}$ an nach (41) § 26. Da andrerseits die Gleichung (33) § 40 ungeändert bleiben muss, so folgt $(-1)^{|\xi|} = (-1)^{|x|}$ oder $|\xi| \equiv |x|$ (mod 2). (q. e. d.)

Hiernach geht jede gerade Charakteristik wieder in eine gerade, jede ungrade Charakteristik wieder in eine ungrade über; dasselbe gilt von den Thetafunctionen. Aus (I) ergibt sich sofort ein zweiter Satz. Nach (1) geht die Summe einer ungraden Anzahl von Thetacharakteristiken $x, y, z, \ldots$ über in die Summe der transformirten Thetacharakteristiken $\xi, \eta, \zeta, \ldots$ Es ist also auch $|xyz|$ und allgemein $|xx_1 \ldots x_{2\lambda}|$ invariant. Daher folgt aus (I):

(II) Sind x, y, z drei beliebige Thetacharakteristiken, so ist der Ausdruck

$$|x, y, z| \equiv |x| + |y| + |z| + |xyz| \tag{3}$$

invariant für jede Verlegung des Querschnittsystems oder jede lineare Transformation der Thetafunctionen.

Der Ausdruck $|x, y, z|$ lässt sich auch schreiben (vgl. die Definitionen S. 263)

$$|x, y, z| \equiv |x, y| + |y, z| + |z, x| \equiv |xy| + |yz| + |zx|, \tag{4}$$

so dass, wenn C eine beliebige Thetacharakteristik ist,

$$|x, y, z| \equiv |Cx, Cy, Cz|. \tag{5}$$

Wie früher für die Periodencharakteristiken der invariante Ausdruck von zwei Charakteristiken $|x, y|$ (I, § 39), so gibt hier für die Thetacharakteristiken der invariante Ausdruck von drei Charakteristiken

$|x, y, z|$ Anlass zur Untersuchung eines Systems von Thetacharakteristiken von der Beschaffenheit, dass zwischen je dreien derselben dieser Ausdruck (3) entweder den Werth 0 oder 1 (mod 2) hat. Systeme der letzteren Art führen auf die sog. allgemeinen Fundamentalsysteme von Charakteristiken[1]). Man kann dieselben noch einfacher unmittelbar aus den früher (§ 39) betrachteten, speciellen Fundamentalsystemen herleiten, indem man definirt:

(III) Addirt man zu den Charakteristiken eines speciellen Fundamentalsystems von $2p + 2$ Charakteristiken $0, B_1, \ldots, B_{2p+1}$ eine beliebige Charakteristik A_0 und setzt

$$A_0 B_i \equiv A_i \quad \text{oder} \quad B_i \equiv A_0 A_i, \tag{6}$$

so bilden die $2p + 2$ Charakteristiken

$$A_0, A_1, \ldots, A_{2p+1} \tag{7}$$

ein allgemeines Fundamentalsystem von $2p + 2$ Charakteristiken.

Ist C eine beliebige Charakteristik, so bilden die $2p + 2$ Charakteristiken $CA_0, CA_1, \ldots, CA_{2p+1}$ offenbar ebenfalls ein allgemeines Fundamentalsystem und zwar ein von dem ursprünglichen verschiedenes, wenn C von 0 verschieden ist. Setzt man $C = A_0$ und $CA_i = B_i$, so erhält man umgekehrt aus dem allgemeinen ein specielles Fundamentalsystem von der in § 39 betrachteten Art.

Die Eigenschaften eines allgemeinen Fundamentalsystems sind nach der Definition (III) folgende:

1) Zwischen je dreien der Charakteristiken (7) besteht die Relation:

$$|A_i, A_k, A_l| \equiv 1 \quad (\text{mod } 2). \tag{8}$$

Dies folgt unmittelbar aus (6) und der Darstellung (4) von $|x, y, z|$.
Umgekehrt können die Bedingungen (8) zur Definition eines allgemeinen Fundamentalsystems dienen.

2) Da A_0 als beliebige Charakteristik sich in die Form bringen lassen muss $A_0 \equiv B_1 \ldots B_{2\lambda} \equiv B_{2\lambda+1} \ldots B_{2p+1}$, so folgt aus (6),

---

1) Die allgemeinen Fundamentalsysteme sind untersucht von Herrn Frobenius (Journ. für Math. Bd. 89 S. 208 ff. 1880) auf Grund der Definitionsgleichungen (8). Systeme von Charakteristiken, für die der Ausdruck (3) den Werth 0 bez. 1 hat, heissen auch syzygetische bez. azygetische Systeme. Entsprechende Bezeichnungen gelten für die speciellen Fundamentalsysteme. Die obige Herleitung der Eigenschaften der allgemeinen aus denen der speciellen Fundamentalsysteme hat Herr Prym gegeben (Unters. üb. d. Riemann'sche Thetaformel, Leipzig 1882, S. 64—70). Daselbst ist auch die Bezeichnung „kanonische Darstellung" der Charakteristiken durch ein Fundamentalsystem eingeführt.

dass zwischen den Charakteristiken (7) zwei Relationen bestehen von der Form

$$A_0 A_1, \,.\,. A_{2\lambda} \equiv 0, \quad A_{2\lambda+1} \,.\,. A_{2p+1} \equiv 0; \tag{9}$$

aus ihnen folgt

$$A_0 A_1 \,.\,.\,. A_{2p+1} \equiv 0. \tag{10}$$

Eine weitere Relation aber kann zwischen den $2p + 2$ Charakteristiken (7) nicht bestehen, weil sonst eine lineare Relation zwischen den Charakteristiken B bestehen müsste, ausser $B_1 B_2 \,.\,. B_{2p+1} \equiv 0$, was nicht der Fall ist (Satz III § 39).

Man kann nun, ebenso wie (§ 39) durch ein specielles, so auch durch ein allgemeines Fundamentalsystem sämmtliche 2^{2p} Charakteristiken in kanonischer Form darstellen, d. h. so, dass sich der gerade oder ungrade Charakter einer jeden Charakteristik sofort erkennen lässt. Nach (18) § 39 hat man für eine beliebige Charakteristik ε die Darstellung

$$\varepsilon = \mathfrak{L} + \alpha_1 B_1 + \cdot\cdot + \alpha_{2p+1} B_{2p+1}. \tag{11}$$

Durch Einführung der A aus (6) erhält man statt dessen

$$\varepsilon = \mathfrak{L} + (\alpha_1 + \cdot\cdot + \alpha_{2p+1})\, A_0 + \alpha_1 A_1 + \cdot\cdot + \alpha_{2p+1} A_{2p+1}.$$

Addirt und subtrahirt man auf der rechten Seite $(p + 1)\, A_0$ und setzt

$$\mathfrak{L} + (p + 1)\, A_0 \equiv K, \quad \alpha_0 \equiv \sum_{\nu=1}^{2p+1} \alpha_\nu - (p + 1),$$

so erhält man die Darstellung

$$\varepsilon = K + \alpha_0 A_0 + \alpha_1 A_1 + \cdot\cdot + \alpha_{2p+1} A_{2p+1} \tag{12}$$

mit der Bedingung

$$\sum_{\nu=0}^{2p+1} \alpha_\nu \equiv p + 1 \pmod 2. \tag{13}$$

Der gerade oder ungrade Charakter von (12) lässt sich nun leicht feststellen.

Nach (19) § 39 ist ε gerade, wenn von den $2p + 1$ Grössen $\alpha_1, \,.\,.,\, \alpha_{2p+1}$ entweder $p + 4\varrho$ oder $p + 4\varrho + 1$ den Werth 1 haben. Im ersten Falle folgt aus (13) $\alpha_0 = 1$; im zweiten Falle $\alpha_0 = 0$, so dass in beiden Fällen von den $2p + 2$ Grössen $\alpha_0, \alpha_1, \,.\,.,\, \alpha_{2p+1}$ in (12) $p + 4\varrho + 1$ den Werth 1, die übrigen den Werth 0 haben.

Dagegen ist ε ungrade, wenn von den $2p + 1$ Grössen $\alpha_1, \,.\,.,\, \alpha_{2p+1}$ entweder $p + 4\varrho + 2$ oder $p + 4\varrho + 3$ den Werth 1 haben; im ersten Falle ist $\alpha_0 = 1$, im zweiten Falle $\alpha_0 = 0$, so dass in beiden

Fällen von den $2p+2$ Grössen $\alpha_0, \alpha_1, .., \alpha_{2p+1}$ in (12) $p+4\varrho+3$ den Werth 1, die übrigen den Werth 0 haben.

Hieraus folgt, wenn $\sum^{i} A$ die Summe von i beliebigen unter den Charakteristiken (7) bedeutet, der Satz:

(IV) Sind $A_0, A_1, .., A_{2p+1}$ die $2p+2$ Charakteristiken eines allgemeinen Fundamentalsystems, definirt durch das Bildungsgesetz (III) (oder, was dasselbe, durch die Bedingungen (8)), so bestehen zwischen denselben nur zwei Gleichungen von der Form (9). Ferner stellen sich die sämmtlichen 2^{2p} Charakteristiken dar in kanonischer Form, nämlich, wenn $\varrho = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ ist,

$$\text{die geraden Charakteristiken in der Form } K + \sum^{p+4\varrho+1} A,$$
$$\text{die ungraden Charakteristiken in der Form } K + \sum^{p+4\varrho-1} A. \tag{14}$$

Wir zeigen noch, dass (ähnlich wie bei den speciellen Fundamentalsystemen) in den Darstellungen (14) K die Summe der unter den $2p+2$ Charakteristiken A_i enthaltenen, ungraden Charakteristiken ist und dass die Zahl dieser Charakteristiken $\equiv p$ (mod 4) ist.

Die Darstellung einer Charakteristik ε in der kanonischen Form (12) mit den Bedingungen (13) ist auf zwei Arten möglich, von denen die eine aus der andern hervorgeht durch Addition von (10). Eine dritte solche Darstellung kann nicht bestehen, da sich durch ihre Verbindung mit den beiden genannten Darstellungen ausser (9) und (10) noch eine weitere, lineare Relation zwischen den A ergeben würde, was unmöglich.

Man erhält aber, indem man zu der Gleichung (12) die Gleichungen (9) addirt, für dieselbe Charakteristik ε noch zwei weitere Darstellungen der Form (12), bei denen aber $\sum_{\nu=0}^{2p+1} \alpha_\nu \equiv p$ (mod 2). Diese Darstellungen sollen nichtkanonische heissen, da sich bei ihnen nicht aus der Anzahl der von 0 verschiedenen Grössen α auf den Charakter von ε schliessen lässt.

Nun sei eine der nichtkanonischen Darstellungen der Charakteristik (0) die folgende

$$0 = K + A_{\lambda_1} + \cdots + A_{\lambda_s} \quad (s \equiv p \bmod 2). \tag{15}$$

Bezeichnet man mit $\mu_1, .., \mu_{2p+2-s}$ die $2p+2-s$ von $\lambda_1, .., \lambda_s$ verschiedenen Zahlen aus der Reihe $1, 2, .., 2p+2$ und addirt zur

linken und zur rechten Seite von (15) einmal eine beliebige der s Charakteristiken A_λ, etwa A_{λ_σ}, das andere mal eine beliebige der $2p+2-s$ Charakteristiken A_μ, etwa A_{μ_τ}, so erhält man für A_{λ_σ} und A_{μ_τ} die kanonischen Darstellungen:

$$(16)\qquad \begin{aligned} A_{\lambda_\sigma} &= K + A_{\lambda_1} + \cdots + A_{\lambda_s} + A_{\lambda_\sigma}, \\ A_{\mu_\tau} &= K + A_{\lambda_1} + \cdots + A_{\lambda_s} + A_{\mu_\tau}. \end{aligned}$$

Die Zahl der Charakteristiken auf der rechten Seite ist in der ersten Gleichung (16) $s-1$, in der zweiten Gleichung $s+1$. Nach Satz IV sind daher die s Charakteristiken A_λ und ebenso die $2p+2-s$ Charakteristiken A_μ entweder sämmtlich gerade oder sämmtlich ungrade, die ersteren aber stets von entgegengesetztem Charakter wie die letzteren. Die Charakteristik K muss also nach (16) ebensowohl gleich der Summe der geraden, wie gleich der Summe der ungraden unter den $2p+2$ Charakteristiken A sein. Man kann daher nach (15) die s Charakteristiken A_λ als die unter den $2p+2$ Charakteristiken A vorhandenen ungraden Charakteristiken betrachten und erhält dann nach (16) und Satz IV für $s-1$ die Form $p+4\varrho-1$, wonach $s \equiv p \pmod 4$. (q. e. d.)

Hieraus ergibt sich noch, dass die kanonischen Darstellungen (14) sämmtlich Combinationen einer ungraden Anzahl (wesentliche Combinationen), die nichtkanonischen Darstellungen dagegen Combinationen einer geraden Anzahl der Charakteristiken $A_0, A_1, .., A_{2p+1}$ sind.

Die Herleitung eines allgemeinen Fundamentalsystems $A_0, .., A_{2p+1}$ ergibt sich aus der eines speciellen Systems. A_0 ist beliebig, also auf 2^{2p} Arten wählbar. Alsdann erhält man die Charakteristiken $A_0 A_i = B_i$ wie früher angegeben, womit alle A_i bestimmt sind. Da hierbei auch alle Permutationen der Charakteristiken eines jeden allgemeinen Fundamentalsystems $2p+2$ erhalten werden, so ist die Zahl der allgemeinen Fundamentalsysteme nach (22) § 39:

$$(17)\qquad = 2^{2p}\,\frac{(2^{2p}-1)(2^{2p-2}-1)\,..\,(2^2-1)}{1\cdot 2\cdot\cdot\, 2p+2}\,2^{pp}.$$

Ferner folgt aus § 39, dass $2p+2-\lambda$ durch die Relationen (8) verbundene Charakteristiken A, deren Summe, falls λ gerade ist, nicht verschwindet, zu einem allgemeinen Fundamentalsystem ergänzt werden können auf P_λ (23) § 39 Arten, wobei $\delta = 0$ oder $= 1$ ist, je nachdem λ gerade oder ungrade ist, dass also z. B. ein allgemeines Fundamentalsystem auf 1, 2, 6, .. Arten vervollständigt werden kann, wenn bez. $2p-1$, $2p-2$, $2p-3$, .. seiner Charakteristiken gegeben sind.

Für die Verwandlung eines allgemeinen Fundamentalsystems in ein anderes gilt derselbe Satz von $A_0, A_1, .., A_{2p+1}$, der S. 337

von $B_1, .., B_{2p+1}$ ausgesprochen wurde. Denn für $A_{\lambda+1}$ kann man wie dort jede Summe einer ungraden Zahl von Charakteristiken $A_{\lambda+1}, .., A_{2p+1}$ wählen[1]).

Kehrt man zurück zu der Verlegung des kanonischen Querschnittsystems, so ergibt sich für die allgemeinen Fundamentalsysteme von Charakteristiken aus der invarianten Eigenschaft von $|x, y, z|$ der Satz:

(V) Jedem Uebergang von einem kanonischen Querschnittsystem der Fläche T in ein anderes entspricht eine bestimmte, lineare Transformation der Thetafunctionen oder der Uebergang eines allgemeinen Fundamentalsystems von Thetacharakteristiken in ein anderes. Dabei bleibt der gerade oder ungrade Charakter einer jeden Charakteristik des Systems und folglich auch die Zahl s seiner ungraden Charakteristiken erhalten.

Umgekehrt gilt der Satz:

Jedem Uebergang eines allgemeinen Fundamentalsystems von Thetacharakteristiken in ein anderes, mit derselben Zahl s der ungraden Charakteristiken, entspricht eine bestimmte Verlegung des kanonischen Querschnittsystems der Fläche T.

Denn seien $A_0, A_1, .., A_{2p+1}$ und $\mathsf{A}_0, \mathsf{A}_1, .., \mathsf{A}_{2p+1}$ zwei allgemeine Fundamentalsysteme von Thetacharakteristiken mit derselben Zahl s von ungraden Charakteristiken, welche durch eine Transformation der Form (1), nämlich, wenn $(i, \nu = 1, .., p)$:

$$\xi_\nu \equiv \sum_i (\alpha_{\nu i} x_i + \beta_{\nu i} x'_i + \alpha_{\nu i}\beta_{\nu i}), \quad \xi'_\nu \equiv \sum_i (\gamma_{\nu i} x_i + \delta_{\nu i} x'_i + \gamma_{\nu i}\delta_{\nu i}) \tag{18}$$

in einander übergehen, wobei die Coefficienten $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ den Gleichungen (10) § 38 genügen. Setzt man $A_0 A_i = B_i$ und $\mathsf{A}_0\mathsf{A}_i = \mathsf{B}_i (i = 1, .., 2p+1)$, so folgt, dass die speciellen Fundamentalsysteme $0, B_1, .., B_{2p+1}$ und $0, \mathsf{B}_1, .., \mathsf{B}_{2p+1}$ in einander übergehen durch eine Transformation der Form

$$\eta_\nu \equiv \sum_i (\alpha_{\nu i} y_i + \beta_{\nu i} y'_i), \quad \eta'_\nu \equiv \sum_i (\gamma_{\nu i} y_i + \delta_{\nu i} y'_i),$$

oder, wenn man $\eta_\nu, \eta'_\nu, y_i, y'_i$ bezüglich durch $-\zeta'_\nu, \zeta_\nu, -z'_i, z_i$ und $\alpha_{\nu i}, \beta_{\nu i}, \gamma_{\nu i}, \delta_{\nu i}$ bez. durch $\delta'_{i\nu}, -\beta'_{i\nu}, -\gamma'_{i\nu}, \alpha'_{i\nu}$ ersetzt, durch eine Transformation der Form

$$\zeta_\nu \equiv \sum_i (\alpha'_{i\nu} z_i + \gamma'_{i\nu} z'_i), \quad \zeta'_\nu \equiv \sum_i (\beta'_{i\nu} z_i + \delta'_{i\nu} z'_i), \tag{19}$$

1) Frobenius, Journ. für Math. Bd. 89, S. 213 (1880). Daselbst finden sich noch weitere Sätze über Complexe von Fundamentalsystemen.

wo die Coefficienten α', β', γ', δ' nunmehr den Gleichungen genügen

$$
(20)\qquad
\begin{gathered}
\sum_i (\alpha'_{i\mu}\gamma'_{i\nu} - \alpha'_{i\nu}\gamma'_{i\mu}) = 0, \quad \sum_i (\beta'_{i\mu}\delta'_{i\nu} - \beta'_{i\nu}\delta'_{i\mu}) = 0, \\
\sum_i (\alpha'_{i\mu}\delta'_{i\nu} - \beta'_{i\nu}\gamma'_{i\mu}) = \begin{matrix} +1, \text{ wenn } \mu = \nu, \\ 0, \text{ wenn } \mu \lessgtr \nu. \end{matrix}
\end{gathered}
$$

Die Gleichungen (19) mit den Bedingungen (20) vermitteln aber den Uebergang von einem speciellen Fundamentalsystem oder einem Fundamentalsystem von Periodencharakteristiken in ein anderes, wie die Vergleichung von (19) und (20) mit (2) § 39 und (6) § 38 zeigt, und einem solchen Uebergang entspricht nach Satz V § 39 stets eine bestimmte Verlegung des kanonischen Querschnittsystems. (q. e. d.)

Wir werfen zum Schluss noch einen Rückblick auf die Lösung des Jacobi'schen Umkehrproblems (Abschn. VI).

Durch die vorstehende Untersuchung der allgemeinen Fundamentalsysteme von $2p+2$ Thetacharakteristiken sind nicht allein die in § 32 S. 263 und 264 benutzten Sätze bewiesen, sondern es tritt auch der Einfluss klar hervor, den die Verlegung des kanonischen Querschnittsystems der Fläche T auf die Lösung des Umkehrproblems ausübt. Führt man nämlich ein kanonisches Querschnittsystem (a, b) in ein anderes (a', b') über, so ändert sich an der im Abschnitt VI (s. bes. § 32 Satz VII) gegebenen Lösung des Umkehrproblems nichts, als dass sich einem Fundamentalsystem von $2p+2$ Berührungsfunctionen ψ_μ oder Wurzelfunctionen $\sqrt{\psi_\mu}$ statt des ursprünglich gewählten Fundamentalsystems von $2p+2$ Thetacharakteristiken ein anderes solches System zuordnet. Für diese neue Zuordnung geben die Gleichungen (4), (6), (8), (27), (31) und (33) § 40 die transformirten Werthe der Argumente u_h, der Moduln a_{hk}, der Charakteristik μ und der Thetafunction $\vartheta_\mu((u; a))$ an. Umgekehrt kann man von vornherein einem beliebigen Fundamentalsystem von Functionen ψ_μ ein beliebiges Fundamentalsystem von Thetacharakteristiken μ zuordnen und nachträglich die Lage des Querschnittsystems angeben, die dieser Zuordnung entspricht. Verbindet man schliesslich die im Abschnitt IV betrachtete, eindeutige Transformation der algebraischen Fundamentalgleichung $F(x, y) = 0$ mit der im Abschnitt VIII untersuchten linearen Transformation der Thetafunction, so erhält man aus einer bestimmten Form der Lösung des Umkehrproblems, wie sie im Abschnitt VI angegeben wurde, die allgemeinste Form der Lösung dieses Problems.



